Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats:	Måndagen den 21 maj 2012 klockan 14.00-18.00 i M.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén, 031–772 3261.

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter. För att bli godkänd krävs minst 10 poäng på uppgifterna 1-4 (inklusive eventuella bonuspoäng). För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-6 plus eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna enligt följande gränser:
10-18 poäng ger betyg 3, 19-26 poäng ger betyg 4, 27+ poäng ger betyg 5.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

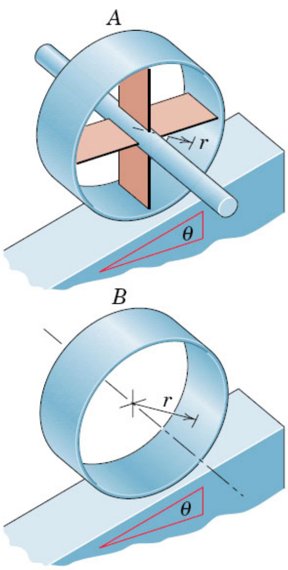
- För full (4 eller 6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag om orimligheten pekas ut; annars fullt poängavdrag.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lösningsförslag som är ofullständiga eller innehåller felaktigheter, men där en tydlig lösningsstrategi har presenterats, genererar i allmänhet det lägre av poängavdragen ovan.

Lycka till!

Obligatorisk del

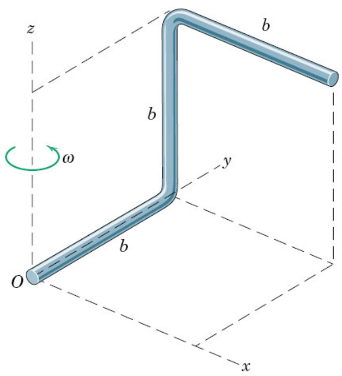
1. De två hjulen i figuren rullar nedför ett lutande plan (vinkel θ). Hjul A har hela massan m koncentrerad till mittaxeln med försumbar diameter. Hjul B har hela massan m koncentrerad till ytterkanten. Beräkna masscentrums hastighet för de två hjulen då de har färdats en sträcka x nerför planet med start från vila. Hjulen rullar utan glidning. *(4 poäng)*



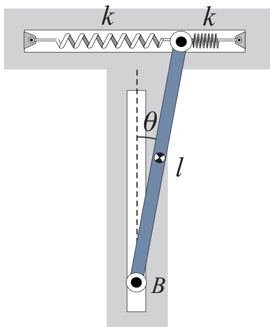
2. Den böjda staven med homogen linjedensitet ρ roterar runt z-axeln med konstant rotationshastighet ω.

   (a) Bestäm stavens rörelsemängdsmoment m.a.p. punkten O, uttryckt i det *kroppsfixa* koordinatsystemet $x - y - z$. *(2 poäng.)*

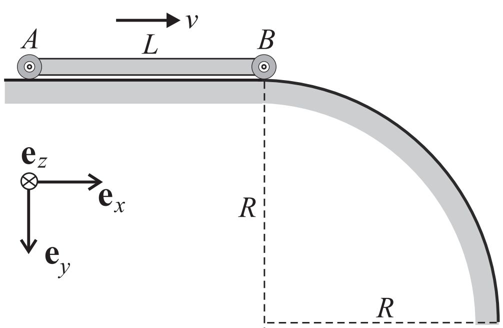
   (b) Bestäm stavens kinetiska energi. *(2 poäng.)*



3. En homogen stång AB med massan m och längden l kan röra sig friktionsfritt i ett vertikalplan enligt figuren. Änden A av stången är fäst i två lätta fjädrar vardera med fjäderkonstanten k. Fjädrarna är ospända då stången är vertikal. Uppställ rörelseekvationen för stången, linearisera denna samt bestäm perioden τ för små svängningar kring jämviktsläget. *(6 poäng.)*



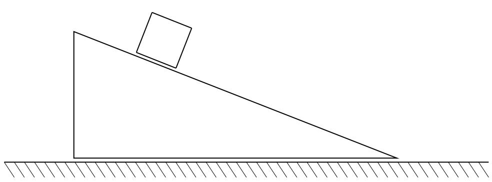
4. Betrakta en homogen stång AB med längden L och massan m med två små hjul i ändpunkterna som rullar med farten v längs en horisontell bana. Bestäm det minsta värdet på farten v som gör att framhjulet B lättar ($N_B = 0$) då det just har kommit in på den kvartscirkelformade delen av banan i den högsta punkten. Hur stor blir normalkraften N_A under bakre hjulet i detta ögonblick? Bortse från de små hjulens massa och dimensioner. *(6 poäng.)*



Överbetygsuppgifter

5. En rotationssymmetrisk kropp är upphängd i en punkt så att den kan rotera kring sin egen axel, samtidigt som axeln kan röra sig endast i ett vertikalt plan (pendelrörelse). Se figuren, där den högra bilden är sedd från höger i den vänstra. Figuren skall inte tolkas som en beskrivning av kroppens geometri, utöver rotationssymmetrin. Kroppen rör sig under inverkan endast av tyngdkrafter samt krafter i upphängningen, all friktion kan försummas. Låt kroppens rotationshastighet runt sin symmetriaxel vara ν, och vinkeln som symmetriaxeln bildar med vertikalen vara ϕ. Svara på följande: *(6 poäng.)*
   - Kommer ν att vara konstant under rörelsen?
   - Skiljer sig ϕ:s tidsberoende hos en sådan här pendel från det hos en pendel som inte spinner?
   - Beräkna, till storlek och riktning, det vridande momentet på kroppen från upphängningsanordningen, som funktion av ϕ och lämpliga införda konstanter.

6. En kloss med massa m glider nerför en kil (med massa M och vinkel α relativt horisontalaxeln) som i sin tur glider på en horisontell yta. Bestäm klossens acceleration relativt kilen. Försumma friktionen. *(6 poäng.)*



Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 21 maj 2012 klockan 14.00-18.00 i M.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. **Lösningsstrategi:**

   - Använd arbete-energi principen
   - Teckna uttryck för kinetisk och potentiell energi
   - Inget tillfört arbete eftersom hjulet rullar utan glidning. Hastighet erhålls omgående ut ovanstående framtagna uttryck.

   Hjulens masscentrum färdas en sträcka x nerför planet med lutning θ. Detta innebär en minskning av deras potentiella energi

   $$\Delta V = -mgx \sin \theta.$$

   Hjulen startar från stillastående. Vid rullningsrörelsen består den kinetiska energin av en translations- och en rotationsdel.

   $$\Delta T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2.$$

   Då hjulet rullar utan glidning har vi sambandet

   $$\bar{v} = \omega r.$$

   För hjul A gäller dessutom att $\bar{I} = 0$ då hela massan är koncentrerad till axelns genom masscentrum ($r = 0$). För hjul B gäller $\bar{I} = mr^2$.

   Ingen icke-konservativ kraft tillför arbete eftersom hjulet rullar utan glidning. För bägge hjulen gäller därför att $\Delta V + \Delta T = 0$.

   Detta ger oss slutligen svaren

   $$\bar{v}_A = \sqrt{2gx \sin \theta},$$
   $$\bar{v}_B = \sqrt{gx \sin \theta}.$$

2. **Lösningsstrategi:**

- Teckna ett uttryck för den böjda stavens totala rörelsemängdsmoment map O.
- Tröghetsmatrisen måste beräknas. Dela in i tre delar. Rita figurer med staven projicerad i xy-, xz-, yz-planen.
- Kinetisk energi fås från skalärprodukten av rotationsvektorn $\vec{\omega}$ med $\vec{L}_O$.

Då rotationen ligger i z-riktningen ($\vec{\omega} = \omega \hat{z}$) kommer rörelsemängdsmoment map O att vara

$$\vec{L}_O = \omega \left(-I_{xz}\hat{x} - I_{xy}\hat{y} + I_{zz}\hat{z} \right).$$

Delar in staven i tre delar (raka stavar i olika riktningar med längd b och massa $m = \rho b$) med del 1 närmast O.

Del	I_{xz}	I_{yz}	I_{zz}	
1	0	0	1/3	$\times \rho b^3$
2	0	1/2	1	$\times \rho b^3$
3	1/2	1	4/3	$\times \rho b^3$

där exempelvis I_{zz} bidraget från stavdel 3 räknas ut enligt

$$I_{zz,3} = \frac{1}{12}\rho b b^2 + \rho b \left(b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right) = \frac{4}{3}\rho b^3.$$

De relevanta tröghetsmatriselementen blir $I_{xz} = \rho b^3/2$, $I_{yz} = 3\rho b^3/2$, $I_{zz} = 8\rho b^3/3$. Slutligen blir det sökta rörelsemängdsmomentet

$$\vec{L}_O = \rho b^3 \omega \left(-\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{3}{2}\hat{y} + \frac{8}{3}\hat{z} \right).$$

Den kinetiska energin ges helt enkelt av

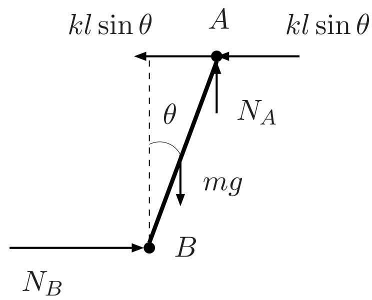
$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}_O = \frac{4}{3}\rho b^3 \omega^2,$$

eftersom vi har ren rotationsrörelse runt punkten O.

3. **Lösningsstrategi:**

   - Vi väljer bland flera angreppsvinklar: energiprincipen (inga icke-konservatva krafter uträttar arbete), vridmomentsekvationer map olika punkter eller Lagranges ekvationer.
   - Vi väljer att teckna kraft- och vridmomentsekvationerna och frilägger därför staven för en positiv utfallsvinkel θ.
   - Staven rör sig i planet men vi har bara en rörelsevariabel beroende på tvångsvillkoren på ändpunkterna. Speciellt kommer punkten B att vara fix för små vinklar.
   - Vi kommer därför att kunna teckna vridmomentsekvationen map B för att slippa bidraget från den okända normalkraften som verkar på den punkten.
   - Lös differentialekvationen.

   Definiera positiv rotationsriktning (medurs från vertikalaxeln) och rita en friläggning för ett positivt värde på θ. Skall innehålla fjäderkrafter från de två fjädrarna (vardera med storlek $kl\sin\theta$), tyngdkraft samt okänd normalkraft genom kontaktpunkterna A och B.



   Vi får kraft- och vridmomentsekvationerna

$$m\ddot{x}_{\rm cm} = N_B - 2kl\sin\theta,$$
$$m\ddot{y}_{\rm cm} = N_A - mg,$$
$$\bar{I}\ddot{\theta} = -N_A\frac{l}{2}\sin\theta - N_B\frac{l}{2}\cos\theta - 2kl\sin\theta\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right).$$

   I detta läge kan vi dock konstatera att $y_{\rm cm} = -l\cos\theta \approx l$ för små vinklar. Det betyder att $\ddot{y}_{\rm cm} = 0$ och följdaktligen att $N_A = mg$.

   Med $y_{\rm cm} \approx l$ för små utfallsvinklar kan alltså punkten B betraktas som fix och vi väljer därför att teckna vridmomentsekvationen map B

$$I_B\ddot{\theta} = mg\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right) - N_A l\sin\theta - 2kl\sin\theta\,(l\cos\theta)\,.$$

Tröghetsmomentet är $I_B = ml^2/3$ och $N_A = mg$ från ovan. För små vinklar finner vi alltså rörelseekvationen

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{6k}{m} + \frac{3g}{2l}\right)\theta = 0,$$

vilken uppenbarligen beskriver en harmonisk svängningsrörelse med periodtiden

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{6k}{m} + \frac{3g}{2l}}}.$$

Alternativ lösningsstrategi: Energiprincipen

- Inga icke-konservatva krafter uträttar arbete (normalkrafterna är riktade vinkelrät mot angreppspunkternas rörelse). Den totala mekaniska energin är konserverad.
- Teckna uttryck för kinetisk och potentiell energi. Sätt $E = T + V$ och finn lösningar till $dE/dt = 0$.

$$T = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}^2,$$
$$V = -mgy_{\text{cm}} + 2\frac{k}{2}(l\sin\theta)^2.$$

  Med $y_{\text{cm}} = \frac{l}{2}\cos\theta$ och $x_{\text{cm}} = \frac{l}{2}\sin\theta$ fås $v_{\text{cm}}^2 = \frac{l^2\dot{\theta}^2}{4}$ och energin blir

$$E = T + V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) - mg\frac{l}{2}\cos\theta + kl^2\sin^2\theta.$$

- Konserverad energi ger oss ekvationen

$$\frac{dE}{dt} = ml^2\dot{\theta}\left[\frac{\ddot{\theta}}{3} + \frac{g}{2l}\sin\theta + \frac{2k}{m}\sin\theta\cos\theta\right] = 0.$$

  Vi finner en (uppenbar) lösning då $\dot{\theta} = 0$ samt en då uttrycket i parantesen är noll.
- För små vinklar får vi differentialekvationen

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{3g}{2l} + \frac{6k}{m}\right]\theta = 0,$$

  vilket ger samma lösning som ovan.

4. **Lösningsstrategi:**

- Använd stelkroppskinematik för att finna uttryck för accelerationen hos punkterna A och B. Notera att punkten A rör sig med konstant hastighet.
- Relativ acceleration ger ett uttryck för masscentrums acceleration som kan användas för att teckna kraft- och vridmomentsekvationerna.
- Vi borde i slutändan ha två rörelseekvationer (med krafterna N_A och N_B) och ett villkor ($N_B = 0$) från vilket den sökta hastigheten kan lösas ut

Kinematiken ger ett uttryck för accelerationen hos punkterna A och B

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \frac{v^2}{R}\hat{y} \\ \vec{a}_A &= 0.\end{aligned}$$

Använder vi uttrycket för relativ acceleration kan vi skriva

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) = \frac{v^2}{R}\hat{y} + \alpha\hat{z} \times (-L\hat{x})$$

eftersom $\omega = 0$ i detta ögonblick. Då $\vec{a}_A = 0$ får vi sambandet

$$\alpha = \frac{v^2}{LR}.$$

På liknande sätt fås masscentrums acceleration

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{BG} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BG}) = \frac{v^2}{2R}\hat{y}.$$

Ett friläggningsdiagram skall innehålla tyngdkraften samt de två normalkrafterna på hjulen A och B. Kraftekvationen i y-led samt medurs vridmomentsekvation map masscentrum ger

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{2R} &= mg - N_A - N_B \quad \Rightarrow \quad N_A = mg - m\frac{v^2}{2R} - N_B \\ I_G\alpha &= (N_A - N_B)\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad N_B = m\left(\frac{g}{2} - \frac{v^2}{3R}\right).\end{aligned}$$

Den givna situationen att $N_B = 0$ ger den sökta hastigheten och normalkraften

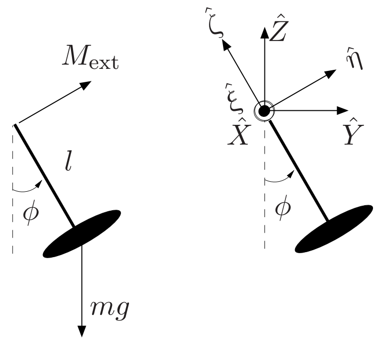
$$v = \sqrt{\frac{3gR}{2}}, \quad N_A = \frac{mg}{4}.$$

Överbetygsuppgifter

5. **Lösningsstrategi:**

   - Rita en tydlig figur med ett rumsfixt och ett kroppsfixt koordinatsystem. Teckna vrid- och rörelsemängdsmomentet relativt det kroppsfixa koordinatsystemet.
   - Teckna vridmomentsekvationerna i det kroppsfixa koordinatsystemet.
   - Försök identifiera rörelseekvationen som ger pendelrörelsen och se ifall spinnet är en faktor i denna.

   Se figur med friläggningsdiagram och definition av koordinataxlar. Notera att $\hat{X} = \hat{\xi}$. Det kroppsfixa systemet $\xi\eta\zeta$ följer med i pendelrörelsen men ej spinnet ($\vec{\nu} = -\nu\hat{\zeta}$); dvs det roterar med $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{\xi}$.



   Pendeln roterar fritt i ξ- och ζ-led i avsaknad av friktion. Detta innebär att vridmomentet från infästningen är riktad i η-led och det totala vridmomentet map denna punkt blir[1]

$$\vec{M}_O = -mgl\sin\phi\hat{\xi} + M_{\text{ext}}\hat{\eta}.$$

   Den totala rotationsvektorn består av spinnrörelsen runt huvudsymmetriaxeln plus pendelrörelsen

$$\vec{\omega} = \vec{\nu} + \vec{\Omega} = -\nu\hat{\zeta} + \dot{\phi}\hat{\xi}.$$

[1] Vi antar för enkelhets skull att all massa är koncentrerad till skivan. Detta antagande påverkar enbart längden på hävarmen för vridmomentet från tyngdkraften.

Tröghetsmatrisen är diagonal och rörelsmängdsmomentet blir

$$\vec{L}_O = I_{\xi\xi}\dot{\phi}\hat{\xi} - I_{\zeta\zeta}\nu\hat{\zeta}.$$

Vridmomentsekvationen blir

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{\xi\eta\zeta} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_O = I_{\xi\xi}\ddot{\phi}\hat{\xi} - I_{\zeta\zeta}\dot{\nu}\hat{\zeta} + I_{\zeta\zeta}\nu\dot{\phi}\hat{\eta}.$$

Eftersom $\vec{M}_O$ inte har någon komponent i ζ-led framgår direkt att $\dot{\nu} = 0$ och att ν är en rörelsekonstant.

Explicit blir rörelseekvationerna i ξ- och η-led

$$\begin{aligned} -mgl\sin\phi &= I_{\xi\xi}\ddot{\phi} \\ M_{\text{ext}} &= I_{\zeta\zeta}\nu\dot{\phi}, \end{aligned}$$

där den första ekvationen motsvarar rörelseekvationen för en pendel och den andra ger storlek och riktning på vridmomentet i infästningspunkten. Notera att pendelekvationen *inte* beror på spinnhastigheten ν.

Ovanstående uttryck för storleken på vridmomentet är en funktion av $\dot{\phi}$ och inte ϕ. Detta svar accepteras. Men skall man vara noga, och verkligen finna $M_{\text{ext}}(\phi)$, så måste vi integrera rörelseekvationerna. Utnyttja att $\ddot{\phi} = \dot{\phi}d\dot{\phi}/d\phi$ och integrera den första rörelseekvationen

$$\int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}' d\dot{\phi}' = -\frac{mgl}{I_{\xi\xi}} \int_{\phi_{\max}}^{\phi} \sin\phi d\phi,$$

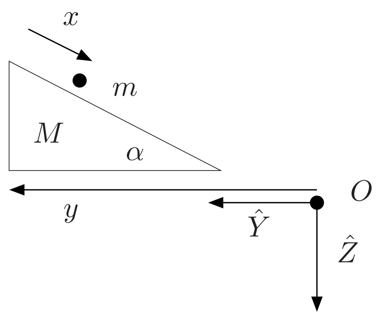
där $\phi_{\max}$ är maximal utslagsvinkel. Denna integral ger $\dot{\phi}(\phi)$ och insättning i den andra rörelsekvationen ger

$$M_{\text{ext}} = I_{\zeta\zeta}\nu\sqrt{\frac{2mgl(\cos\phi - \cos\phi_{\max})}{I_{\xi\xi}}}$$

6. **Lösningsstrategi:**

- Rita figur och välj generaliserade koordinater
- Teckna uttryck för potentiell och kinetisk energi för att få Lagrangianen.
- Teckna och lös Lagranges ekvationer.
  Kontrollera specialfall $\alpha = 0, \pi/2 \quad M \gg m$.

Välj x, y som generaliserade koordinater (se figur).



Potentiell energi:

$$V = -mgx \sin\alpha.$$

Klossens absoluta hastighet är $\vec{v}_{\text{kloss}} = (\dot{y} - \dot{x}\cos\alpha)\hat{Y} + \dot{x}\sin\alpha\hat{Z}$. Den kinetiska energin blir då

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha).$$

Från ovanstående kan vi teckna Lagrangianen

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + mgx\sin\alpha.$$

Lagranges ekvationer

$$\begin{aligned} y - \text{led}: &\quad -m\ddot{x}\cos\alpha + (M+m)\ddot{y} = 0 \\ x - \text{led}: &\quad m\ddot{x} - m\ddot{y}\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0 \end{aligned}$$

Vilket ger lösningarna

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{m\cos\alpha}{M+m}\ddot{x} \\ \ddot{x} &= \frac{(M+m)\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g, \end{aligned}$$

där $\ddot{x}$ är den sökta accelerationen relativt kilen.

Dimensionen för ovanstående stämmer. Vi kan också studera uppenbara specialfall:

$$\ddot{x} = g\sin\alpha \text{ (om } M \gg m), \quad \ddot{x} = g \text{ (om } \alpha = \pi/2), \quad \ddot{x} = 0 \text{ (om } \alpha = 0).$$