Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521 (och FFM520)
Torsdagen 25 augusti 2016, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 031-7723181 el. 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Samma uppgifter och regler gäller för FFM520 och FFM521.

Tentamen består av en obligatorisk del (uppg. 1-4) och en överbetygsdel (uppg. 5 och 6). Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 16 poäng på den obligatoriska delen. Om betyg 3 uppnåtts rättas även överbetygsdelen. Gränser för betyg 4 och 5 är 36 resp. 48 poäng.

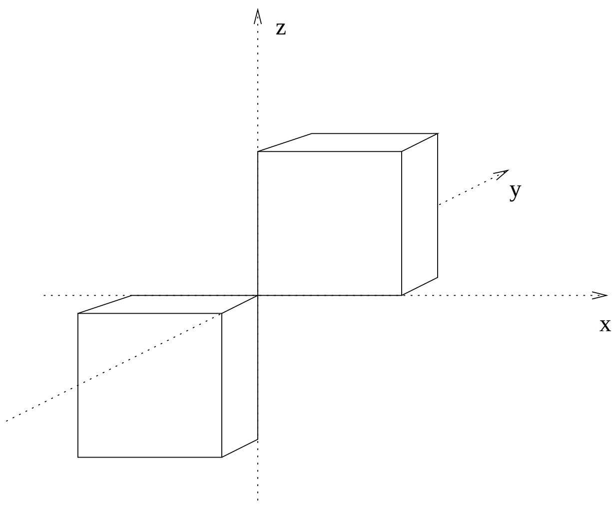
Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

Obligatorisk del

---

1. Två likadana homogena kuber, vardera med sidan a och massan m, är fast sammanfogade enligt figuren. Båda kuberna har alltså kanterna parallella med koordinataxlarna i det inritade systemet, och de berör varandra i ett hörn. Bestäm huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment för den resulterande stela kroppen.



2. Två punktmassor m_1 och m_2 kan glida utan friktion på ett horisontellt plan. De är förbundna med en fjäder som ger vardera massan en kraft $F_k = k(\ell - \ell_0)$ riktad längs linjen mellan de två massorna. Här är ℓ avståndet mellan dem, och ℓ_0 fjäderns naturliga längd. Referensriktningen för kraften på vardera massan är i riktning mot den andra massan. Dessutom finns det dissipativa förluster i systemet, som modelleras med en kraft $F_b = b\dot{\ell}$ på vardera massan (med samma referensriktning). Betrakta en situation där massorna rör sig linjärt (och alltså inte roterar runt varandra). Vilken relation skall råda mellan de ingående parametrarna för att systemets svängningar skall vara kritiskt dämpade?

3. En rymdstation roterar för att alstra artificiell gravition, av samma styrka som på jorden. Människorna i stationen befinner sig på avståndet R från rotationsaxeln. Rotationen gör att det också uppkommer Corioliskrafter när man rör sig. Om man t.ex. kräver att Corioliskraften aldrig skall överstiga 10% av "tyngdkraften" vid relativa hastigheter om högst 5 m/s, vad innebär det för villkor på R?

4. En leksakssnurra är konstruerad på följande sätt: En tunn homogen cirkelskiva med radien r och massan m är monterad på en lätt rak pinne med längden $2R$, så att pinnens mittpunkt sammanfaller med skivans mittpunkt och pinnen är vinkelrät mot skivan. Snurran startas så att den utför reguljär precessionsrörelse under inverkan av tyngdkraften, med den konstanta vinkeln θ mellan pinnen och vertikalen. Pinnens ena ändpunkt är i kontakt med underlaget och rör sig inte. Härled ett samband mellan snurrans spinn- och precessionshastigheter.

Överbetygsdel

---

5. En partikel med massan m är rörlig (utan friktion) på en kurva i rummet med parameterframställningen $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Den påverkas av en konservativ kraft med potentialen $V(\vec{r})$. Med parametern s som generaliserad koordinat, härled Lagranges ekvationer för partikelns rörelse. Verifiera att man får det förväntade resultatet då s är båglängden.

6. Visa att energin i ett konservativt system med N generaliserade koordinater q^i och rörelsemängder p_i, definierad som

$$E = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}^i p_i - L$$

är bevarad om Lagranges ekvationer är uppfyllda.

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Torsdagen 25 augusti 2016
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Börja med att beräkna en kubs tröghetsmatris m.a.p. dess masscentrum, och med koordinataxlar parallella med de givna koordinataxlarna. Den blir

$$\bar{\mathbf{I}}^{(cube)} = \frac{1}{6}ma^2\mathbb{1}$$

De tre huvudtröghetsmomenten är lika, och kubens tröghetsmatris m.a.p. masscentrum är densamma i alla koordinatsystem. Effektivt, ur tröghetssynpunkt, är kuben en sfär. Det betyder att den sammansatta kroppen effektivt har en rotationssymmetri runt linjen genom de två kubernas mittpunkter, som befinner sig på $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \pm\frac{a}{2}(1,1,1)$. Riktningen $\hat{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ är en huvudtröghetsaxel, och likaså är godtyckliga axlar genom origo som är vinkelräta mot den. Kubernas masscentra befinner sig på $(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\zeta}) = \pm\frac{a\sqrt{3}}{2}(0,0,1)$. Tröghetsmomentet m.a.p. ζ-axeln är $I_\zeta = \frac{1}{3}ma^2$. För övriga axlar ger Steiners sats att

$$I_\xi = I_\eta = 2\left(\frac{1}{6}ma^2 + m\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{11}{6}ma^2\,.$$

2. Enligt uppgiften styrs systemet av ekvationerna (index 1 och 2 betecknar de två partiklarna, $\ell = x_2 - x_1$)

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - \ell_0) + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,, \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - \ell_0) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,. \end{aligned}$$

Naturligtvis gäller $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$, vilket uttrycker rörelsemängdskonservering. Vi är bara intresserade av svängningarna, och kan låta masscentrum ligga stilla i origo, dvs. $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$. Eliminering av den ena korrdinaten ger

$$\ddot{x}_2 + \frac{b}{\mu}\dot{x}_2 + \frac{k}{\mu}x_2 = \frac{k\ell_0}{m_2}\,,$$

där μ är den reducerade massan, $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. Kritisk dämning råder då den karaktäristiska ekvationen,

$$\lambda^2 + \frac{b}{\mu}\lambda + \frac{k}{\mu} = 0\,,$$

har en dubbelrot, dvs. då $b^2 - 4\mu k = 0$.

3. För att centrifugalkraften skall ge “gravitationsaccelerationen” g krävs en rotationshastighet ω sådan att $R\omega^2 = g$. Coriolisaccelerationen vid rörelse med den relativa farten v är till beloppet som störst $2\omega v$. Om man kräver att den skall vara högst αg fås alltså relationen $2v\sqrt{\frac{g}{R}} < \alpha g$, dvs.

$$R > \frac{4v^2}{\alpha^2 g}\,.$$

Insättning av de numeriska värdena ger

$$R > \frac{4 \times 25}{0.01 \times 10}\ \text{m} = 1\ \text{km}\,.$$

4. Snurrans tröghetsmatris i ett system där ζ-axeln ligger längs snurrans axel är

$$\mathbf{I}_O = \text{diag}(\frac{1}{4}mr^2 + mR^2, \frac{1}{4}mr^2 + mR^2, \frac{1}{2}mr^2)\,.$$

Rotationsvektorn är $\vec{\omega} = \Omega \sin\theta \hat{\xi} + (\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}$, där Ω är precession och ν spinn. Därför är

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_O\vec{\omega} = (\frac{1}{4}mr^2 + mR^2)\Omega\sin\theta\hat{\xi} + \frac{1}{2}mr^2(\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}\,.$$

Det enda tidsberoendet ligger i basvektorerna, som tidsutvecklas enligt

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\xi} = \Omega\cos\theta\hat{\eta}\,,\\ \dot{\hat{\zeta}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\zeta} = -\Omega\sin\theta\hat{\eta}\,.\end{aligned}$$

Insättning av detta i $\dot{\vec{L}}_O$ och användande av $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O = -mgR\sin\theta\hat{\eta}$ leder till relationen

$$\nu + 2\left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{1}{4}\right)\Omega\cos\theta = \frac{2gR}{r^2\Omega}\,.$$

(En liten kontroll fås genom att observera att den andra termen, som kommer från tidsberoendet av den del av $\vec{L}$ som härrör från precessionen, försvinner precis då $\frac{R}{r} = \frac{1}{2}$, dvs. då tröghetsmatrisen är $\frac{1}{2}mr^2\text{diag}(1,1,1)$.)

5. Partikeln har en hastighet $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s}$. Lagrangefunktionen blir

$$L = \frac{1}{2}m\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2\dot{s}^2 - V(\vec{r}(s))\,.$$

Lagranges ekvationer säger då

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{s}} - \frac{dL}{ds}\\ &= \frac{d}{dt}\left(m\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2\dot{s}\right) - \frac{1}{2}m\frac{d}{ds}\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2\dot{s}^2 + \frac{d}{ds}V(\vec{r}(s))\\ &= m\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2\ddot{s} + m\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\dot{s}^2 + \nabla V\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\,.\end{aligned}$$

Om man väljer s som båglängden är $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ och $\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0$. Rörelseekvationen förenklas till

$$m\ddot{s} = -\nabla V\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\,.$$

Accelerationen i kurvans tangentriktning är lika med kraftens komponent i denna riktning.

6. Se kompendiet.