Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats:	Måndagen den 24 augusti 2009 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Lexikon, typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén, 031–772 3261.

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng (om ej annat anges). För att bli godkänd krävs minst 12 poäng på uppgifterna 1-4.
För dem som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-6 plus eventuella bonuspoäng enligt följande gränser:
12-23 poäng ger betyg 3, 24-29 poäng ger betyg 4, 30+ poäng ger betyg 5.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras (uppgift 1 undantagen i förekommande fall) , införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag, om orimligheten pekas ut; annars 5-6 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 5-6 poängs avdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Obligatorisk del

1. *(6 poäng. 2 poäng för varje rätt svar utöver 3. Endast svar skall ges.)*

   (i) Vilken rotationsriktning har orkanvindar runt ett lågtryck på norra halvklotet?

   (a) Medurs. (b) Moturs. (c) Går ej att förutsäga.

   (ii) Ett vanligt påstående är att Coriolisaccelerationen bestämmer rotationsriktningen hos virveln i ett handfat som töms på vatten. Vilket av nedanstående uttalanden angående detta påstående är korrekt?

   (a) Ja, detta stämmer om handfatets utformning är rotationssymmetrisk. (b) Nej, detta stämmer inte eftersom effekten är för liten för att observeras i vanliga handfat. (c) Nej, Coriolisaccelerationen påverkar inte fluidsystem.

   (iii) Två cirkulära och homogena metallskivor har samma massa M och samma tjocklek t. Densiteten för skiva 1 är mindre än densiteten för skiva 2, dvs $\rho_1 < \rho_2$. Vilken skiva, om någon, har störst tröghetsmoment runt en axel genom masscentrum och vinkelrät mot skivans platta sidor?

   (a) Skiva 1. (b) Skiva 2. (c) Samma tröghetsmoment.

   (iv) Hur många frihetsgrader har rörelsen för en stel kropp i rummet vars masscentrum är begränsat att röra sig längs en linje?

   (a) 3. (b) 4. (c) 5.

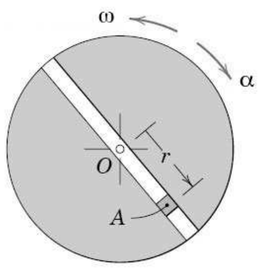
   (v) Hur påverkar storleken på dämpningen den tid det tar för en mycket starkt dämpad partikel att halvera sitt avstånd till jämviktsläget då den släpps från vila?

   (a) Längre tid ju starkare dämpning. (b) Kortare tid ju starkare dämpning. (c) Tiden påverkas ej.

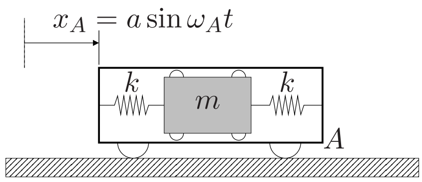
   (vi) En pendel består av ett litet klot med massan m upphängd i ett lätt snöre med längden l. Periodtiden för små svängningar kring jämviktsläget är T. Vad är periodtiden för en lika lång smal stav med samma massa, upphängd i sin ändpunkt?

   (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}T$. (b) T. (c) $\sqrt{\frac{3}{2}}T$.

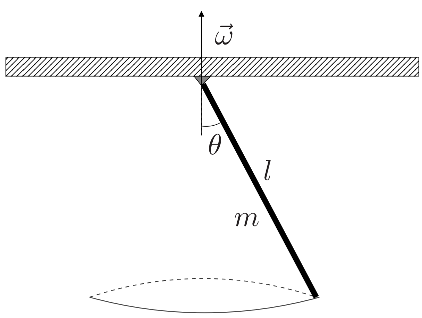
2. Vid ett givet ögonblick roterar en plan, cirkulär skiva med rotationshastigheten $\vec{\omega}$ moturs och vinkelaccelerationen $\vec{\alpha}$ medurs. I skivan finns ett rakt spår i vilken en massa A kan röra sig. I samma ögonblick uppmäts massans läge r, hastighet $\dot{r}$ och acceleration $\ddot{r}$, där r är avståndet från skivans mittpunkt till A. Finn uttryck för massans absoluta hastighet och acceleration. *(6 poäng)*



3. Rörelsen hos den yttre vagnen A i figuren ges av $x_A(t) = a \sin \omega_A t$. För vilka frekvenser ω_A kommer amplituden för massan m:s svängningsrörelse relativt vagnen A att vara mindre än $c\,a$, där c är ett positivt reellt tal $c > 1$? *(6 poäng)*

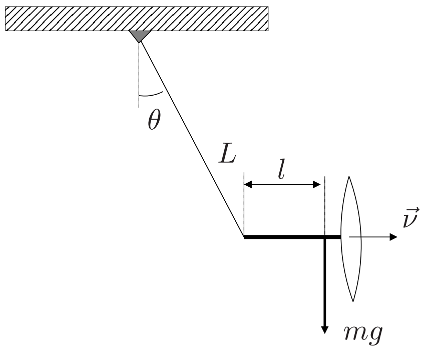


4. Betrakta en homogen stav med längden l och massan m. Staven är upphängd i sin övre ände, kring vilken den kan rotera fritt (se figur). Staven har satts i rotation så att dess undre ände utför en cirkelrörelse i horisontalplanet (dvs staven rör sig med konstant vinkel θ relativt vertikalaxeln). Finn vinkelfrekvensen ω för denna rotationsrörelse. *(6 poäng)*



Överbetygsuppgifter

5. En rotationssymmetrisk snurra har massan m och tröghetsmomentet I_0 med avseende på symmetriaxeln. Den hålls upp av ett snöre av längden L och rör sig runt i horisontellt läge så att masscentrum rör sig med konstant fart på en cirkel, samtidigt som den spinner med spinnhastigheten ν. Avståndet mellan snörets infästning och snurrans masscentrum är l. Härled en ekvation som bestämmer vinkeln mellan snöret och vertikalen, och lös den åtminstone för situationer då vinkeln är liten! *(6 poäng)*

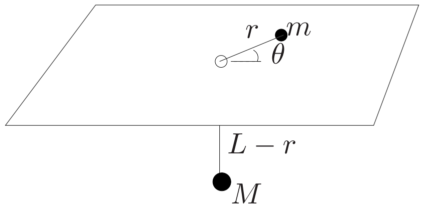


6. En massa m kan röra sig friktionslöst på ett plant bord samtidigt som den är ihopkopplad till en massa M via ett snöre (längd L) genom ett hål i bordet (se figur). Antag att massan M enbart kan röra sig i vertikal led.

(a) Använd Lagranges ekvationer för att finna rörelseekvationerna för koordinaterna r och θ enligt figur. *(2 poäng)*

(b) Under vilket villkor utför massan m en cirkelrörelse? *(2 poäng)*

(c) Finn vinkelfrekvensen för små oscillationer (i variabeln r) runt denna cirkelrörelse. *(2 poäng)*



Lycka till!

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Måndagen den 24 augusti 2009 klockan 08.30-12.30 i V.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Obligatorisk del

---

1. Rätt svarsalternativ på de sex frågorna är:
   bba baa

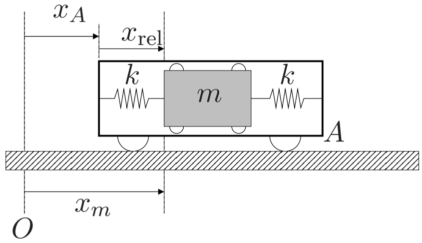
2. Vi inför ett roterande koordinatsystem xyz, med z-axeln ut ur planet och x-axeln längs spåret. Detta betyder att $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, $\vec{\alpha} = -\alpha\hat{z}$, $\vec{r} = r\hat{x}$, $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{r}\hat{x}$ och $\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{r}\hat{x}$, där de två sistnämnda storheterna är A:s hastighet respektive acceleration *relativt* skivan.

   Med origo i skivans mittpunkt (som är fix; dvs $\vec{v}_O = 0$, $\vec{a}_O = 0$) får vi följande uttryck för A:s hastighet och acceleration i ett inertialsystem.

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_A &= \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{\text{rel}} = \omega\hat{z} \times r\hat{x} + \dot{r}\hat{x} = \omega r\hat{y} + \dot{r}\hat{x} \\
\vec{a}_A &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}} \\
&= \left(\ddot{r} - \omega^2 r\right)\hat{x} + (2\omega\dot{r} - \alpha r)\,\hat{y}.
\end{aligned}
$$

3. Strategi: Vi behöver rörelsevariabler för att beskriva massans rörelse relativt vagnen. Men vi behöver också rörelsevariabler i ett inertialsystem för att kunna ställa upp Newton II.

   Vi inför därför tre olika koordinater enligt figur: x_m = massans läge i ett inertialsystem; x_{rel} = massans läge relativt vagnen A; $x_A(t) = a\sin\omega_A t$ (vagnens läge i inertialsystemet).



Vi skriver $x_{\rm rel} = x_0 + x$, där x_0 är en konstant som ger vagnens läge i jämvikt (dvs då fjäderkrafterna är balanserade). x blir då avvikelsen från jämviktsläget och en friläggning av vagnen för ett positivt värde på x ger följande rörelseekvation

$$-2k \underbrace{(x_m - x_A - x_0)}_{=x} = m \underbrace{\ddot{x}_m}_{\ddot{x}_A + \ddot{x}} .$$

Notera att vi använder Newton II i inertialsystemet. Detta ger oss dock en ekvation för variabeln x

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = a\omega_A^2 \sin \omega_A t,$$

där $\omega_n \equiv \sqrt{2k/m}$. Med insättning av ansatzen $x = X \sin \omega_A t$ får vi följande villkor för amplituden X

$$X = \frac{a(\omega_A/\omega_n)^2}{1 - (\omega_A/\omega_n)^2}.$$

Vi söker de frekvenser för vilka $|X| < ca$ och finner en övre och en undre gräns ($-c < X/a < c$):

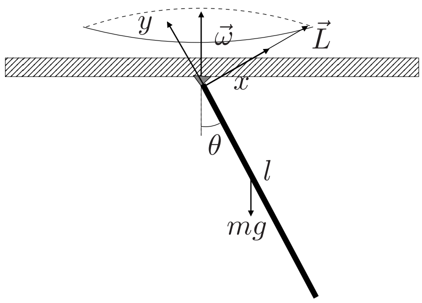
$$\frac{\omega_A}{\omega_n} < \sqrt{\frac{c}{1+c}} \quad \text{eller}$$
$$\frac{\omega_A}{\omega_n} > \sqrt{\frac{c}{c-1}}.$$

Vi noterar t.ex. att gränsen $c \to \infty$ motsvarar resonansfrekvensen $\omega_A \to \omega_n$.

4. Strategi:

- För att teckna rörelsemängdsmomentet för staven behöver vi införa ett kroppsfixt (och därmed roterande) koordinatsystem. I detta koordinatsystem kan vi sedan uttrycka rotationsvektorn och tröghetsmatrisen för att slutligen få rörelsemängdsmomentet.
- Vi utnyttjar sedan rörelseekvationen som säger att tidsändringen av den sistnämnda skall vara lika med det yttre vridmomentet.
- För att slippa de okända krafterna som verkar i infästningen väljer vi att skriva våra storheter med avseende på denna punkt.

Vi inför ett koordinatsystem xyz enligt figur (z pekar ut ur planet) som roterar med staven, dvs med rotationshastighet $\vec{\omega} = \omega (\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y})$.



Våra koordinataxlar utgör huvudtröghetsaxlar för staven (alla deviationsmoment är noll) och vi har tröghetsmatrisen $I_{xx} = ml^2/3$, $I_{yy} = 0$, $I_{zz} = ml^2/3$.

Rörelsemängdsmomentet m.a.p. stavens upphängningspunkt: $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} = (ml^2/3)\omega \sin\theta \hat{x}$. Denna vektor är alltså parallell med x-axeln och roterar med denna (se figur ovan). Tidsderivatan för denna vektor

$$d\vec{L}/dt = \vec{\omega} \times \vec{L} = -(ml^2/3)\omega^2 \sin\theta \cos\theta \hat{z}$$

Denna ändring av rörelsemängdsmomentet ges av ett yttre vridmoment $\vec{M}$ (m.a.p. upphängningspunkten) vilken i sin tur kommer från tyngdkraften som verkar på staven.

$$\vec{M} = -\frac{l}{2}\hat{y} \times mg\left[-\sin\theta \hat{x} - \cos\theta \hat{y}\right] = -\frac{mgl}{2}\sin\theta \hat{z}.$$

Med $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ får vi slutligen $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}$.

Vi noterar att rotationshastigheten ökar med ökande vinkel θ, och speciellt att $\omega \to \infty$ då $\theta \to \pi/2$ vilket är rimligt. Att stavens massa inte är en faktor i svaret kunde vi insett redan från första början m.h.a. dimensionsanalys.

Överbetygsuppgifter

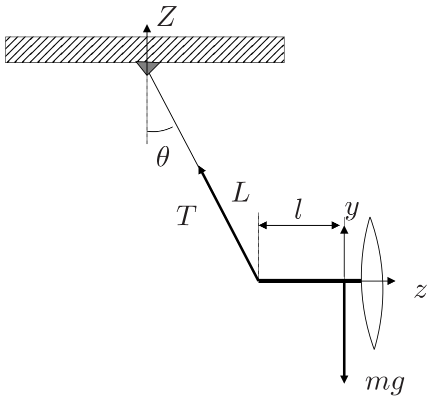
---

5. Strategi:

   - Målet är att kunna utnyttja rörelseekvationen $[\dot{\vec{L}}] = \vec{M}$ med avseende på någon lämpligt vald punkt och skriven i ett lämpligt (kroppsfixt) koordinatsystem.

- Själva precessionsrörelsen runt upphängningspunkten kan beskrivas enkelt med en fix koordinataxel fast vi noterar att precessionshastigheten inte är given i upgiften utan måste elimineras.
- Detsamma gäller kraften som verkar på snurran från snöret. Vi kan få villkor på denna kraft genom att utnyttja de rörelseekvationer som vi får från summan av yttre krafter på snurran.

Vi inför ett fixt cartesiskt koordinatsystem XYZ med origo i upphängningspunkten och Z-axeln riktad uppåt, samt ett koordinatsystem som roterar med symmetriaxlarna xyz med z-axeln = symmetriaxeln, och y-axeln riktad uppåt (se figur). Detta koordinatsystem roterar med $\vec{\Omega} = \Omega\hat{Z}$, där Ω är rörelsens precessionshastighet.



Snurrans rotationsvektor $\vec{\omega} = \nu\hat{z} + \Omega\hat{Z}$.
Rörelsemängdsmoment med avseende på masscentrum,

$$\vec{L} = I_0\nu\hat{z} + I_\perp\Omega\hat{Z}.$$

Kraftmoment med avseende på masscentrum

$$\vec{M} = -l\hat{z} \times \vec{T},$$

där $\vec{T}$ är kraften från snöret på snurran.

Kraftjämvikt i Z-led ger

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

Masscentrums rörelse i horisontell led ger rörelseekvationen

$$m(l + L\sin\theta)\Omega^2 = T\sin\theta. \tag{2}$$

Rotationsrörelseekvationen

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \Omega\hat{Z} \times \vec{L} = \Omega\nu I_0 \hat{Z} \times \hat{z}.$$

Från uttrycket för $\vec{M}$ ser vi att $\vec{T}$ måste ligga i $\hat{Z}\hat{z}$-planet för att termerna i sista ekvationen skalll peka åt samma håll. Ekvationen ger då sambandet

$$lT\cos\theta = \Omega\nu I_0. \tag{3}$$

Ekvationerna (1–3) ger, genom elimination av T och Ω, det sökta sambandet, (som lämpligen dimensionskontrolleras)

$$(l + L\sin\theta)g\left(\frac{lm}{\nu I_0}\right)^2 = \tan\theta.$$

Om vinkeln θ är nära noll så kan vi approximera tangens och sinus med vinkeln. Då får vi

$$\theta \approx \frac{l}{\left[\frac{1}{g}\left(\frac{\nu I_0}{lm}\right)^2 - L\right]}.$$

6. (a) Vi antar att snöret har längden L och tecknar Lagrangianen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Mg(L - r).$$

Rörelseekvationerna fås från Lagranges ekvationer

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$
$$(M + m)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg,$$

där den första ekvationen säger att rörelsemängdsmomentet med avseende på punkten där snöret går genom bordet $L_0 = mr^2\dot{\theta}$ är konserverat, och den andra uttrycker det faktum att tyngdkraften är ansvarig för accelerationen av de två massorna längs snöret plus centripetalaccelerationen.

(b) Den andra rörelseekvationen med $\ddot{r} = 0$ och $r = r_0$ ger villkoret $mr_0\dot{\theta}^2 = Mg$ för cirkelrörelse. Detta villkor ger också ett samband mellan radien och vinkelhastigheten för denna rörelse.

(c) Vi uttrycker den andra rörelseekvationen i termer av r samt den konserverade storheten L_0

$$(M + m)\ddot{r} = \frac{L_0^2}{mr^3} - Mg.$$

Sedan betraktar vi små oscillationer runt den rena cirkelrörelsen, dvs $r(t) = r_0 + \delta(t)$, där $\delta \ll r_0$. Vi behåller första ordningens termer i δ

$$\frac{1}{r^3} \equiv \frac{1}{(r_0+\delta)^3} \approx \frac{1}{r_0^3 + 3r_0^2\delta} = \frac{1}{r_0^3}\frac{1}{1+3\delta/r_0} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right),$$

vilket ger

$$(M+m)\ddot{\delta} \approx \frac{L_0^2}{mr_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right) - Mg.$$

Från (b)-uppgiften ser vi att $\frac{L_0^2}{mr_0^3} - Mg = 0$[1] och därmed återstår ekvationen för en fri svängningsrörelse

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3L_0^2}{(M+m)mr_0^4}\right)\delta \approx 0,$$

där vi identifierar vinkelfrekvensen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3L_0^2}{(M+m)mr_0^4}} = \sqrt{\frac{3M}{M+m}}\sqrt{\frac{g}{r_0}}.$$

Vi noterar att denna frekvens för oscillationer i radiell led inte är samma som frekvensen för massans cirkelrörelse. Den sistnämnda ges från (b)-uppgiften $\dot{\theta} = \sqrt{M/m}\sqrt{g/r_0}$.

[1] Detta samband kommer just från själva villkoret för jämviktsläget.