Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Fredagen 18 januari 2008, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar , utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

---

1. Ange, utan motivering, rätt svarsalternativ på delfrågorna a-h. Endast ett alternativ per delfråga. (Det går bra att ringa in på detta blad.)

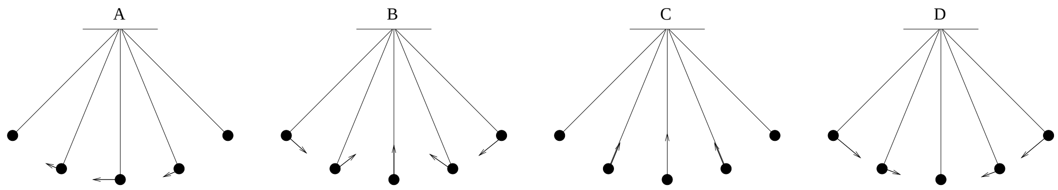
a) En bil med massan 1.0 ton kör rakt norrut med farten $100\,km/h$ på $30°$ sydlig bredd. Vad är corioliskraften på bilen?

$1.0\,N$ västerut　　$1.75\,N$ västerut　　$1.0\,N$ österut　　$1.75\,N$ österut

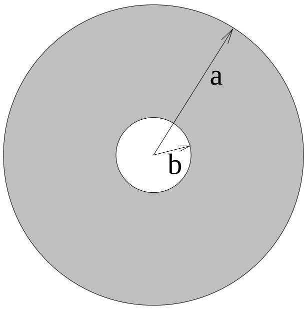
b) Om bilen i uppgift a) istället befinner sig vid ekvatorn och kör österut, åt vilket håll är corioliskraften riktad?

framåt　　bakåt　　uppåt　　ingenstans, den är noll

c) En kula fastsatt i ett snöre pendlar under inverkan av tyngdkraften. Vilket av alternativen beskriver bäst kulans acceleration i de fem lägena då den är på väg åt höger i figuren (de yttersta lägena är kulans vändlägen)?



d) Hur stort är tröghetsmomentet m.a.p. symmetriaxeln för cirkelskivan med ett centralt placerat hål enligt figuren (kroppens massa är m)?



$\frac{1}{4}m(a^2 - b^2)$ $\quad$ $\frac{1}{2}m(a^2 - b^2)$ $\quad$ $\frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$ $\quad$ $\frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$

e) Om längderna för skivan i uppgift d) görs dubbelt så stora (med samma massa per areaenhet), hur många gånger större blir tröghetsmomentet?

2 $\quad$ 4 $\quad$ 8 $\quad$ 16

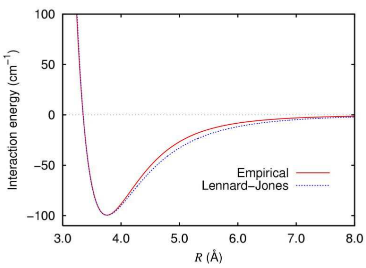
f) En bisvärm bestående av 10.000 bin flyger så att dess totala rörelsemängd vid ett visst ögonblick är $\vec{p}$ och dess rörelsemängdsmoment m.a.p. svärmens masscentrum är $\vec{j}$. Vilket av påstående om svärmens kinetiska energi T är korrekt?

T är bestämd av $\vec{p}$ och $\vec{j}$.	T måste vara en rörelsekonstant.	T kan förändras med tiden, men bara om masscentrums höjd förändras.	Värdet på T beror på varje enskilt bis fart.

g) En partikel med massan m rör sig i en s.k. Lennard–Jones-potential,

$$V(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right] ,$$

som ofta används för att modellera krafter mellan neutrala atomer eller molekyler.



Vilket av följande påståenden stämmer?

Minimipunkten är ett labilt jämviktsläge.	Med tillräckligt hög kinetisk energi kan partikeln komma ända till $r = 0$.	Ju större värde parametern σ har, desto större blir energin i jämviktsläget.	Vinkelfrekvensen för små svängningar kring jämviktsläget är något dimensionslöst tal gånger $\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\sigma^2}}$.

h) Man beräknar tröghetsmatrisen för en plan (tvådimensionall) kropp, och får resultatet

$$I = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \; kg\, m^2 \, .$$

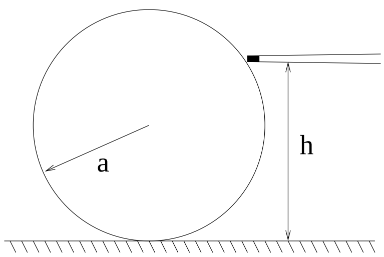
Hur stora är kroppens huvudtröghetsmoment (i $kg\, m^2$)?

Båda är 4	5 och 3	4 och 1	4 och 0

(max 18 poäng: 3 poäng för varje korrekt svar utöver 2 stycken)

2. En tunn rak homogen pinne med massan m och längden ℓ är fritt upphängd i sin ena ände. Förutom tyngdkraften och krafterna i upphängningspunkten påverkas den av en luftmotståndskraft, som per längdenhet är proportionell mot hastigheten med proportionalitetskonstant c. För vilket värde på c är små svängningar kring jämviktsläget kritiskt dämpade? Betrakta endast plan rörelse. Glöm inte dimensionskontroll!
(10 poäng)

3. En person skall stöta iväg en biljardboll (se figuren) och vill att bollen inte skall glida mot underlaget, utan rulla. Bestäm höjden h i figuren så att detta sker, när man givit den en horisontell knuff med biljardkön (pinnen), oberoende av friktionskoefficienten mot underlaget.
(12 poäng)



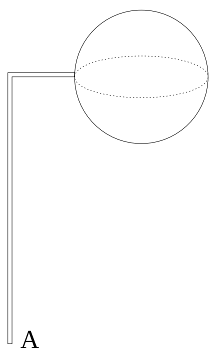
Uppgifter för överbetyg

4. Om man slår upp planeten Mars på wikipedia.org får man bl.a. följande uppgifter:

Aphelion	249,228,730 km
Perihelion:	206,644,545 km
Semi-major axis:	227,936,637 km
Eccentricity:	0.09341233
Orbital period:	686.9600 days
Avg. orbital speed:	24.077 km/s

Kontrollera om uppgifterna är inbördes konsistenta. Givet Newtons konstant ($G \approx 6.67 \times 10^{-11}\, Nm^2kg^{-1}$), beräkna solens massa!
(10 poäng)

5. En stel kropp består av en smal vertikal homogen stång med längden 100 cm och massan 10 kg, en horisontell stång av samma material med längden 25 cm samt ett homogent klot med radien 25 cm och massan 5 kg enligt figuren. Beräkna det vridande moment med vilket kroppen påverkar infästningspunkten A då den roterar runt en axel längs den vertikala stången med 10 varv per sekund.
(10 poäng)



Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 18/1-2008.

1. Om de fyra svarsalternativen på varje fråga kallas A B C D respektive så är de rätta svaren:
   a) B, b) C, c) B, d) D, e) D f) D, g) D, h) B.

2. Det är frågan om en stel kropps rörelse i vertikalt plan. Använder rörelsemängdsmomentlagen, $\dot{L} = M$, med avseende på upphängningspunkten. Kraftmomentet orsakas av gravitations- och luftfriktions-krafter, så ekvationen kan skrivas

$$I\ddot{\theta} = M_g + M_f$$

där θ är utslagsvinkeln. Tröghetsmomentet är $I = m\ell^2/3$. Gravitationskraftens moment är, i approximation giltig för små vinklar, $M_g = -mg(\ell/2)\sin\theta \approx -mg(\ell/2)\theta$. Friktionskraftens moment beräknas genom att tänka sig staven uppdelad i små bitar och summera momenten på alla småbitarna med en integral

$$M_f = -\int_0^\ell dx\, c\,(x\dot{\theta})\, x = -\frac{1}{3}c\ell^3\dot{\theta}$$

(Faktorn i parentesen är småbitens hastighet.) Rörelseekvationen kan nu skrivas

$$\ddot{\theta} + (c\ell/m)\dot{\theta} + (3g/2\ell)\theta = 0$$

Detta är ekvationen för dämpad harmonisk svängning, kritiskt dämpad när

$$(c\ell/m)^2 = 4(3g/2\ell), \quad \text{dvs} \qquad c = m\sqrt{6g/\ell^3}.$$

Dimensionskontroll: Definitionen av c: kraft = c·längd·hastighet, ger

$$[c] = \frac{[\text{kraft}]}{[\text{längd}][\text{hastighet}]} = \frac{ML}{T^2}\Big/\frac{LL}{T} = \frac{M}{LT}.$$

Detta stämmer med dimensionen enligt vårt uttryck för c:

$$[c] = [m\sqrt{6g/\ell^3}] = M\sqrt{\frac{L}{T^2L^3}} = \frac{M}{LT}.$$

3. Stöten tillför under kort tid en horisontellt riktad rörelsemängd p till bollen (om man vill kan man tänka sig den som $p = F\,dt$), som ger dess masscentrum en hastighet v åt vänster. Samtidigt tillför den bollen ett rörelsemängdsmoment med avseende på masscentrum $p(h-a)$, som ger den en rotationshastighet w moturs. De enda återstående krafter som verkar på bollen är gravitationskraften och normalkraften från bordet, som precis balanserar varandra. Rörelsemängdslagen, rörelsemängdsmomentlagen, samt villkoret att bollen inte glider mot bordet ger ekvationerna

$$p = mv \qquad (h-a)p = I\omega = (2ma^2/5)w \qquad v = aw$$

Dessa ekvationer ger ett samband mellan h och r (man får det tex genom att dividera andra ekvationens bägge led med första ekvationens motsvarande, samt eliminera w med hjälp av den tredje). Detta samband kan skrivas $h = 7a/5$ som är det sökta svaret.

4. De fyra första kvantiteterna handlar alla om banans storlek och form. Den är ju en ellips som beskrivs av två parametrar, så här finns två konsistensrelationer att kolla. Tex kan banan beskrivas i polära koordinater som $r = c/(1 - e\cos\theta)$. Då är perihelion $r_1 = c/(1+e)$, aphelion $r_2 = c/(1-e)$, halvstoraxeln $a = (r_1 + r_2)/2 = c/(1-e^2)$, halvlillaxel $b = c/\sqrt{1-e^2}$ och $(r_2 - r_1)/2 = ec/(1-e^2)$. Jag väljer följande två samband

$$a = (r_1 + r_2)/20 = (249\,228\,730 + 206\,644\,545)/2\,\text{km} = 227\,936\,637.5\,\text{km}$$
$$e = (r_2 - r_1)/(r_2 + r_1) = 0.093\,412\,330$$

De stämmer så bra som är möjligt. De återstående två givna kvantiteterna beror också på planetens hastighet. De är relaterade till varandra genom att omloppstiden multiplicerad med medelhastigheten är banans längd, $Tv = \ell$, och banans längd är förstås bestämd av de föregående parametrarna. En svårighet är att det inte finns något enkelt uttryck för ellipsens omkrets i tex a och b analogt med cirkelns omkrets uttryckt i radien. Jag utnyttjar i stället att banan är nästan cirkulär till en approximationsmetod: Ellipsens ekvation kan skrivas $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Jämförelse av denna ekvation med "trigonometriska ettan" ger en parameterframställning av de cartesiska koordinaterna, $x = a\sin\psi, \quad y = b\cos\psi$. Differentiering ger

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = ((a\cos\psi)^2 + (b\sin\psi)^2)\,d\psi^2 = a^2(1 - e^2\sin^2\psi)\,d\psi^2,$$
$$d\ell = d\psi\, a\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi} = d\psi\, a(1 - (1/2)e^2\sin^2\psi - (1/8)e^4\sin^4\psi).$$

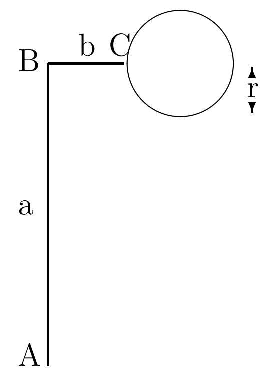
Här har termer av storleksordning e^6 försummats. De är helt försumbara i det aktuella fallet. Detta approximativa uttryck är inte svårt att integrera. Det ger

$$\ell = 2\pi a(1 - e^2/4 - 3e^4/64) = 2\pi(1 - 0.002\,181\,466 - 0.000\,003\,569) = 1\,429\,038\,792\,\text{km}.$$

Medelhastigheten beräknad från givna omloppstiden blir $v = \ell/T = 24.076\,803\,\text{km/s}$. Här är sista siffran insignifikant eftersom T gavs med 7 siffror. Slutsatsen är att de 2 sista givna kvantiteterna är konsistenta med varandra. Man kan också konstatera att e^4-termen inte behövts för denna koll eftersom v givits med bara 5 siffror. En alternativ approximationsmetod som ger rätt e^2-term men fel e^4-term, och som därför dugit i vårt fall, vore att approximera parabelns omkrets med omkretsen av en cirkel vars radie är medelvärdet av halvstoraxel och halvlillaxel.
Slutligen kan vi använda formeln för omloppstiden till att beräkna solens massa M. $(T/2\pi)^2 MG = a^3$ ger med givna sifferuppgifter, $M = 1.9897 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$. Här är de 2 sista siffrorna osäkra eftersom G givits med bara 3 siffror.

5. Inför ett kroppsfixt högerorienterat koordinatsystem sådant att AB ligger på negativa z-axeln och BC på positiva x-axeln. Den stela kroppens rörelse är alltså en ren rotationsrörelse med konstant rotationshastighet på formen $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ kring origo. Uppgiften kan förstås lösas på lite olika sätt. Man kan ställa upp rörelseekvationerna för translation och rotation för hela kroppen. Alternativt kan man dela upp kroppen i delar , och ställa upp rörelseekvationer för dem. Här väljs det senare alternativet. Det blir fler ekvationer eftersom det är flera delar, men de blir enklare eftersom delarna kan väljas mer symmetriska. Jag tänker mig nu den stela kroppen uppdelad i tre delar, vertikala staven AB, horisontella staven BC, och klotet, och ser först på mekaniken för varje del för sig.

Klotets masscentrum rör sig med hastigheten $\vec{v}_k = (b+r)\Omega\hat{z}$, och har därför acceleration $\vec{\Omega} \times \vec{v}_k = -(b+r)\Omega^2\hat{x}$. Det måste därför påverkas av en nettokraft $-(b+r)\Omega^2 m_k\hat{x}$. Denna kraft måste vara en kontaktkraft i C från staven BC, och staven BC måste påverkas i C av dess motkraft $(b+r)\Omega^2 m_k\hat{x}$. Samtliga rörelseekvationer för klotet är uppfyllda med denna enda kraft, så några fler krafter behöver inte verka på det. På liknande sätt finner man att nettokraften på staven BC är $-(b/2)\Omega^2 m_{BC}\hat{x}$, och detta fordrar en kontaktkraft $-(b/2)\Omega^2 m_{BC}\hat{x} - (b+r)\Omega^2 \mu_k\hat{x}$ i B. Med dessa krafter är samtliga rörelsemängds- och rörelsemängdsmoment-ekvationer för staven BC uppfyllda. I B verkar därför motkraften $\vec{F}_B = ((b/2)m_{BC} + (b+r)m_k)\Omega^2\hat{x}$ på AB.



Staven AB, slutligen, har konstant rörelsemängd och konstant rörelsemängdsmoment (de är noll eftersom staven är tunn, så att dess alla delar rör sig med försumbara hastigheter). För den råder därför kraftjämvikt och momentjämvikt. Eftersom enda krafterna på staven är kontaktkrafterna i B, som vi beräknat, och kontaktkrafterna i A, så bestämmer dessa jämviktsekvationer kontaktkrafterna i A. Momentjämvikt map A ger sökta kraftmomentet som verkar på stela kroppen i A,

$$M_A = -a\hat{z} \times \vec{F}_B = -a((b/2)m_{BC} + (b+r)m_k)\Omega^2\hat{y} =$$
$$-1[(0.25/2)(10 \cdot 0.25) + (0.25+0.25)5](10 \cdot 2\pi)^2\hat{y}\text{Nm} = -11.10\text{kNm}\hat{y}.$$

(Dessutom verkar en kraft lika stor som kraften på staven AB i B.)
Anm: Jag har försummat gravitationskraften i denna räkning. Gravitationskrafterna på kulan och på AB ger kraftmoment map A, $((b/2)m_{BC}+(b+r)m_k)g\hat{y} = 0.03$kNm. Tar man hänsyn till gravitationskraften så måste kraftmomentet i A ökas något till $-11.13\text{kNm}\hat{y}$.