Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521 (och FFM520)
Fredagen 7 oktober 2016, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 031-7723181 el. 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Samma uppgifter och regler gäller för FFM520 och FFM521.

Tentamen består av en obligatorisk del (uppg. 1-4) och en överbetygsdel (uppg. 5 och 6). Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 16 poäng på den obligatoriska delen. Om betyg 3 uppnåtts rättas även överbetygsdelen. Gränser för betyg 4 och 5 är 36 resp. 48 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

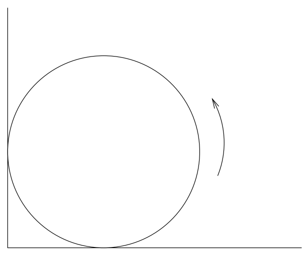
Lycka till!

Obligatorisk del

---

1. En tunn rak homogen pinne med massan m och längden ℓ är fritt upphängd i sin ena ände. Pinnen rör sig i en vätska, så förutom tyngdkraften och krafterna i upphängningspunkten påverkas den av en viskös dämpkraft, som per längdenhet är proportionell mot hastigheten med proportionalitetskonstant c. För vilket värde på c är små svängningar kring jämviktsläget kritiskt dämpade? Betrakta endast plan rörelse.

2. a. En homogen cirkulär cylinder med radien R roterar enligt figuren i ett hörn, som bildas av ett horisontalplan och ett vertikalplan. I båda beröringsställena råder friktion med friktionskoefficienten μ. Hur många varv roterar cylindern innan rörelsen upphör, om begynnelsevinkelhastigheten är ω_0?



b. Samma cylinder glider på ett horisontalplan, fortfarande med friktionskoefficient μ. Initialt har den farten v_0 riktad åt höger och vinkelhastigheten ω_0 riktad som i deluppgift a. Hur långt åt höger kommer cylindern innan den vänder? Hur stor behöver ω_0 vara för att den skall vända?

3. En kropp V med den konstanta densiteten ρ beskrivs av

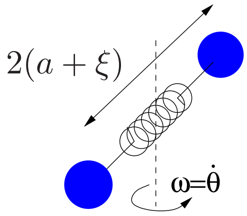
$$V = \{\vec{r}: |\vec{r}| \leq a, \, |\vec{r} - \frac{a}{2}\hat{z}| \geq \frac{a}{2}\}.$$

Bestäm huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment m.a.p. origo.

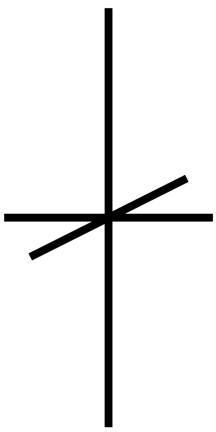
4. En kropp som faller fritt från en hög byggnad (på jorden) följer en bana som avviker litet från lodlinjen. Hur mycket? (Luftmotstånd kan försummas.)

Överbetygsdel

5. En tvåatomig molekyl modelleras som två partiklar, vardera med massan m, förbundna med en masslös fjäder med naturlig längd $2a$ och fjäderkonstant $\frac{k}{2}$. Om molekylen roterar med ett rörelsemängdsmoment $2L \neq 0$ vinkelrätt mot symmetriaxeln, skulle man kunna tänka sig att vibrationsfrekvensen hos molekylen förändras, jämfört med om $L = 0$. Ställ upp Lagranges ekvationer med de generaliserade koordinaterna ξ och θ enligt figuren. Bestäm hur vinkelfrekvensen för små svängningar beror på L.



6. En stel kropp är uppbyggd av tunna pinnar med densiteten ρ (massa/längdenhet). Två av pinnarna har längden ℓ och den tredje längden 2ℓ. De är sammanfogade vinkelrätt mot varandra i mittpunkterna (se figuren ovan). Man vill använda kroppen som en "leksakssnurra". Den ena änden av den längre pinnen är i friktionsfri kontakt med ett glatt horisontellt bord, och lutar en vinkel θ mot vertikallinjen. Om man antar att snurrans rörelse är sådan att θ är konstant i tiden, sök sambandet mellan spinnet ν och precessionshastigheten Ω i termer av givna storheter. Beskriv också masscentrums rörelse. Luftmotståndet, kan försummas. (I denna uppgift är det inte tillåtet att använda någon färdig formel för precessionsrörelsen, utan sådana måste härledas, t.ex. från "$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$".)



Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Fredagen 7 oktober 2016
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Låt ϕ beteckna vinkeln från jämviktsläget. Pinnens tröghetsmoment m.a.p. upphängningspunkten är $\frac{1}{3}m\ell^2$. Tyngdkraften utövar ett moment $-mg\frac{\ell}{2}\sin\phi$. Den viskösa kraften ger kraften $c\,dx\,x\dot{\phi}$ på en liten del av pinnen, så dess moment blir $-c\dot{\phi}\int_0^\ell x^2dx = -\frac{1}{3}c\ell^3\dot{\phi}$. Rörelseekvationen blir

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\phi} = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\phi - \frac{1}{3}c\ell^3\dot{\phi}\,,$$

vilket för små vinklar ger

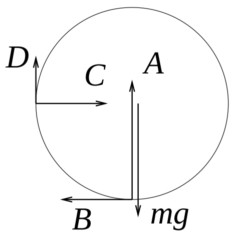
$$\ddot{\phi} + \frac{c\ell}{m}\dot{\phi} + \frac{3g}{2\ell}\phi = 0\,.$$

Kritisk dämpning fås då $\frac{c\ell}{2m} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$, dvs. då

$$c = \sqrt{\frac{6m^2g}{\ell^3}}\,.$$

Här bör en dimensionskontroll göras.

2. a.



Friläggning enligt figuren, där $B = \mu A$, $D = \mu C$. Kraftjämvikt ger $C = B = \mu A$ och $mg - A = D = \mu C = \mu^2 A$. Krafterna är alltså

$$A = \frac{1}{1+\mu^2}mg\,,$$
$$B = \frac{\mu}{1+\mu^2}mg\,,$$
$$C = \frac{\mu}{1+\mu^2}mg\,,$$
$$D = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}mg\,.$$

Cylinderns rörelseekvation är

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\phi} = -\frac{\mu+\mu^2}{1+\mu^2}mgR.$$

sålänge $\dot{\phi} > 0$. Med begynnelsevillkoren $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ är lösningen

$$\dot{\phi}(t) = \omega_0 - \frac{2\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}\frac{g}{R}t\,,$$
$$\phi(t) = \omega_0 t - \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}\frac{g}{R}t^2\,.$$

Cylindern stannar vid $t = \frac{1+\mu^2}{2\mu(1+\mu)}\frac{R\omega_0}{g}$; antalet varv den då har roterat är

$$N = \frac{1+\mu^2}{8\pi\mu(1+\mu)}\frac{R\omega_0^2}{g}\,.$$

b. Nu är normalkraften mg och friktionskraften μmg. Ekvationerna för translation och rotation är

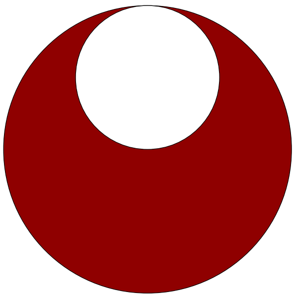
$$m\ddot{x} = -\mu mg\,,$$
$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\phi} = -\mu mgR\,.$$

Lösningen, med de givna begynnelsevillkoren (samt $x(0) = 0$, $\phi(0) = 0$), är

$$\dot{x}(t) = v_0 - \mu g t\,,$$
$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2\,,$$
$$\dot{\phi}(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t\,,$$
$$\phi(t) = \omega_0 t - \frac{\mu g}{R}t^2\,.$$

Detta gäller sålänge cylindern glider, dvs. sålänge $\dot{\phi} > -\frac{\dot{x}}{R}$. Om cylindern skall vända måste det gälla åtminstone tills $\dot{x} = 0$, dvs. till tiden $t = \frac{v_0}{\mu g}$, då cylindern isåfall har färdats sträckan $\frac{v_0^2}{2\mu g}$. Villkoret att $\dot{\phi} > 0$ vid denna tidpunkt ger $\omega_0 > \frac{2v_0}{R}$.

3. Kroppen utgörs av området innanför en sfär med radien a, centrerad i origo, med en sfärisk hålighet med hälften så stor radie, se fig.



Enklast är nog att se detta som en stor homogen boll med densitet ρ och en liten boll med densitet $-\rho$. Av symmetriskäl är koordinataxlarna huvudtröghetsaxlar. Den stora bollen har alla tre tröghetsmoment lika med $\frac{2}{5}\frac{4\pi a^3}{3}\rho a^2 = \frac{8\pi}{15}\rho a^5$. Den lilla bollen har tre lika tröghetsmoment $-\frac{2}{5}\frac{4\pi(a/2)^3}{3}\rho(a/2)^2 = -\frac{\pi}{60}\rho a^5$ m.a.p. sitt masscentrum. M.a.p. origo tillkommer $m(a/2)^2 = -\frac{4\pi(a/2)^3}{3}\rho(a/2)^2 = -\frac{\pi}{24}\rho a^5$ för momenten m.a.p. x- och y-axlarna. Totalt blir

$$I_x = I_y = \pi\rho a^5\left(\frac{8}{15} - \frac{1}{60} - \frac{1}{24}\right) = \frac{19\pi}{40}\rho a^5\,,$$
$$I_z = \pi\rho a^5\left(\frac{8}{15} - \frac{1}{60}\right) = \frac{31\pi}{60}\rho a^5\,.$$

4. En kropp som faller vertikalt nedåt utsätts för en Corioliskraft av storleken $2m\Omega(-\dot{z})\cos\theta$ österut, där Ω är jordens vinkelhastighet och θ latituden. Kalla riktningen österut för $\hat{x}$. Till lägsta ordning kan man strunta i att rörelsen i z-led påverkas, så $\dot{z} = -gt$ och $z = h - \frac{1}{2}gt^2$ om kroppen släpps från höjden h. Rörelseekvationen i x-led blir
$$m\ddot{x} = 2m\Omega g\cos\theta t\,,$$
så rörelsen blir $x(t) = \frac{1}{3}\Omega g\cos\theta t^3$. Kroppen når marken då $t = \sqrt{2h/g}$, och då är
$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\Omega h^{3/2}}{\sqrt{g}}\cos\theta\,.$$
En dimensionskontroll bör göras.

5. Vardera halvan av fjädern har längd a och fjäderkonstant k. Langrangianen blir
$$\mathcal{L} = 2\left(\frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + (a+\xi)^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k\xi^2\right)\,.$$
Lagranges ekvationer är
$$0 = m\ddot{\xi} + k\xi - m(a+\xi)\dot{\theta}^2\,,$$
$$0 = \frac{d}{dt}\left[m(a+\xi)^2\dot{\theta}\right]\,.$$
Uttrycket i hakparenteser är rörelsekonstanten L. Man kan alltså sätta in $\dot{\theta} = \frac{L}{m(a+\xi)^2}$ i x-ekvationen,
$$0 = \ddot{\xi} + \frac{k}{m}\xi - \frac{L^2}{m^2(a+\xi)^3}\,.$$
Om L är litet, så att $\xi \ll a$ kan man skriva detta som
$$\ddot{\xi} = -\frac{k}{m}\xi + \frac{L^2}{m^2a^3}(1 - \frac{3\xi}{a})\,.$$
Den effektiva fjäderkonstanten blir $k' = k + \frac{3L^2}{ma^4}$, och vinkelfrekvensen för små svängingar ges av
$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{3L^2}{kma^4}\right)$$
(förutsatt att den andra termen är mycket mindre än den första). Dimensionskontroll.

6. I ett koordinatsystem som är anpassat efter kroppen, med origo i dess masscentrum och ζ-axeln längs den långa pinnen, fås tröghetsmatrisen diag$(\frac{3}{4}\rho\ell^3, \frac{3}{4}\rho\ell^3, \frac{1}{6}\rho\ell^3)$. Masscentrum är i vila. Standardmetod med utnyttjande av $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ ger
$$\frac{7}{12}\Omega^2\cos\theta - \frac{1}{6}\Omega\nu = -4\frac{g}{\ell}\,.$$