

Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521 (gäller även för FFM520)

Fredagen 5 juni 2015, 8.30-12.30

Examinator: Martin Cederwall

Jour: Martin Cederwall, ankn. 3181, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

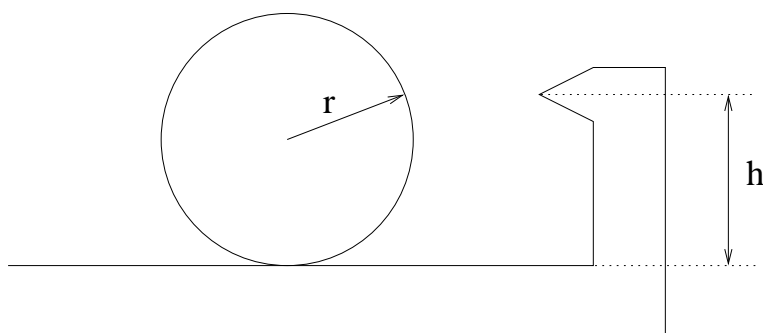
Tentamen består av en obligatorisk del (uppg. 1-4) och en överbetygsdel (uppg. 5 och 6). Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 16 poäng på den obligatoriska delen. Om betyg 3 uppnåtts rättas även överbetygsdelen. Gränser för betyg 4 och 5 är 36 resp. 48 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

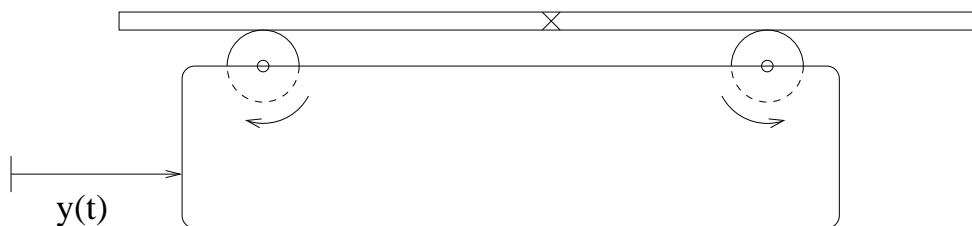
Lycka till!

Obligatorisk del

1. En liten pärla med massan m kan glida utan friktion längs en lång rak metalltråd. Tråden är horisontell (så att tyngdkraften blir oväsentlig för rörelsen) och roterar kring en fix vertikal axel genom en punkt på tråden ("origo") med den konstanta vinkelhastigheten ω . Om pärlan passerar origo vid tiden $t = 0$ med farten u , bestäm dess position på tråden som funktion av tiden under den efterföljande rörelsen. Bestäm också den horisontella delen av normalkraften från tråden under rörelsen, dels som funktion av tiden, dels som funktion av läget.
2. En tillverkare av biljardbord vill designa ett bord så att om en biljardboll kommer rullande vinkelrätt mot sargen (kanten på bordet), studsar mot den och vänder tillbaka, så rullar bollen utan glidning även efter studsens mot sargen. Detta skall inte bero på friktionskraften från bordsytan, eftersom den inte hinner utöva tillräckligt vridmoment under den mycket korta tid en studs mot sargen tar. Bollarna är homogena klot med radien r . Hur hög skall sargens höjd h (se figuren) vara för att den önskade egenskapen skall uppnås? (Det får förutsättas att sargen påverkar bollen med en rent horisontell kraft, vilket möjligen inte är realistiskt.)



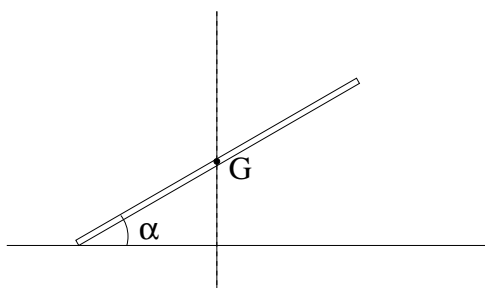
3. En homogen plank med massan m är horisontellt upplagd på två roterande rullar, som snurrar snabbt med konstant rotationshastighet i de riktningar figuren visar. Avståndet mellan rullarna är $2d$. Friktionskoefficienten mellan plankan och rullarna är μ . Hela anordningen utsätts för en horisontell vibration $y(t) = a \cos \omega t$. För vilket ω uppstår resonans i plankans rörelse?



4. När man cyklar i en kurva behöver man luta inåt i kurvan för att kompensera centrifugalkraften. Det finns dessutom en effekt som kommer sig av att hjulens rotationsriktning ändras då man svänger. Gör den att man behöver luta mer eller mindre, jämfört med den lutning som behövs p.g.a. centrifugalkraften? Gör en grov uppskattning i en realistisk situation för att ta reda på om inverkan av hjulens rotation är försumbar i jämförelse med centrifugalkraften eller ej.

Överbetygsdel

5. Betrakta en partikel med massan m som är tvungen att röra sig på ytan av en sfär med radien a . Antag att det finns en potential $V(\theta)$, där θ är vinkeln från z -axeln. Skriv ned Lagranges ekvationer för partikelns rörelse. Finns det några konserverade storheter, förutom energin? Betrakta nu speciellt fallet $V(\theta) \equiv 0$. En rörelse som ganska uppenbart är möjlig (visa det!) är $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(t) = \Omega t$, där Ω är en konstant. Lös ekvationerna för små svängningar i θ kring denna bana, och tolka resultatet.
6. Ett mynt, vars geometri kan approximeras med en cirkelskiva med radien r , rullar utan glidning på en bordsyta på ett sätt så att myntet bildar den konstanta vinkeln α med den horisontella ytan och myntets masscentrum är i vila. Rörelsen kan ses som en reguljär precessionsrörelse, där precessionshastigheten Ω är vinkelhastigheten för kontaktpunktens vinkelhastighet runt en cirkel på bordet. Vilken relation mellan Ω och α skall gälla för att denna typ av rörelse skall kunna äga rum? Uppskatta Ω för en svensk 1-krona med radie 25 mm, då $\alpha = 30^\circ$.



Lösningförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521

Fredagen 5 juni 2015

Examinator: Martin Cederwall

Lösningförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Låt koordinaten längs tråden vara ξ , och använd $\hat{\eta}$ för den horisontella riktning som är vinkelrät mot $\hat{\xi}$. Den vertikala riktningen är $\zeta = z$. Ortvektorn för pärlan är $\vec{r} = \xi\hat{\xi}$. Man kan antingen derivera detta två gånger, under användande av $\dot{\hat{\xi}} = \omega\hat{z} \times \hat{\xi} = \omega\hat{\eta}$, eller så använder man de färdiga uttrycken för centripetalacceleration/centrifugalkraft och Coriolisacc./Corioliskraft. I vilket fall fås ekvationerna för rörelsen i ξ - resp. η -led:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\xi} - \omega^2\xi) &= 0, \\ 2m\omega\dot{\xi} &= N, \end{aligned}$$

där N är normalkraften från tråden (i η -led). Den allmänna lösningen är $\xi(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. Insättning av begynnelsevärdena bestämmer $A = -B = \frac{u}{2\omega}$, så att

$$\xi(t) = \frac{u}{\omega} \sinh \omega t.$$

(Kontroll: för små tider, alternativt liten rotationshastighet, dvs. $\omega t \ll 1$, blir $\xi(t) \approx ut$.) Normalkraften blir då

$$N = 2m\omega u \cosh \omega t = 2m\omega u \sqrt{1 + \left(\frac{\omega\xi}{u}\right)^2}.$$

(För stora tider ($\omega t \gg 1$) är den exponentiellt avtagande delen av \cosh och \sinh liten, och $N \approx 2m\omega^2\xi$, oberoende av begynnelsevillkoren.)

2. Stöten tar mycket kort tid, så impuls och impulsmoment från kontaktkrafter från bordet kan försummas. Om en horisontell kraft F verkar på höjden h , fås ekvationerna för masscentrums acceleration a och vinkelaccelerationen:

$$\begin{aligned} ma &= F, \\ \frac{2}{5}mr^2\alpha &= (h - r)F. \end{aligned}$$

Elimination av F ger $\frac{2}{5}r^2\alpha = (h - r)a$. Om rullning hela tiden skall ske, måste a och α relateras enligt $a = r\alpha$. Detta uppfylls om $h = \frac{7}{5}r$. (Skulle kraften istället vara riktad radiellt, är dess vridande moment kring masscentrum noll. Å andra sidan kan kontaktkrafterna inte längre försummas, så hela resonemanget blir mer komplicerat, och kan bero på friktionskoefficienten.)

3. Beteckna plankans läge med x , masscentrums förflyttning från punkten mittemellan rullarna. Låt normalkrafterna från rullarna vara N_1 och N_2 . Jämvikt i vertikalled och momentjämvikt ger

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= mg, \\ N_1(d + x) - N_2(d - x) &= 0, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{d}\right) mg, \\ N_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{d}\right) mg. \end{aligned}$$

Hade det inte varit för den horisontella vibrationen hade rörelseekvationen för plankans rörelse i x -led blivit

$$m\ddot{x} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{d}\right) \mu mg - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{d}\right) \mu mg = -\frac{\mu mg}{d} x.$$

Lösningarna är harmonisk svängningsrörelse med vinkelfrekvens $\omega_n = \sqrt{\frac{\mu g}{d}}$. Om nu systemet dessutom utsätts för vibrationen med vinkelfrekvens ω , kan den introduceras som en tröghetskraft. Resonans uppstår då $\omega = \omega_n$.

4. Cykelns hjul kommer att ha rörelsemängdsmoment som är riktade åt vänster. Låt säga att man svänger åt vänster. Då kommer dessa rörelsemängdsmoment att ändras; deras tidsderivata är riktad bakåt. Detta måste åstadkommas av ett vridmoment. Kombinationen tyngdkraft och normalkraft ger ett moment med rätt riktning om man lutar åt vänster, alltså inåt i kurvan (för högersväng gäller motsvarande argument med omkastade riktningar). Effekten av hjulens rotation samverkar alltså med effekten av centrifugalkraften, i meningen att man behöver luta mer.

En mycket grov uppskattning: Man cyklar med fart v i en kurva med radie R . Massan av cykel och cyklist är M . Låt hjulens massa vara m och deras radie r . Då är deras rörelsemängdsmoment ungefär $mr^2 \cdot \frac{v}{r} = mrv$. De förändras med vinkelhastigheten $\frac{v}{R}$, så storleken av deras tidsderivata är ungefär $\frac{mrv^2}{R}$. Det vridande momentet från kombinationen av centrifugalkraften och den motriktade kraften från marken är ungefär $\frac{Mv^2}{R}h$, där h är masscentrums höjd. Dessa två moment kan jämföras med varandra, och deras kvot (som blir ett mått på hur stor effekten av hjulens vridning är relativt den av centrifugalkraften) blir $\frac{mrv^2}{R} \left(\frac{Mv^2}{R}h\right)^{-1} = \frac{m}{M} \frac{r}{h}$. Normalt sett är hjulens massa en ganska liten del av den totala massan, dessutom är masscentrum högre beläget än hjulradien, så den "extra" effekten i uppgiften är ganska liten.

Skall man vara mer noggrann får man ta hänsyn till att rörelsemängdsmomenten inte pekar horisontellt när cykeln lutar, etc.

5. Använd sfäriska koordinater θ, φ . Hastigheten för partikeln är $\vec{v} = a(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi})$. Lagrangianen blir

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(\theta),$$

och Lagranges ekvationer ger

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(ma^2\dot{\theta}) - ma^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{d\theta}, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(ma^2\sin^2\theta\dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Den senare ekvationen uttrycker bevarandet av rörelsemängdsmomentet m.a.p. z -axeln. Låt denna rörelsekonstant betecknas $\ell = ma^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$. Då kan $\dot{\varphi}$ lösas ur denna ekvation och stoppas in i ekvationen för θ , som blir

$$0 = ma^2\ddot{\theta} - \frac{\ell^2}{ma^2} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{dV}{d\theta}.$$

Den givna rörelsen, $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(t) = \Omega t$, är uppenbarligen en lösning, med $\ell = ma^2\Omega$. Små ändringar $\theta = \frac{\pi}{2} + \epsilon$ hanteras m.h.a. $\sin(\frac{\pi}{2} + \epsilon) \approx 1$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon) \approx -\epsilon$. Den lineariserade ekvationen för $\epsilon(t)$ är $\ddot{\epsilon} + \left(\frac{\ell}{ma^2}\right)^2\epsilon = 0$, dvs. $\ddot{\epsilon} + \Omega^2\epsilon = 0$. Lösningarna är harmonisk rörelse med vinkelfrekvens Ω . Det är naturligt/nödvändigt/självklart att detta måste vara den rätta vinkelfrekvensen — i frånvaro av en potential rör sig partikeln på en storcirkel som avviker litet från ekvatorn. Hade inte vinkelfrekvensen matchat den i φ -rörelsen, hade det inte blivit en storcirkel.

6. Eftersom både kontaktpunkten och masscentrum är i momentan vila, roterar myntet momentant runt en axel som utgör myntets diameter genom dessa punkter. Rotationsvektorn är $\vec{\omega} = \Omega \sin \alpha \hat{\xi}$, där ξ -riktningen är längs diametern (snett uppåt åt höger i figuren). Denna riktning är en huvudtröghetsaxel för myntet, med tröghetsmoment $\frac{1}{4}mr^2$. Rörelsemängdsmomentet pekar alltså åt samma håll, och är $\vec{L} = \frac{1}{4}mr^2\Omega \sin \alpha \hat{\xi}$. Dess tidsderivata är

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \frac{1}{4}mr^2\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \hat{\eta},$$

där $\hat{\eta}$ pekar in i pappret i figuren. Detta skall åstadkommas av det vridande momentet (runt masscentrum) av normalkraften från bordet, som p.g.a. jämvikt i vertikalled har beloppet mg . Momentekvationen ger

$$\frac{1}{4}mr^2\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \hat{\eta} = mgr \cos \alpha \hat{\eta}.$$

Detta ger den sökta relationen

$$\Omega^2 = \frac{4g}{r \sin \alpha}.$$

Med $r \approx 25$ mm och $\alpha = \frac{\pi}{6}$ fås numeriskt $\Omega \approx 56 \text{ s}^{-1} \approx 8.9$ varv/s.