Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats:	Måndagen den 23 maj 2011 klockan 14.00-18.00 i V.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Lexikon, typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén, 031–772 3261 (omkoppling aktiverad).

Betygsgränser: Tentamen består av fem uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng (om ej annat anges). För att bli godkänd krävs minst 12 poäng på uppgifterna 1-3 (inklusive eventuella bonuspoäng från de två inlämningsuppgifterna).
För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-5 plus eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna enligt följande gränser:
12-23 poäng ger betyg 3, 24-29 poäng ger betyg 4, 30+ poäng ger betyg 5.

För registrerade studenter från tidigare årskurser finns möjligheten att göra en extra tentamensuppgift (6 poäng) på kursdel A som ersättning för inlämningsuppgifterna.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras (uppgift 1 undantagen i förekommande fall) , införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag, om orimligheten pekas ut; annars 5-6 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 5-6 poängs avdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lycka till!

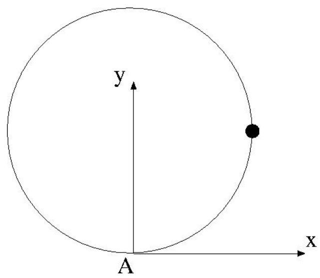
Obligatoriska del

1. *(6 poäng. 1 poäng för 1 rätt svar, 2p för 2 rätta, 4p för 3 rätta, 6p för 4 rätta. Endast svar skall ges.)*

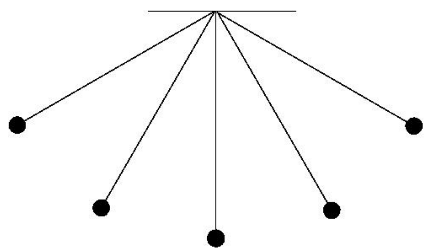
   (a) Det finns åtminstone tre definitioner på vilken punkt som ligger "nedanför" en stillastående observatör på jordytan: (1) Punkten som ligger där den räta linjen mellan observatören och jordens mittpunkt skär jordytan; (2) Punkten ovanför vilken ett hängande lod vilar; (3) Punkten där ett objekt som släpps från observatören landar. Vilka av dessa definitioner ger samma punkt för en observatör vid ekvatorn?

   (b) En buss är försedd med ett stort svänghjul (i form av en homogen, roterande skiva) för att lagra kinetisk energi. Skivan ligger horisontellt med rotationsaxeln pekandes rakt uppåt. Betrakta fallet då bussen kör över ett bergskrön. Beskriv (kompletterat med en figur) hur krafterna på bussens hjul från vägen förändras då svänghjulet roterar jämfört med om det hade stått stilla.

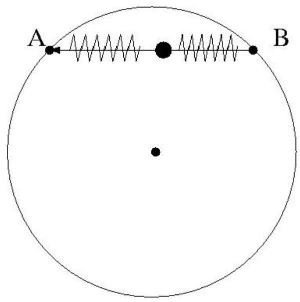
   (c) En tunn, homogen skiva med radie R och massa M ligger i xy-planet. En punktmassa $m = 5M/4$ sitter fäst på ena sidan (se figur). Finn tröghetsmatrisen för systemet bestående av skiva + punktmassa med avseende på punkten A och koordinatsystemet i figuren (z-axeln pekar ut ur pappret).



   (d) En kula fastsatt i ett snöre pendlar under inverkan av tyngdkraften. Figuren nedan visar fem lägen då den är på väg åt höger i figuren (de yttersta lägena är kulans vändlägen). Skissa för varje läge riktningen på hastighets- och accelerationsvektorerna. Ange tydligt vilken som är vilken, eller ännu hellre rita två figurer.

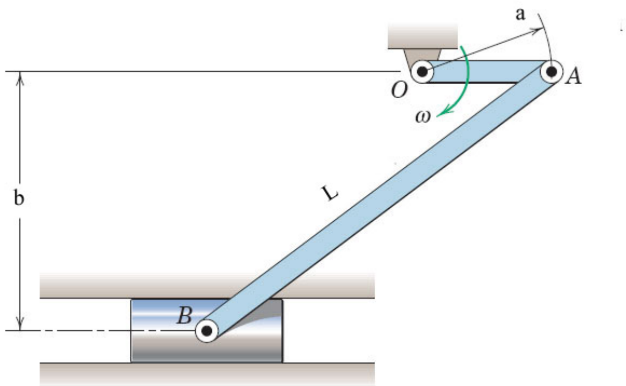


2. På en stång AB kan en massa M glida utan friktion. Vikten är fäst i två fjädrar (fjäderkonstanter k), vilkas andra ändar är fixerade i A respektive B så att massan vid jämvikt befinner sig mitt på stången. Staven AB är monterad på en horisontell skiva som kan rotera kring en vertikal axel genom mittpunkten med den fixa vinkelhastigheten Ω.



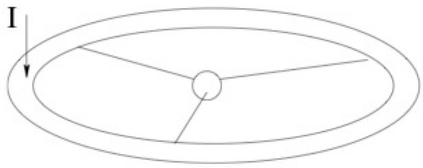
När staven befinner sig i vila kan massan uppenbarligen oscillera med en harmonisk svängningsrörelse. Men även när skivan roterar kan vi ha en harmonisk svängningsrörelse för ett visst villkor på Ω. Ange detta villkor och bestäm förhållandet mellan svängningsrörelsernas periodtider då skivan roterar och då den är i vila.

3. Staven OA (längd a) har en konstant vinkelhastighet ω. Beräkna vinkelaccelerationen α_{AB} för staven AB (längd L) i läget då arrangemanget är orienterat enligt figur.

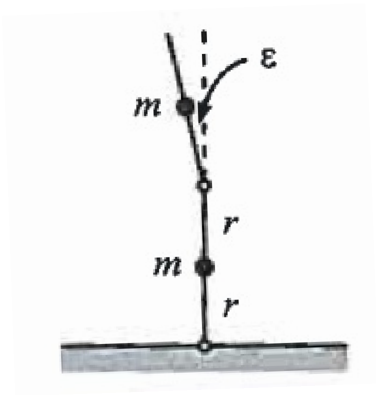


Överbetygsuppgifter

4. En rymdstation är formad som en smal torus ("doughnut") enligt figur. Dess radie är 200 m och dess massa 50 kiloton. Massan i övriga delar av rymdstationen är försumbar. Stationen roterar kring sin symmetriaxel så att den upplevda gravitationsaccelerationen vid periferin skall vara g. Vid ett tillfälle skjuts en rymdfarkost ut från torusen i en riktning parallell med rotationsaxeln, vilket åstadkommer en impuls i motsatt riktning av storleken $7.5 \cdot 10^5$ Ns. Beskriv rymdstationens rotationsrörelse därefter i termer av spinn och precession.



5. Två masslösa stavar, vardera med längd $2r$ och varsin punktmassa m fixerad på mitten, sitter fästa i varandra enligt figur. De är alltså fritt vridbara kring kontaktpunkterna med varandra och med marken. I begynnelseögonblicket står den nedre pinnen vertikalt och den övre lutar en vinkel ε relativt vertikalen. Beräkna, för ögonblicket de släpps, vinkelaccelerationen för de två pinnarna. Antag att vinkeln ε är liten.



Extrauppgift (del A)

6. En lastbil har en öppen bakdörr enligt figur då den börjar accelerera framåt med konstant acceleration A. Dörren är homogen och har bredden w, höjden h samt massan m, Försumma luftmotstånd. Vad är vinkelhastigheten runt gångjärnen då dörren har svängt 90^o?

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 23 maj 2011 klockan 14.00-18.00 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

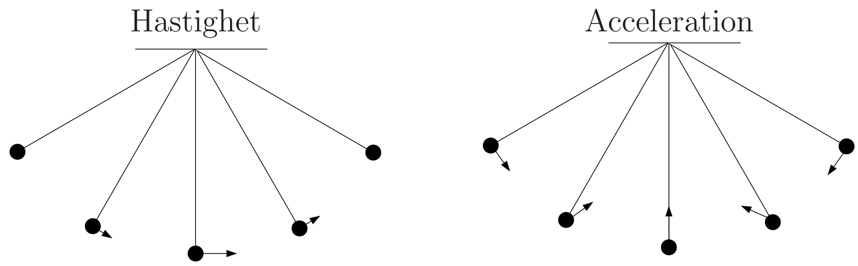
---

1. (a) (1) och (2) är identiska vid ekvatorn. Centripetalaccelerationen påverkar iof lodet, men vid ekvatorn är denna riktad vinkelrät mot jordytan. Det fallande objektet påverkas däremot av Coriolisaccelerationen.

   (b) Normalkrafterna kommer att öka på de två vänstra hjulen och minska på de två högra. Med ett roterande svänghjul betyder detta att bussen tenderar att välta åt vänster i färdriktningen.

   (c)
$$\mathbf{I}_A = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

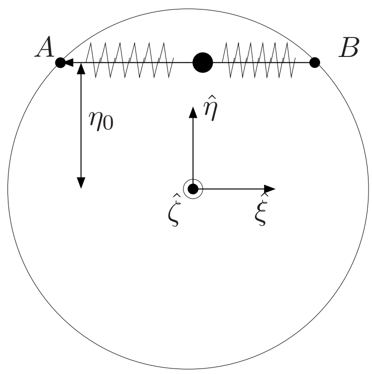
   (d)



2. **Lösning:** Vi tecknar NII, $M\vec{a} = \vec{F}$, och inför ett kroppsfixt, roterande koordinatsystem $\xi\eta\zeta$ enligt figur. Rörelseekvationen blir

$$M\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2M(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}), \tag{1}$$

   där $\vec{a}_{\text{rel}}$ beskriver den sökta rörelsen i det roterande koordinatsystemet.



En friläggning av massan vid en positiv förflyttning ξ från jämviktsläget ger summan av externa krafter $\vec{F} = -2k\xi\hat{\xi} + N_\zeta\hat{\zeta} + N_\eta\hat{\eta} - Mg\hat{\zeta}$, där de två komponenterna av normalkrafter ser till att begränsa massans rörelse till ξ-led. Vi är följdaktligen enbart intresserade av ξ-komponenten av rörelseekvationen.

Med $\vec{\omega} = \Omega\hat{\zeta}$, $\vec{r} = \xi\hat{\xi} + \eta_0\hat{\eta}$, $\vec{v}_{\rm rel} = \dot{\xi}\hat{\xi}$ inses att Coriolistermen är riktad i η-led och Centripetaltermen har en term i ξ-led

$$-M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = M\Omega^2[\xi\hat{\xi} + \eta_0\hat{\eta}].$$

Vi får

$$M\ddot{\xi} = -2k\xi + M\Omega^2\xi. \tag{2}$$

Om villkoret $\Omega^2 < 2k/M$ är uppfyllt känner vi igen detta som ekvationen för en fri, harmonisk svängningsrörelse

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{2k}{M} - \Omega^2\right)\xi = 0. \tag{3}$$

Villkoret är rimligt ty vi kan förvänta oss att för stora värden på Ω kommer massan att trycks ut mot punkten B.

Vi inför beteckningen $\omega_0 \equiv \sqrt{2k/M}$ för systemets naturliga vinkelfrekvens då skivan står still. Periodtiden är omvänt proportionell mot vinkelfrekvensen och vi finner att

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2/\omega_0^2}}. \tag{4}$$

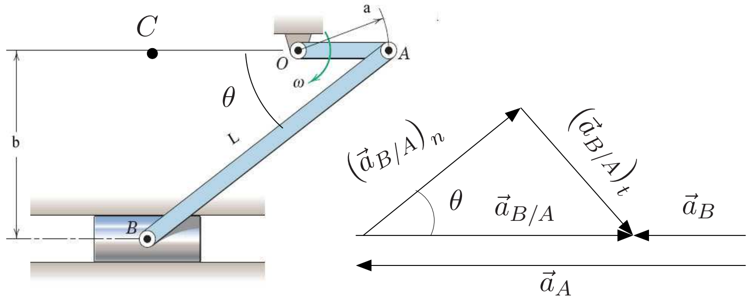
(Notera att periodtiden ökar för stora rotationshastigheter, vilket är rimligt.)

3. **Lösning:** Vi utnyttjar att vi vet hastighets och accelerationsriktningar på punkterna A och B. Punkten A rör sig momentant rakt neråt och B rör sig rakt åt vänster. Därmed kan vi identifiera punkten C (se figur) som en momentan nollhastighetspunkt för den rörelse som staven AB utför.

   Hastigheten för punkten A är $v_A = a\omega$ och med avståndet $L_{AC}^2 = L^2 - b^2$ fås därmed stavens vinkelhastighet (medurs)

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{L_{AC}} = \frac{a\omega}{\sqrt{L^2 - b^2}}. \tag{5}$$

   Vidare vet vi att accelerationerna för punkterna A och B på staven momentant är riktade horisontellt åt vänster (se figur). Dessa kan relateras till varandra via $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$, vilket därmed säger att även $\vec{a}_{B/A}$ måste vara riktad horisontellt.



   Den relativa accelerationen $\vec{a}_{B/A}$ beskriver en rotationsrörelse och vi delar upp den i normal- och tangentkomposanter enligt figur. Då gäller att

$$\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n = L\omega_{AB}^2. \tag{6}$$

   För att $\vec{a}_{B/A}$ verkligen skall vara riktad horisontellt måste

$$\frac{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t}{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n} = \tan\theta = \frac{b}{L_{AC}} = \frac{1}{\sqrt{L^2/b^2 - 1}}. \tag{7}$$

   Med uttrycket för $\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n$ (och ω_{AB}) från ovan fås slutligen

$$\alpha_{BA} = \frac{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t}{L} = \ldots = \omega^2 \frac{a^2/b^2}{(L^2/b^2 - 1)^{3/2}}, \tag{8}$$

   riktad moturs.

Överbetygsuppgifter

4. **Lösning:** Rymdstationen roterar till att börja med kring sin symmetriaxel med spinn ν så att $g = R\nu^2$, där R är radien. Vi antar att impulsöverföringen vid rymdfarkostutskjutningen sker snabbt i jämförelse med ν, så att den kan betraktas som en stöt. Vi inför ett kroppsfixt koordinatsystem xyz så att origo ligger i torusens centrum, z-axeln pekar i spinnriktningen, och stöten träffar i $(R, 0, 0)$. Impulsen $-I\hat{\mathbf{z}}$ överförs vid stöten vilket innebär ett överfört impulsmoment $RI\hat{\mathbf{y}}$. Rymdstationens tröghetsmoment med avseende på z-axeln är $I_z = mR^2$, och med avseende på däremot vinkelräta riktningar genom origo $I_\perp = I_z/2$.

   Alldeles efter stöten är stationens rörelsemängdsmoment med avseende på sitt masscentrum

$$\vec{L}_G = I_z\nu\hat{\mathbf{z}} + RI\hat{\mathbf{y}} = I_z\nu\hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{2}I_z\omega_y\hat{\mathbf{y}} \equiv L\hat{Z}. \tag{9}$$

   Efter stöten är $\vec{L}_G$ konserverad, så att $\hat{Z}$ är en fix riktning i rummet, kring vilken rymdskeppets rotationsvektor $\vec{\omega}$ och symmetriaxel $\hat{\mathbf{z}}$ precesserar. För att få precessionshastigheten uttrycker man $\vec{\omega}$ i basvektorerna $\hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{Z}$ vilket ger

$$\begin{aligned}\vec{\omega} = \nu\hat{\mathbf{z}} + \omega_y\hat{\mathbf{y}} &= \nu\hat{\mathbf{z}} + \frac{RI}{I_z/2}\frac{L\hat{Z} - I_z\nu\hat{\mathbf{z}}}{RI} \\ &= -\nu\hat{\mathbf{z}} + 2\frac{L}{I_z}\hat{Z} \equiv -\nu\hat{\mathbf{z}} + \Omega\hat{Z}.\end{aligned} \tag{10}$$

   Numeriskt gäller

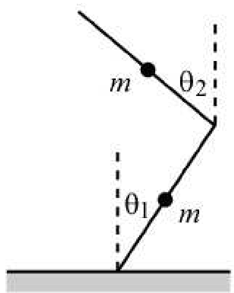
$$\nu = \sqrt{g/R} = 0.22\ \mathrm{s}^{-1}, \tag{11}$$

$$L_y/L_z = RI/(I_z\nu) = I/(mR\nu) = 3.4 \cdot 10^{-4} \equiv \alpha. \tag{12}$$

   Notera att $\alpha =$ tangens för vinkeln mellan symmetriaxeln $\hat{\mathbf{z}}$ och precessionsaxeln $\hat{Z}$. Men eftersom α är så litet är det en god approximation att försumma termer av ordning α^2. Då är α vinkeln mellan $\hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{Z}$, och totala impulsmomentet kring masscentrum till beloppet samma som före utskjutningen, $L_G = I_z\nu$. Precessionshastigheten är $\Omega = 2\nu = 0.44\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rymdskeppets rotationsrörelse kan alltså beskrivas så att symmetriaxeln och den momentana rotationsaxeln ligger på motsatta sidor om den rumsfixa riktningen $\hat{Z}$, bildar bägge samma vinkel α med den, och precesserar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = 2\nu\hat{Z}$ kring den. Dessutom har spinnvektorn ändrat tecken jämfört med före utskjutningen.

5. **Lösning:** Systemet har två frihetsgrader. Välj vinklarna $\theta_1(t)$ och $\theta_2(t)$ som generaliserade koordinater. När vi tecknar uttrycken för potentiell och kinetisk energi utnyttjar vi att vinklarna är små: $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2, \quad \sin\theta \approx \theta$.



De kartesiska lägeskoordinaterna för den undre massan blir: $(r\sin\theta_1, r\cos\theta_1)$; och för den övre: $(2r\sin\theta_1 - r\sin\theta_2, 2r\cos\theta_1 + r\cos\theta_2)$. Vi utnyttjar att vinklarna är små. Den potentiella energin för systemet blir

$$V(\theta_1,\theta_2) \approx mgr\left(4 - 3\theta_1^2/2 - \theta_2^2/2\right). \tag{13}$$

Efter lite räkningar fås den kinetiska energin för de två massorna

$$T_1 \approx mr^2\frac{\dot{\theta}_1^2}{2}, \tag{14}$$

$$T_2 \approx \frac{mr^2}{2}\left(2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)^2. \tag{15}$$

Lagrangianen blir slutligen

$$L \approx \frac{mr^2}{2}\left(5\dot{\theta}_1^2 - 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) - mgr\left(4 - \frac{3}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right). \tag{16}$$

Rörelseekvationerna i θ_1- och θ_2-led blir

$$5\ddot{\theta}_1 - 2\ddot{\theta}_2 = \frac{3g}{r}\theta_1 \tag{17}$$

$$-2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = \frac{g}{r}\theta_2. \tag{18}$$

Vi är intresserade av vinkelaccelerationerna då $t = 0$. Med begynnelsevillkoren $\theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = \varepsilon$ fås slutligen

$$\ddot{\theta}_1(0) = \frac{2g\varepsilon}{r}, \quad \ddot{\theta}_2(0) = \frac{5g\varepsilon}{r}. \tag{19}$$

Extrauppgift (del A)

6. **Lösningsskiss:**

   - Inför ett koordinatsystem som följer med i den accelererande rörelsen.
   - Teckna rörelsemängdsmomentet för rotation kring gångjärnen.
   - Teckna på samma sätt vridmomentet och skriv ner rörelseekvationen för rotationsrörelsen.
   - Integrera rörelseekvationen (ett bra trick kan vara att multiplicera med $\dot{\theta}$ först) och utnyttja begynnelsevillkoret $\dot{\theta}(0) = 0$.

   För $\theta = 90^o$ fås $\dot{\theta} = \sqrt{3A/w}$.