Ordinarie tentamen i Mekanik 2 (FFM521)

Tid och plats: Fredagen den 1 juni 2018 klockan 08.30-12.30 Johanneberg.
Hjälpmedel: Matte Beta och miniräknare. **Examinator**: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 11.30

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift ges max 3 poäng enligt följande principer:

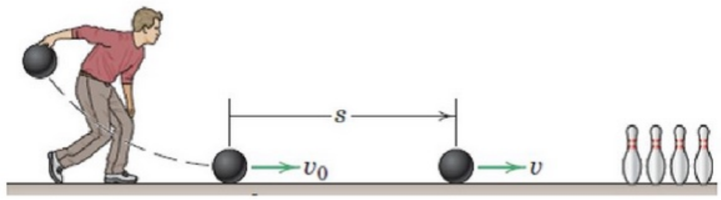
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1/2 eller 1 poäng avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 15 poäng på denna deltentamen. Halva delpoäng kan utdelas. För att bli godkänd krävs minst fem poäng. 13-15 poäng ger betyg 5, 9-12 poäng ger betyg 4, och 5-8 poäng ger betyg 3.

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. *Baserat på "Klassiker"* Ett bowlingklot med radie r släpps iväg med hastighet v_0 utan rotation. Initialt glider den mot banan, och friktionen gör så att den till slut rullar utan att glida. Ett klot har tröghetsmoment $\frac{2}{5}mr^2$.

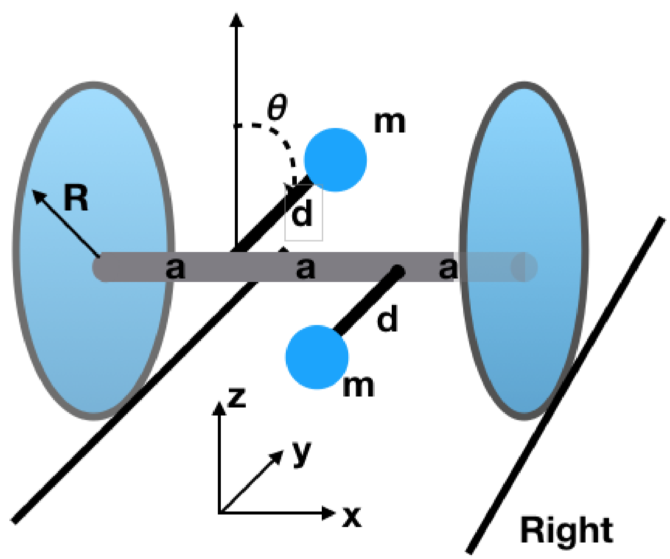
   (a) Beräkna sluthastigheten av klotet. (Ni behöver inte räkna ut s.)



2. Anordningen, som består av hjulen, axeln och de två kulorna, rullar i riktningen $\hat{y}$ utan att glida. Kulorna som har massa m och försumbar radie är monterade på masslösa stänger på ett radius d från axelns mittpunkt. Axeln som kopplar de två hjulen har en längd $3a$ och axelns riktning definierar $\hat{x}$. Hjulen har en massa M, radie R. Stängerna är monterade med jämna mellanrum mellan varandra och vardera hjul. Rikningen $\hat{z}$ pekar rakt upp.

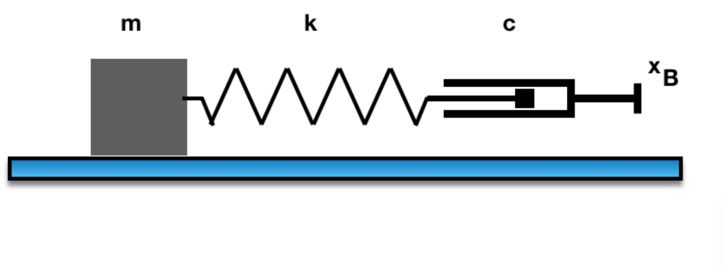
   (a) Beräkna krafterna under höger hjul som en funktion av θ, vinkeln mellan stängerna och vertikalaxeln om den rullar med konstant hastighet v i $\hat{y}$ riktningen. Beteckna n som normalkraften i riktning up, och f som kraften i riktning $+\hat{y}$.

   Tröghetsmomentet av en massiv cylinder med massa M och radius R längs symmetriaxeln är $\frac{1}{2}MR^2$.



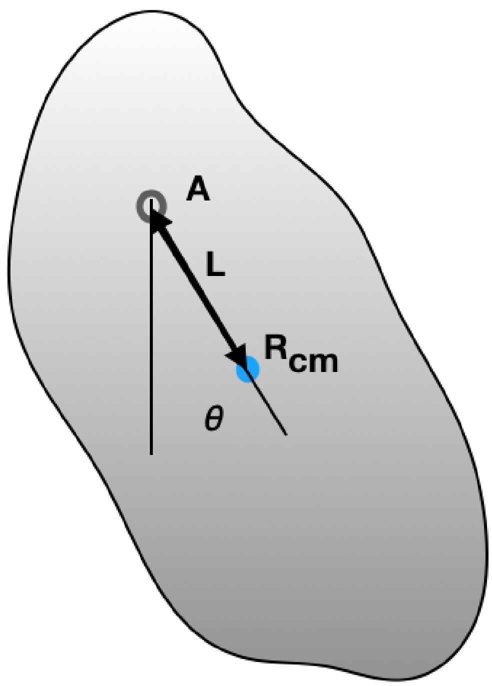
3. En fjäder med fjäderkonstant k är kopplad till en massa m i ena ändan och till en stötdämpare med dämpningskonstant c i den andra. Andra ändan av stötdämparen är kopplad till en punkt x_B som rör sig fram och tillbaka med amplitud $b : x_B = b\cos(\Omega t)$. Efter en tid rör sig massan m fram och tillbaka med en amplitud a. Massan glider friktionsfritt på underlaget.

   (a) Beräkna $|a/b|$.



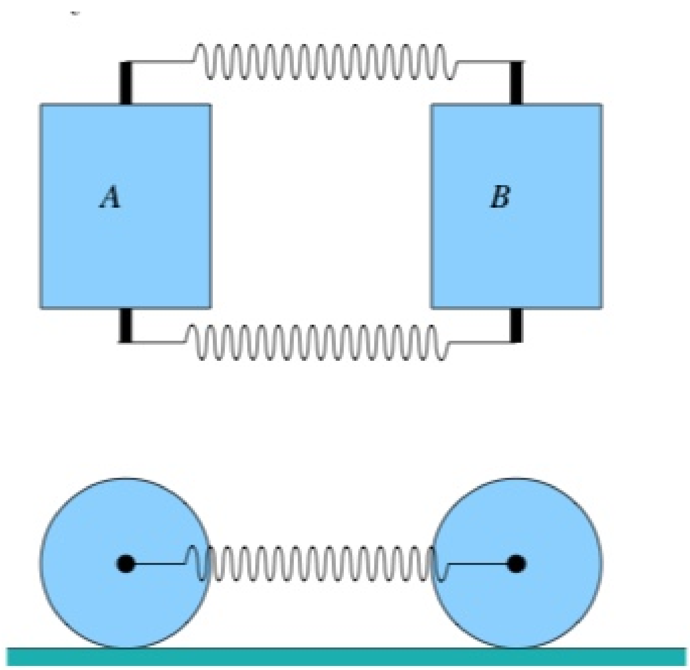
4. En plan och tunn skiva ligger i $x - y$ planet och har ett tröghetsmoment $I_{zz} = I_G = mD^2$ runt masscentrum, där D har enheten längd och kallas tröghetsradie ("radius of gyration"). Skivans densitet är konstant, ρ. Skivan roterar runt en (fixerad) axel i z -led som är ett avstånd L från masscentrum. Luftens viskositet ger friktion som, på ett litet ytelement dA vid läget $\vec{r}$, är proportionell mot arean och ytans hastighet genom luften. $d\vec{F} = -\lambda\vec{v}(\vec{r})\,dA$. Luftens densitet i förhållande till skivans kan försummas.

    (a) Bestäm diffrentialekvation för $\ddot{\theta}$.



5. Två homogena cylindrar “A” och “B” har massa m och radie r och rullar utan att glida på en horisontell yta. Cylindrarna är parallela och kopplade med två fjädrar enligt figuren, som har fjäderkonstant k. Vid tid $t = 0$ har fjädrarna sina naturliga längder, cylinder B är i vila och A rullar mot B med hastighet v_0. Cylindern har tröghetsmomentet $\frac{1}{2}mr^2$ runt symmetriaxeln.

   (a) Med valfri metod, räkna fram hastigheterna för A och B som en funktion av tid.



Lycka till!

Formelblad

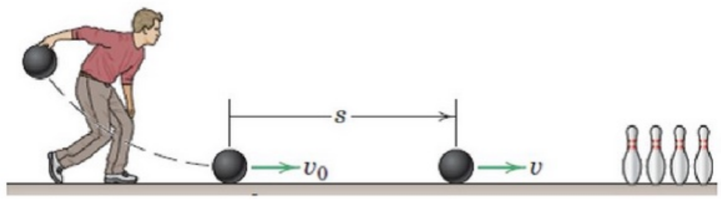
Behålla detta formelblad för andra delen av tentan

- $R_\Omega(\theta)_{ij} = \delta_{i,j} cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i\Omega_j - sin(\theta)\,\epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat{\Omega}})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat{\Omega}}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat{\Omega}_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec{r}} m_{\vec{r}}(\delta_{ij}(\vec{r})^2 - \vec{r}_i\vec{r}_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum(I_{cm})_{ij} + M\,(R^2\delta_{ij} - R_iR_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot{\Omega} \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p, q) = p\dot{q} - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A \cdot C)(B \cdot C)$
- $\cos{(a + b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$ $\qquad \sin{(a + b)} = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där* A, B *och* C *är längden av sidorna mittemot vinkeln* a, b *och* c.
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6);$ $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5).$
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB}$ $\qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}.$

Lösningsförslat ordinarie tentamen i Mekanik 2 (FFM521) 2018-06-01

1. *Baserat på "Klassiker"* Ett bowlingklot med radie r släpps iväg med hastighet v_0 utan rotation. Initialt glider den mot banan, och friktionen gör så att den till slut rullar utan att glida. Ett klot har tröghetsmoment $\frac{2}{5}mr^2$.

   (a) Beräkna sluthastigheten av klotet. (Ni behöver inte räkna ut s.)



Svar: Vi väljer som origo O en punkt på golvet, t.ex. där klotet först gör kontakt på banan. Vi vet att då friktionskraften verkar på en linje genom O, att tröghetsmomentetet runt denna punkt är bevarad. Inledningsvis har vi $H_i = mv_0 r$ och slutligen när klotet rullar, $H_f = mv_f r + I\omega_f = mv_f r + \frac{2}{5}mr^2 \frac{v_f}{r}$ Vi finner därför $v_0 = (1 + \frac{2}{5})v_f$ dvs $v_f = \frac{5}{7}v_0$.

2. Anordningen, som består av hjulen, axeln och de två kulorna, rullar i riktningen $\hat{y}$ utan att glida. ...

   Kulorna som har massa m och försumbar radie är monterade på masslösa stänger på ett radius d från axelns mittpunkt. Axeln som kopplar de två hjulen har en längd $3a$ och axelns riktning definierar $\hat{x}$. Hjulen har en massa M, radie R. Stängerna är monterade med jämna mellanrum mellan varandra och vardera hjul. Rikningen $\hat{z}$ pekar rakt upp.

   Svar: Vi använder oss av $H = I\omega$ vilket i detta fall innebär $H = -[I_{xx}, I_{yx}, I_{zx}]\omega$ då ω är riktad i minus x-led. Vidare har vi $M = \dot{H}$ så vi ser att $M = [0, -\dot{I}_{yx}, -\dot{I}_{zx}]\ \omega$. Läget av de två massorna relativt masscentrum är $r_1 = [\frac{a}{2}, -d\cos\omega t, -d\sin\omega t]$ och $r_2 = -r_1$. Därmed får vi

$$I_{yx} = -m\sum_i (r_i)_x (r_i)_y = m\ a\ d\ \sin\omega t$$

   och

$$I_{zx} = -m\sum_i (r_i)_x (r_i)_y = m\ a\ d\ \cos\omega t$$

   Vridmomentet runt origo blir därför, efter vi tar derivata ovan

$$M = mad\omega^2\ (-\cos\theta\ \hat{y} + \sin\theta\ \hat{z})$$

   Om hjulet står still blir normalkraften jämt fördelat. När den rullar blir det en tidsberoende differens $f\hat{y} + n\hat{z}$ på höger hjul. Eftersom masscentrum inte accelererar och gravitationskraften inte ger upphov till ett vridmomen, vet vi att motsvarande differens på vänster måste bli $-f\hat{y} - n\hat{z}$. Vi har här ignorerat den vertiklala konstanta bidraget i från gravitationen. Vi får därför ett vridmoment $M = 2\ (\frac{3}{2}a\hat{x} - r\hat{z}) \times (f\hat{y} + n\hat{z})$ där faktor två kommer från de två hjulen. Vi får därför

$$M = 3af\hat{z} - 3an\hat{y}$$

   Genom att jämföra de två uttrycken för M och använder oss av $\omega = v/r$

$$n = \frac{1}{3r^2} mdv^2 \cos\theta$$

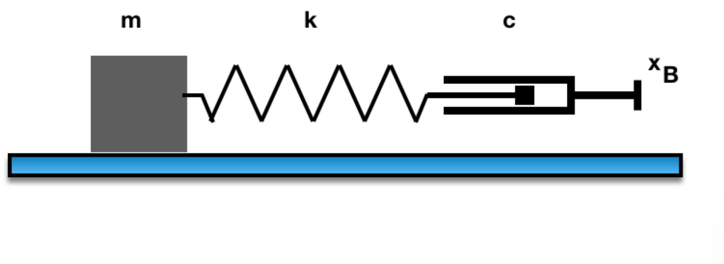
   och

$$f = \frac{1}{3r^2} mdv^2 \sin\theta$$

   Den totala normalkraften blir $(M + m)g + n$.

3. En fjäder med fjäderkonstant k är kopplad till en massa m i ena ändan och till en stötdämpare med dämpningskonstant c i den andra. Andra ändan av stötdämparen är kopplad till en punkt x_B som rör sig fram och tillbaka med amplitud $b : x_B = b\cos(\Omega t)$. Efter en tid rör sig massan m fram och tillbaka med en amplitud a. Massan glider friktionsfritt på underlaget.

   (a) Beräkna $|a/b|$.



Svar:

Beteckna läget för klossen "x" och läget för den masslösa kolven i stötdämparen x_C . Vi har nu de kopplade ekvationerna $m\ddot{x} = k(x_C - x)$ och $k(x - x_C) = c(\dot{x}_C - \dot{x}_B)$ Låt oss nu ansätta $x = ae^{i\omega}$, $x_C = a_C e^{i\omega}$ och $x_B = be^{i\omega}$. Genom att ersätta dessa får vi ekvationerna får vi $-m\omega^2 a = k(a_C - a)$ och $k(a - a_C) = ic\omega(a_C - b)$ och får därmed från den andra $a_C = \frac{ka+ic\omega b}{ic\omega+k}$

I den första ersätter vi för a_C.

$$a(k - m\omega^2 - \frac{k^2}{k + i\omega c}) = \frac{ic\omega k}{ic\omega + k} b$$

Så vi får

$$a = \frac{ic\omega k}{(ic\omega + k)(k - m\omega^2 - \frac{k^2}{k+i\omega c})} b$$

vilket vi kan förenkla till

$$\frac{a}{b} = \frac{ck}{ck - mc\omega^2 + im\omega k}$$

Vi tar magnituden och erhåller

$$|\frac{a}{b}| = \frac{ck}{\sqrt{(ck - mc\omega^2)^2 + (m\omega k)^2}}$$

vilket kan förenklas till

$$|\frac{a}{b}| = \frac{k}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (m\omega k/c)^2}}$$

Det är värt att notera att i det "vanliga" fallet om stötdämparen verkar direkt på massan och fjädern högra ända förs fram och tillbaka med amplitud b utan att vara kopplad genom stötdämparen, ersätts då $m\omega k/c$ av enbart ωc. Så den "effektiva" dämpningsfaktorn i det seriekopplade blir kombinationen mk/c istället för c.

4. En plan och tunn skiva ligger i $x - y$ planet och har ett tröghetsmoment $I_{zz} = I_G = mD^2$ runt masscentrum, där D har enheten längd och kallas tröghetsradie ("radius of gyration"). Skivans densitet är konstant, ρ. Skivan roterar runt en (fixerad) axel i z -led som är ett avstånd L från masscentrum. Luftens viskositet ger friktion som, på ett litet ytelement dA vid läget $\vec{r}$, är proportionell mot arean och ytans hastighet genom luften. $d\vec{F} = -\lambda\vec{v}(\vec{r})\, dA$. Luftens densitet i förhållande till skivans kan försummas.

   (a) Bestäm diffrentialekvation för $\ddot{\theta}$.

Svar:

Notera

$$I_0 = I_{cm} + mD^2 = m(D^2 + L^2)$$

Vi vet också att

$$I_0 = \int_A \rho\, r^2\, dA = \rho \int_A r^2\, dA$$

Vridmomentet från luften ges av

$$M_{visc} = -\int_A d^2 r \lambda\, \vec{r} \times v(\vec{r})$$

Eftersom skivan roterar runt origo har vi $\vec{v}(r) = \dot{\theta}\hat{z} \times \vec{r}$ så vi får

$$M_{visc} = -\lambda\dot{\theta} \int_A dA\, \vec{r} \times (\hat{z} \times \vec{r})$$

vilket blir samma formel som för tröghetsmomentent med λ och ρ utbytt. Vi får alltså

$$M_{visc} = -\lambda\dot{\theta} \int_A dA\, r^2 = -\dot{\theta}\, \lambda I_0/\rho$$

Detta kan man även se direkt från att $\vec{v}$ är vinkelrätt mot $\vec{r}$ vilket ger i detta fall $dM_{visc} = r|dF| = -\lambda r(\dot{\theta} r) dA$ från polära koordinat.

Från gravitationskraften har vi $M = -mgL \sin\theta$ så totalt får vi

$$I_0\ddot{\theta} + I_0\lambda\dot{\theta}/\rho + mgL\sin(\theta) = 0$$

vilket vi kan förenkla till

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{\rho}\dot{\theta} + \frac{gL}{D^2 + L^2}\sin\theta = 0$$

5. Två homogena cylindrar "A" och "B" ... ...

Enklast blir att använda Lagrangian. Eftersom $\dot{\theta}_i = \frac{\dot{x}_i}{r}$ för var och en av cylindrarna får vi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - 2\,\frac{1}{2}\,(x_1 - x_2)^2$$

vilket, när man använder $I = \frac{1}{2}mr^2$ förenklas till

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + -2\,\frac{1}{2}\,(x_1 - x_2)^2$$

Vi kan därmed ställa upp matriserna

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_i\mathcal{M}_{ij}\dot{x}_j - \frac{1}{2}x_i\mathcal{V}_{ij}x_j$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}m \end{bmatrix}$$

and

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix}$$

Vi introducerar $x_i = a_i e^{i\Omega t}$ och får ekvationen

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{2}m\omega^2 + 2k & -2k \\ -2k & \frac{-3}{2}m + 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Från detta ser vi att $[a_1, a_2] = [1, 1]$ löser ekvationerna för $\omega = 0$ och $[a_1, a_2] = [1, -1]$ löser ekvationerna för $\omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$. Vi får därför den allmäna lösningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(A + Bt) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$$

Om vi begär att båda är i vila vid $t = 0$ får vi $A = 0$ och $C = 0$.

Då får vi alltså

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} Bt + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} D\sin(\omega t)$$

och efter en derivata:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} B + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} D\omega\cos(\omega t)$$

Om vi ska uppfylla randvillkoret ser vi att $B + D\omega = v_0$ och $B - D\omega = 0$, så vi får $B = D\omega = v_0/2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{v_0}{2}\begin{bmatrix} 1 + \cos(\omega t) \\ 1 - \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

där $\omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$