Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521 och FFM520
Onsdagen 6 april 2016, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Joel Magnusson, ankn. 3708, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Samma uppgifter och regler gäller för FFM520 och FFM521.

Tentamen består av en obligatorisk del (uppg. 1-4) och en överbetygsdel (uppg. 5 och 6). Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 16 poäng på den obligatoriska delen. Om betyg 3 uppnåtts rättas även överbetygsdelen. Gränser för betyg 4 och 5 är 36 resp. 48 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

Obligatorisk del

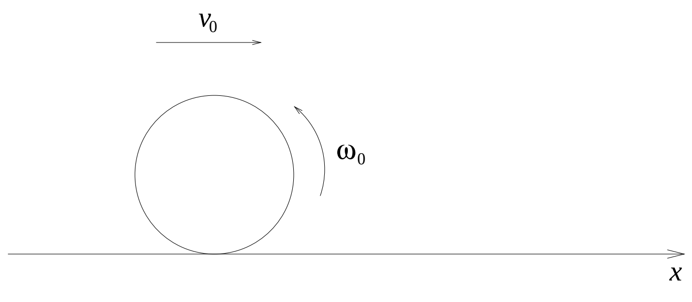
---

1. En stel kropp med densiteten ρ har formen av en rak cirkulär kon med höjden h och radien för basen r. Bestäm huvudtröghetsmomenten för kroppen m.a.p. dess masscentrum. (En komplett uträkning krävs, eventuella formler för kroppen ifråga får ej användas.)

2. Vid en bågskyttetävling är avståndet till målet (tavlan) 90 m. Pilarna har en utgångsfart på c:a 75 m/s. Tavlan är 120 cm bred, och den innersta cirkeln, som ger högsta poäng, har diametern 12 cm. Avgör huruvida Corioliskraften är väsentlig. (Bör man t.ex. kalibrera om sitt sikte mellan en tävling på norra halvklotet och en på södra halvklotet?)

3. En pendel består av en rak smal stav med massan m och längden ℓ. Dess ena ände är fästad i en punkt i taket, som rör sig horisontellt i en periodisk rörelse enligt $x(t) = A\sin\omega_0 t$. Staven rör sig endast i planet som spänns av x-axeln och vertikalen. Kalla pendelns utslagsvinkel θ. Bestäm $\theta(t)$ för små svängningar om begynnelsevillkoren är $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Vad händer då ω_0 sammanfaller med pendelns egenfrekvens?

4. Ett biljardklot stöts till så att det har en horisontell begynnelsehastighet v_0 i x-led och en rotationshastighet ω_0. Friktionskoefficienten mellan klotet och biljardbordet är μ. Rotationsvektorn är riktad så att klotet bromsas utan att svänga. Bestäm klotets läge $x(t)$ för $t > 0$ om $x(0) = 0$. Under vilka omständigheter vänder klotet tillbaka? (Friktionen vid rullning kan försummas.)



Överbetygsdel

5. Kroppen i uppgift 1 utför reguljär precessionsrörelse under inverkan av tyngdkraften. Den står på sin spets på ett bord, och vinkeln mellan vertikalen och kroppens symmetriaxel är θ (konstant). Bestäm sambandet mellan spinn- och precessionshastigheterna.

6. En liten kula glider utan friktion, men under påverkan av tyngdkraften) i en rotationssymmetrisk "skål" som har formen av en rotationsparaboloid, dvs. i cylindriska koordinater $z = k\varrho^2$. z-axeln är riktad vertikalt. Skriv upp Lagranges ekvationer för rörelsen. Sök en konserverad storhet för att eliminera vinkelrörelsen och få en differentialekvation för $\varrho(t)$.

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Onsdagen 6 april 2016
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. I ett koordinatsystem dr konens spets ligger i origo, och dess symmetriaxel är z-axeln, kan konen beskrivas som området $0 \leq z \leq h$, $0 \leq \varrho \leq \frac{r}{h}z$. Dess volym är $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, och alltså är $m = \rho V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho$. Om vi inför medelvärdet av en storhet Q som $<Q>= \frac{1}{V}\int_V Q\,dV$, så fås masscentrums läge som $\bar{z} =<z>= \frac{3}{4}h$. På grund av kroppens symmetri är koordinataxlarna huvudtröghetsaxlar. Vi har också de kvadratiska momenten $<x^2>=<y^2>= \frac{3}{20}r^2$, $<z^2>= \frac{3}{5}h^2$, och alltså $<(z-\bar{z})^2>=<z^2> - <z>^2= \frac{3}{80}h^2$. Tröghetsmomenten m.a.p. axlar genom masscentrum bli $\bar{I}_x = \bar{I}_y = m(<x^2> + <(z-\bar{z})^2>) = \frac{3}{80}m(4r^2+h^2)$, $\bar{I}_z = \frac{3}{10}mr^2$.

2. Det tar storleksordningen 1 s för pilen att komma till tavlan. Under den tiden hinner jorden vrida sig en vinkel ungefär 10^{-4}. Vinkelprecisionen som krävs i skyttet är ungefär 10^{-3}. Antagligen är Corioliseffekten försumbar jämfört med annat "brus". (Man kan förstås räkna explicit på Corioliskraften.)

3. Betrakta staven i ett accelererat system, där upphängningspunkten är i vila. I detta system får man inkludera en fiktiv kraft $\vec{F} = -\ddot{x}\hat{x} = mA\omega_0^2 \sin\omega_0 t\,\hat{x}$. Momentekvationen kring upphängningspunkten lyder då
$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + mA\omega_0^2\sin\omega_0 t\frac{\ell}{2}\cos\theta\,,$$
dvs. för små vinklar,
$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\theta = \frac{3A\omega_0^2}{2\ell}\sin\omega_0 t\,.$$
Lösningen består av en homogenlösning och en partikulärlösning, $\theta = \theta_h + \theta_p$, där
$$\begin{aligned}\theta_p(t) &= \frac{\frac{3A\omega_0^2}{2\ell}}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega_0 t\,,\\ \theta_h(t) &= B\sin\omega t + C\sin\omega t\,,\end{aligned}$$
med $\omega^2 = \frac{3g}{2\ell}$. Konstanterna B och C bestäms av begynnelsevillkoren, med resultatet
$$\theta(t) = \frac{3A}{2\ell}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t\right)\,.$$
För att approximationen skall vara giltig krävs att detta är mycket mindre än 1 för alla tider. Om A är för stor gäller lösningen inte, och inte heller om ω_0 ligger för nära ω. I det senare fallet har man resonans, och amplituden växer initialt linjärt med tiden.

4. Med positiv referensriktning för hastigheten åt höger och för vinkelhastigheten medurs får man ekvationer för masscentrums translation resp. rotation runt masscentrum:
$$\begin{aligned}m\dot{v} &= -\mu mg\,,\\ \frac{2}{5}ma^2\dot{\omega} &= \mu mga\,.\end{aligned}$$

så hastigheten och vinkelhastigheten blir

$$\begin{aligned} v &= v_0 - \mu g t\,, \\ \omega &= -\omega_0 + \frac{5\mu g}{2a} t\,. \end{aligned}$$

Denna lösning gäller så länge glidning råder. När $r\omega = v$ börjar klotet rulla. Kalla tiden då det inträffar τ. Man får $\tau = \frac{2}{7}\frac{v_0 + a\omega_0}{\mu g}$, och $v(\tau) = \frac{1}{7}(5v_0 - 2a\omega_0)$. Klotet vänder tillbaka om $5v_0 - 2a\omega_0 < 0$. Läget som funktion av tiden blir

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2\,, & t \le \tau\,; \\ v_0\tau - \frac{1}{2}\mu g \tau^2 + v(\tau)(t-\tau)\,, & t \ge \tau\,. \end{cases}$$

5. Se sid. 564 i Meriam–Kraige.

6. Låt $\kappa = \frac{1}{2}k$. Då är $\dot{z} = \kappa\varrho\dot{\varrho}$, och den kinetiska energin blir

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\phi}^2 + \kappa^2\varrho^2\dot{\varrho}^2\right)\,,$$

och den potentiella $V = \frac{1}{2}mg\kappa\varrho^2$. Lagrangefunktionen ges av

$$\frac{L}{m} = \frac{1}{2}(1+\kappa^2\varrho^2)\dot{\varrho}^2 + \frac{1}{2}\varrho^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\kappa g\varrho^2\,.$$

Lagranges ekvationer blir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left[(1+\kappa^2\varrho^2)\dot{\varrho}\right] - \kappa^2\varrho\dot{\varrho}^2 - \varrho\dot{\phi}^2 + \kappa g\varrho\,, \\ 0 &= \frac{d}{dt}\left[\varrho^2\dot{\phi}\right]\,. \end{aligned}$$

Den senare ekv. uttrycker rörelsemängdsmomentets bevarande. Sätt $\ell = \varrho^2\dot{\phi}$. Insättning i den förra ekvationen ger

$$0 = (1+\kappa^2\varrho^2)\ddot{\varrho} + \kappa^2\varrho\dot{\varrho}^2 - \frac{\ell^2}{\varrho^3} + \kappa g\varrho\,.$$