Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521 (och FFM520)
Fredagen 3 juni 2016, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Emil Ryberg, tel. 0730-946240, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Samma uppgifter och regler gäller för FFM520 och FFM521.

Tentamen består av en obligatorisk del (uppg. 1-4) och en överbetygsdel (uppg. 5 och 6). Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 16 poäng på den obligatoriska delen. Om betyg 3 uppnåtts rättas även överbetygsdelen. Gränser för betyg 4 och 5 är 36 resp. 48 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

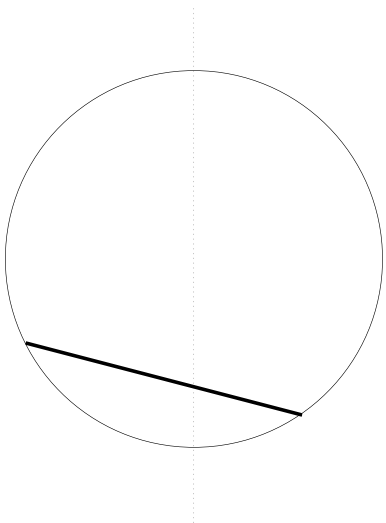
Lycka till!

Obligatorisk del

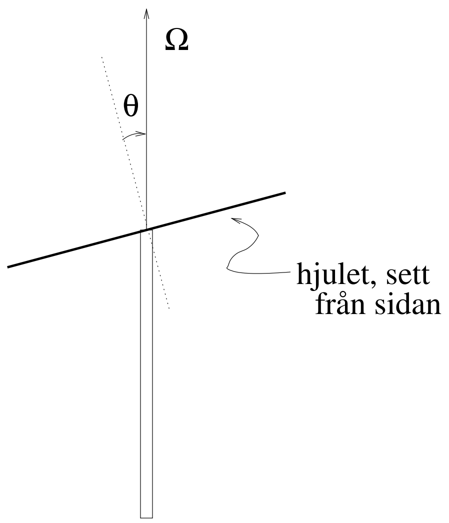
---

1. En stel kropp består av sex punktmassor, vardera med massan m, belägna i punkterna $\pm(2a, 0, 0)$, $\pm(0, a, 0)$ och $\pm(a, 0, -\sqrt{3}a)$ (angivna i ett ortogonalt kroppsfixt system). Massorna hålls samman av pinnar med försumbar massa. Bestäm kroppens huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment.

2. En homogen stav med längden ℓ rör sig under inverkan av gravitationen. Stavens ändar glider friktionsfritt på en vertikalt ställd cirkel med radien R så att rörelsen blir en rotation runt cirkelns mittpunkt. Skriv upp en rörelseekvation för staven, och lös den för små svängningar kring det stabila jämviktsläget. För vilket värde på den dimensionslösa parametern $\alpha = \frac{\ell}{2R}$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ blir vinkelfrekvensen störst?



3. Ett hjul i form av en tunn cirkelskiva är fästat i sitt nav på en vertikal stång som roterar med vinkelhastigheten Ω. Hjulets symmetriaxel bildar en konstant vinkel θ med vertikalen. Hur fort, och åt vilket håll, skall hjulet i sin tur spinna runt sin symmetriaxel för att det inte skall uppstå något moment i fästpunkten mellan stång och nav?



4. En massa är upphängd i en (ideal) fjäder i ett tak, och rör sig endast vertikalt. Den påverkas, förutom av tyngdkraften och fjäderkraften, av en oscillerande kraft $F = F_0 \cos \omega t$. Om massan initialt är i vila i jämviktsläget (dvs. det jämviktsläge den skulle ha haft i frånvaro av F) och ω sammanfaller med systemets resonansfrekvens ω_0, bestäm massans läge som funktion av tiden. Visa också hur denna lösning kan förstås i termer av interferens då ω ligger nära resonansfrekvensen.

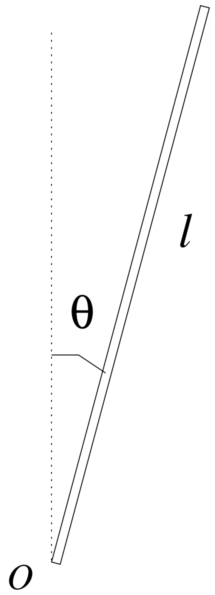
Överbetygsdel

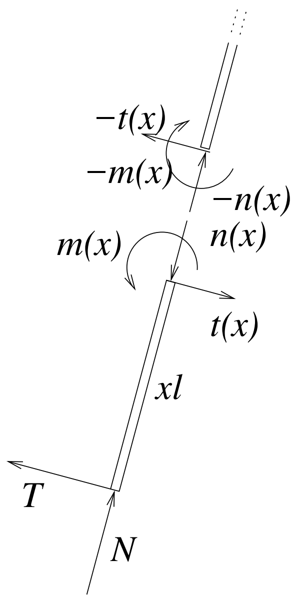
---

5. Ett sfär med radien R roterar med konstant vinkelhastighet Ω runt en fix axel. Ett tangentplan till sfären är i kontakt med den i en punkt vars ortvektor bildar den konstanta vinkeln θ med rotationsaxeln. Denna punkt, och därmed tangentplanet, följer med sfären i dess rotation. Använd Lagranges formalism för att härleda rörelseekvationer för en partikel som kan röra sig i tangentplanet. Kontrollera särskilt att Corioliskraften blir riktig.

6. En mycket smal glasstav är friktionsfritt fästad i en punkt på ett bord, och kan rotera kring denna punkt. Staven har längden ℓ och massan per längdenhet ϱ, och kan betraktas som en stel kropp. Den är dock skör, och går av då den utsätts för ett för stort vridande moment m. Antag att staven släpps från vila nära sitt upprättstående läge (det labila jämviktsläget). Bestäm det största vridande moment som uppstår i staven under fallet från $\theta \approx 0$ till $\theta = \frac{\pi}{2}$, och ange för vilket värde på θ och var på staven det uppstår.

   Kommentar: Under rörelsen kommer det, förutom moment $m(x)$, att uppstå tryckkraft $n(x)$ och skjuvkraft $t(x)$; samtliga beror av positionen x längs staven (se figuren). Man kan dock ganska enkelt argumentera för att det är momentet som är kritiskt för huruvida staven går av — det måste komma från en kraftfördelning över tvärsnittsytan där kraften per areaenhet är mycket större än dem som härrör från tryck- och skjuvkrafterna. Detta ligger dock utanför uppgiftens ram.

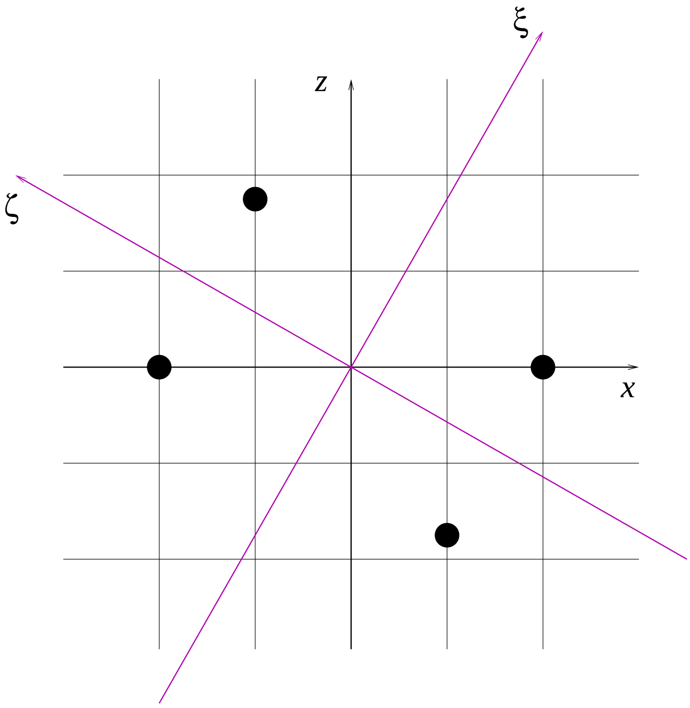




Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Torsdagen 3 juni 2016
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. För enkelhets skull kan vi betrakta punktmassor med massan 1 i punkterna $\pm(2,0,0)$, $\pm(0,1,0)$ och $\pm(1,0,-\sqrt{3})$, och till slut multiplicera resultatet med ma^2. Alla massorna ligger antingen på y-axeln eller i xz-planet. Det enda möjligt nollskilda deviationsmomentet är I_{xz}. y-axeln är redan en huvudtröghetsaxel. Om vi tittar på de fyra massorna som ligger i xz-planet ser det ut såhär:



Punkterna bildar en rektangel. Symmetrin gör att man kan läsa av huvudtröghetsaxlarna, det är ξ- och ζ-axlarna i figuren (roterade $\frac{\pi}{3}$ från de ursprungliga). Alla fyra massorna ligger på avståndet $\sqrt{3}$ från ξ-axeln, 1 från ζ-axeln, och 2 från y-axeln. De två resterande massorna på y-axeln har förstås avståndet 1 till både ξ- och ζ-axlarna. I $\xi y\zeta$-systemet är tröghetsmatrisen diagonal, med elementen $I_{\xi\xi} = 14$, $I_{yy} = 16$, $I_{\zeta\zeta} = 6$.

Alternativt skriver man upp tröghetsmatrisen i det givna systemet och diagonalierar med standardmetod.

2. Tröghetsmomentet m.a.p. cirkelns mittpunkt är, m.h.a. Steiners sats,

$$I_O = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(R^2 - \frac{\ell^2}{4}\right) = m\left(R^2 - \frac{\ell^2}{6}\right) .$$

Tyngdkraften ger ett återförande vridmoment $mg\sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}}\sin\theta$, där θ är vinkeln från det stabila (nedre) jämviktsläget. Rörelseekvationen blir alltså

$$m\left(R^2 - \frac{\ell^2}{6}\right)\ddot{\theta} = -mg\sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}}\sin\theta\,.$$

För små svängningar är $\sin\theta \approx \theta$, och man kan läsa av vinkelfrekvensen,

$$\omega^2 = g\frac{\sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}}}{R^2 - \frac{\ell^2}{6}} = \frac{g}{R}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1 - \frac{2}{3}\alpha^2}\,.$$

Detta maximeras då $\alpha^2 = \frac{1}{2}$. $\frac{R\omega^2}{g}$ tar värdet 1 då $\alpha = 0$, ökar till maxvärdet $\frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.06$ och går mot 0 då $\alpha \to 1$.

3. Rörelsen är en reguljär precessionsrörelse, och eftersom man vill anpassa precession och spinn till varandra så att inget moment behövs, måste rörelsemängdsmomentet vara konstant, dvs. riktat vertikalt. I ett system $\xi\eta\zeta$, där ζ-axeln är symmetriaxeln, är tröghetsmatrisen $ma^2\,\mathrm{diag}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Rotationsvektorn kan skrivas

$$\vec{\omega} = \nu\hat{\zeta} + \Omega(\hat{\zeta}\cos\theta - \hat{\xi}\sin\theta)\,,$$

där $\hat{\zeta}$ pekar uppåt längs symmetriaxeln i figuren, och $\hat{\xi}$ nedåt åt vänster längs skivan. Rörelsemängdsmomentet blir då

$$\vec{L} = \frac{1}{4}ma^2\left[-\hat{\xi}\Omega\sin\theta + 2\hat{\zeta}(\nu + \Omega\cos\theta)\right]\,.$$

Om det skall peka längs vertikalen är kvoten av ζ- och ξ-komponenterna $-\cot\theta$, dvs.

$$\cot\theta = \frac{2(\nu + \Omega\cos\theta)}{\Omega\sin\theta}\,.$$

Resultatet är att $\nu = -\frac{1}{2}\Omega\cos\theta$.

4. Tyngdkraften är oväsentlig; den förskjuter bara jämviktsläget. Rörelseekvationen för massan blir

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t\,,$$

där $f = \frac{F_0}{m}$, och $\omega = \omega_0$ Homogenlösningarna är som vanligt

$$x_h(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t\,.$$

Hade man haft $\omega \neq \omega_0$ hade partikulärlösningen varit

$$x_p(t) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t\,.$$

Nu blir den istället

$$x_p(t) = \frac{f}{2\omega}t\sin\omega t\,,$$

vilket kan verifieras genom insättning. Partikulärlösningen har $x_p(0) = 0$, $\dot{x}_p(0) = 0$, och är alltså den sökta lösningen.

Om man utgår från samma begynnelsevärdesproblem då $\omega \neq \omega_0$, får man

$$x(t) = \frac{f}{\omega^2 - \omega_0^2}(\cos\omega_0 t - \cos\omega t)\,.$$

Man kan analysera detta för $\omega \approx \omega_0$ genom att skriva $\omega = \frac{\omega+\omega_0}{2} + \frac{\omega-\omega_0}{2}$, $\omega_0 = \frac{\omega+\omega_0}{2} - \frac{\omega-\omega_0}{2}$, och expandera cosinus av en summa. Då får man

$$x(t) = \frac{2f}{\omega^2 - \omega_0^2} sin\frac{\omega+\omega_0}{2}t \sin\frac{\omega-\omega_0}{2}t\,.$$

Detta beskriver interferensen av svängningarna med de två frekvenserna som två faktorer. Den andra sinusfunktionen är en modulerande amplitud (envelopp), som då $\omega \approx \omega_0$ är mycket långsammare än den första faktorn. Då $\omega \to \omega_0$ kan man (för vilken tid t som helst) ta ett gränsvärde. Endast den linjära termen i den andra sinusfaktorn bidrager då, och resultatet blir precis det önskade,

$$\lim_{\omega\to\omega_0} x(t) = \frac{f}{2\omega} t \sin\omega t\,.$$

5. Inför koordinater ξ, η i planet så att $\hat{\xi}$ pekar österut och $\hat{\eta}$ norrut (då man befinner sig i $\xi = \eta = 0$, där planet tangerar sfären). Inför också en riktning $\hat{\zeta}$ rakt upp. Om man låter planet beskrivas av $\zeta = R$ och alltså $\vec{r} = \xi\hat{\xi} + \eta\hat{\eta} + R\hat{\zeta}$, så är $\dot{\vec{r}} = \dot{\xi}\hat{\xi} + \dot{\eta}\hat{\eta} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$, där $\vec{\Omega} = \Omega(\hat{\xi}\sin\theta + \hat{\zeta}\cos\theta)$. Då får man hastigheten för en partikel som rör sig i planet som

$$\vec{v} = \hat{\xi}(\dot{\xi} - \Omega\eta\cos\theta) + \hat{\eta}(\dot{\eta} + \Omega\xi\cos\theta - \Omega R\sin\theta) + \hat{\zeta}\Omega R\sin\theta\,.$$

Den kinetiska energin ges alltså av

$$\frac{2T}{m} = (\dot{\xi} - \Omega\eta\cos\theta)^2 + (\dot{\eta} + \Omega\xi\cos\theta - \Omega R\sin\theta)^2 + (\Omega R\sin\theta)^2\,.$$

Använd $L = T$. Lagranges ekvationer blir

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(\dot{\xi} - \Omega\eta\cos\theta) - \Omega\cos\theta(\dot{\eta} + \Omega\xi\cos\theta - \Omega R\sin\theta) \\
&= \ddot{\xi} - 2\Omega\cos\theta\dot{\eta} - \Omega^2\cos^2\theta\xi + \Omega^2 R\sin\theta\cos\theta\,, \\
0 &= \frac{d}{dt}(\dot{\eta} + \Omega\xi\cos\theta - \Omega R\sin\theta) + \Omega\cos\theta(\dot{\xi} - \Omega\eta\cos\theta) \\
&= \ddot{\eta} + 2\Omega\cos\theta\dot{\xi} - \Omega^2\cos^2\theta\eta\,.
\end{aligned}$$

Termerna $-2\Omega\cos\theta\dot{\eta}$ och $2\Omega\cos\theta\dot{\xi}$ representerar Coriolisaccelerationen. De kan kombineras till

$$2\Omega\cos\theta(-\dot{\eta}\hat{\xi} + \dot{\xi}\hat{\eta}) = 2\Omega\cos\theta\hat{\zeta} \times (\dot{\xi}\hat{\xi} + \dot{\eta}\hat{\eta})\,.$$

6. För att få reda på momentet i pinnen behöver man "ta isär" den; de inre krafterna och momenten skall vara precis de som gör att *en del av* pinnen faller lika fort som *hela* pinnen. Använd referensriktningar och beteckningar enligt figurerna i uppgiften.

Tröghetsmoment kring O för en stav med längden $x\ell$ är $\frac{1}{3}\varrho x^3\ell^3$. Det vridande momentet från tyngdkraften är $\frac{1}{2}\varrho g x^2\ell^2\sin\theta$. Delen av pinnen rör sig då enligt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\varrho x^3\ell^3\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\varrho g x^2\ell^2\sin\theta + x\ell t(x) - m(x)\,,\\
&\varrho x\ell\cdot\frac{1}{2}x\ell\ddot{\theta} = -T + t(x) + \varrho g x\ell\sin\theta\,,
\end{aligned}$$

där den första ekvationen är momentekvation, och den andra masscentrums acceleration i θ-led. (Den andra ekvationen kommer att behövas, eftersom den första, som skulle kunna bestämma $m(x)$, också innehåller $t(x)$. Det finns också en ekvation för accelerationen i radiell led, som inte behövs.)

Då $x = 1$ gäller ekvationerna hela pinnen, och då är $t(1) = 0$, $m(1) = 0$. Man får

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\varrho\ell^3\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\varrho g\ell^2\sin\theta\,,\\
&\frac{1}{2}\varrho\ell^2\ddot{\theta} = -T + \varrho g\ell\sin\theta\,.
\end{aligned}$$

Nu frågas det inte efter hur pinnen faller, utan det intressanta är att bestämma $m(x)$ (som också är en funktion av θ). Insättning av lösningen för $\ddot{\theta}$ och T,

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{3g}{2\ell}\sin\theta\,,\\
T &= \frac{1}{4}\varrho g\ell\sin\theta\,,
\end{aligned}$$

i de tidigare ekvationerna ger

$$\begin{aligned}
t(x) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-3x)\varrho g\ell\sin\theta\,,\\
m(x) &= \frac{1}{4}x(1-x)^2\varrho g\ell^2\sin\theta\,.
\end{aligned}$$

Det maximala momentet längs pinnen är för $x = \frac{1}{3}$ (för alla vinklar). Störst är det då $\theta = \frac{\pi}{2}$, då det blir $\frac{1}{27}\varrho g\ell^2$.