Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Torsdagen 30 augusti 2007, 08.30-12.30, M-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar , utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

---

1. Ange, utan motivering, rätt svarsalternativ på delfrågorna a-h. Endast ett alternativ per delfråga. (Det går bra att ringa in på detta blad.)

a) Hur stort är tröghetsmomentet för en smal homogen stav med massan m och längden ℓ med avseende på en axel som är vinkelrät mot staven och skär den på avståndet $\frac{\ell}{3}$ från ena änden?

$\frac{1}{3}m\ell^2$	$\frac{1}{6}m\ell^2$	$\frac{1}{9}m\ell^2$	$\frac{1}{12}m\ell^2$

b) En partikel rör sig med konstant hastighet i ett plan, och rörelsen beskrivs med hjälp av polära koordinater r, ϕ. Vid ett visst ögonblick är $r = 4.00\,\mathrm{m}$, $\dot{r} = 4.00\,\mathrm{m/s}$, $\phi = 0$ och $\dot{\phi} = 0.750\,\mathrm{rad/s}$. Hur stor är partikelns fart?

$4.07\,\mathrm{m/s}$	$4.75\,\mathrm{m/s}$	$5.00\,\mathrm{m/s}$	$7.00\,\mathrm{m/s}$

c) Hur stor är $\ddot{r}$ för partikeln i förra deluppgiften?

$3\,\mathrm{m/s}^2$	$2.25\,\mathrm{m/s}^2$	0	kan ej avgöras

d) Om partikeln i deluppgift b) fortsätter med konstant hastighet i 2 sekunder, vilket är därefter dess läge?

$r \approx 13.4\,\mathrm{m}$, $\phi \approx 0.464\,\mathrm{rad}$	$r \approx 13.4\,\mathrm{m}$, $\phi = 1.50\,\mathrm{rad}$	$r = 12.0\,\mathrm{m}$, $\phi = 1.50\,\mathrm{rad}$	$r = 12.0\,\mathrm{m}$, $\phi \approx 0.464\,\mathrm{rad}$

e) Vilket av följande påståenden är korrekt?

Två huvudtröghetsaxlar svarande mot lika stora huvudtröghetsmoment är alltid ortogonala.	Rörelsemängdsmomentet för en stel kropp är bevarat, förutsatt att det inte förekommer inre dissipativa krafter.	Alla egenvärden till en reell symmetrisk matris är positiva reella tal.	Symmetriaxeln för en rotationssymmetrisk kropp är en huvudtröghetsaxel.

f) En människa åker på ett tåg som har farten 200 km/h. Tåget går i en kurva med radie 5 km. Människan promenerar genom tåget med en fart 2 m/s. Ungefär hur stor, till beloppet, är den corioliskraft hon erfar?

$3 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$ $\quad$ $3 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$ $\quad$ $3\,\mathrm{N}$ $\quad$ $3 \times 10^{4}\,\mathrm{N}$

g) Hur stor vinkel skall tåget i föregående deluppgift luta för att golvet skall upplevas som horisontellt?

$0.019°$ $\quad$ $3.6°$ $\quad$ $19°$ $\quad$ kan ej avgöras

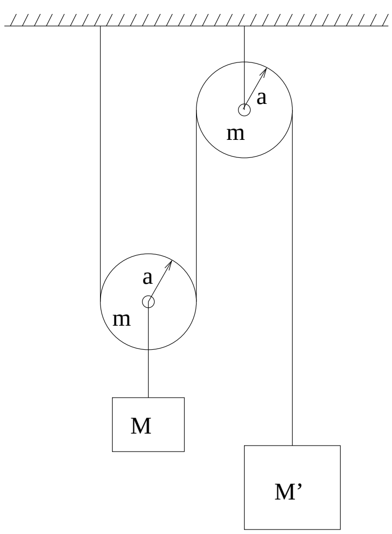
h) En pendel består av ett litet klot med massan m upphängd i ett lätt snöre med längden ℓ. Periodtiden för små svängningar kring jämviktsläget är T. Vad är periodtiden för en lika lång smal stav med samma massa, upphängd i sin ändpunkt?

$\frac{1}{\sqrt{3}}T$ $\quad$ $\sqrt{\frac{2}{3}}\,T$ $\quad$ $\sqrt{\frac{3}{2}}\,T$ $\quad$ $\sqrt{3}\,T$

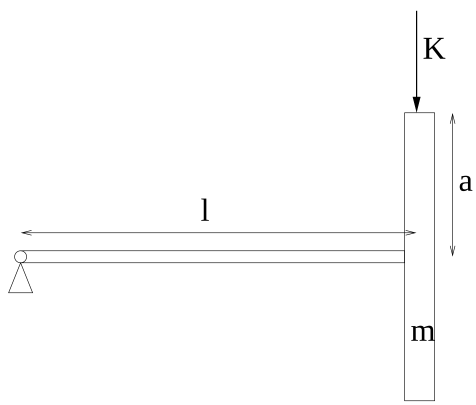
(max 18 poäng: 3 poäng för varje korrekt svar utöver 2 stycken)

2. En stel kropp består av fyra punktmassor, vardera med massan μ. Punktmassorna är sammanfogade med lätta pinnar så att de (i ett koordinatsystem som är fixt relativt kroppen) befinner sig i punkterna $(a\sqrt{3}, 0, a)$, $(-a\sqrt{3}, 0, a)$, $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, -a)$ och $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}, -a)$. Finn huvudtröghetsmoment och huvudtröghetsaxlar för kroppen! Glöm inte att göra någon rimlighetskontroll!
(10 poäng)

3. Två massor M och M' är fästa i ett lätt otänjbart snöre som löper genom block enligt figuren. Vardera blocket kan rotera med försumbar friktion och kan med god approximation ses som en homogen cirkelskiva med massan m och radien a. Friktionen mellan snöre och block är tillräcklig för att förhindra glidning. Hur stora blir massornas accelerationer?
(12 poäng)



4. En rotationssymmetrisk snurra består av en lätt stav med längd ℓ och en homogen cirkelskiva med radie a och massa m. Snurran är friktionsfritt upphängd i stavens ände Den utför reguljär precessionsrörelse med $\theta = \frac{\pi}{2}$ under inverkan av gravitationskraften (se figuren). Sedd ovanifrån sker precessionen moturs med vinkelhastigheten Ω. Vid en viss tidpunkt utsätts snurran för en stor nedåtriktad kraft under en kort tid, vilket resulterar i en impuls (också utritad i figuren) med belopp K. Vad är snurrans rotationsvektor omedelbart därefter? Uttryck svaret i de ovan givna storheterna, samt tyngdaccelerationen g.
(10 poäng)



5. När en kropp rör sig i närheten av jordytan, under inverkan av jordens gravitation, följer den inte riktigt en parabelbana. Dels finns förstås en påverkan av luftmotståndskrafter, men också en effekt av att jorden är rund och inte platt. Låt oss strunta i luftmotståndet (som nästan alltid är väsentligt, men beror mycket på omständigheterna) och fokusera på det senare. Banan kommer att vara elliptisk istället för parabolisk. Antag att man vill att en kropp som startar från jordytan skall landa en sträcka s därifrån (mätt längs jordytan). För enkelhets skull kan vi låta kroppens begynnelsehastighet ha lika stora horisontella och vertikala komponenter. Om man accepterar ett relativt fel $\delta = \Delta s/s$ på nedslagspunkten, uppskatta hur stor s kan vara utan att det “vanliga” uttrycket “$F = mg$” ger ett oacceptabelt resultat. (Man kan anta att sträckan s är mycket mindre än jordradien.)
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i mekanik del 2 för F, den 30/8-2007.

1. Av de 4 svarsalternativen till varje delfråga, numrerade i ordningsföljd, är följande nummer rätt: a) 3, b) 3, c) 2, d) 1, e) 4, f) 3, g) 2, h) 2.

2. Jag kallar koordinaterna (x, y, z). Massfördelningen är oförändrad efter rotation halvt varv kring z-axel, dvs efter transformationen $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$. Härav följer att z-axeln är en huvudtröghetsaxel, och att de två andra ligger i xy-planet. Det är inte svårt att räkna ut tröghetsmatrisen (med avseende på origo). Tex $I_{yy} = \Sigma_{\nu=1}^4 m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2) = \mu a^2(3+3+2+2+1+1+1+1) = 14\mu a^2$, $I_{xy} = -\Sigma_{\nu=1}^4 m_\nu x_\nu y_\nu = -\mu a^2(2+2) = -4\mu a^2$. Tröghetsmatrisen blir
$$I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} 2\mu a^2.$$
Allmänt gäller att om vinkelhastigheten pekar i en huvudtröghetsaxelriktning så är rörelsemängdsmomentet riktat som vinkelhastigheten, och propotionellt mot den, och huvudtröghetsmomentet I är propotionalitetskonstant. Detta faktum ger ett ekvationssystem som kan användas för att beräkna huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment. Dvs man har
$$\sum_b I_{ab}\omega_b = I\omega_a \quad \text{som fordrar} \quad \det(I_{ab} - \delta_{ab} I) = 0.$$
I vårt fall är $\hat{z}$ huvudtröghetsaxel, med huvudtröghetsmomentet $I_{zz} = 14\mu a^2$. De två andra huvudtröghetsaxlarna måste ligga i xy-planet, så för att bestämma dem räcker det att titta på övre vänstra 2 x 2 - undermatrisen av I_{ab}. Determinantekvationen har två lösningar, $I_1 = 6\mu a^2$ och $I_2 = 16\mu a^2$, som alltså är de två återstående huvudtröghetsmomenten. För var och en av dem kan ekvationssystemet användas till att bestämma riktningen av ω. Man finner tex för $I = I_1$ $\omega_x = 2\omega_y$, som ger huvudtröghetsaxelriktningen $\hat{\omega}_1 = (2\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{5}$. På samma sätt finner man den andra huvudtröghetsaxelns riktning $\hat{\omega}_2 = (-\hat{x} + 2\hat{y})/\sqrt{5}$.
Några rimlighetskontroller: Huvudtröghetsaxlarna är ortogonala.
Om vi projicerar huvudtröghetsaxlar och masspunkter i xy-planet, dvs vi ser på systemet från en punkt långt borta på tredje huvudtröghetsaxeln, så delar de andra två huvudtröghetsaxlarna in xy-planet i fyra kvadranter. Man ser då att det ligger en masspunkt i varje kvadrant. Detta är bra. Om två kvadranter blivit utan masspunkter kunde man misstänkt att huvudtröghetsaxlarna blivit felberäknade.

3. Lösning med hjälp av rörelseekvationer: Man frilägger lämpligen minst tre delar av systemet. Låt y, y', ω, ω' vara vertikala koordinater för klossarna och morurs vinkelhastigheter för vänstra och högra trissan respektive. Eftersom snöret är otänjbart och inte slirar på trissorna har man tvångsrelationer mellan dem: $\dot{y}' = a\omega' = -2a\omega = -2\dot{y}$. Därför har systemet bara en oberoende frihetsgrad. Låt T_1, T_2, T_3, vara spänningarna i snörets vänstra, mellersta, och högra vertikala del, respektive. Vi kan nu ställa upp följande rörelseekvationer:
$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{y} &= T_1 + T_2 - (m+M)g, \\ I\dot{\omega} = (I/a)\ddot{y} &= a(T_2 - T_1), \\ I\dot{\omega}' = -2(I/a)\ddot{y} &= a(T_2 - T_3), \\ M'\ddot{y}' = -2M'\ddot{y} &= T_3 - M'g, \end{aligned}$$

där tröghetsmomentet för homogen cirkelskiva är $I = ma^2/2$. Vi adderar dessa ekvationer på sådant sätt att snörspänningarna kancellerar, dvs vi adderar ekvationerna multiplicerade med 1, $1/a$, $-2/a$, -2, respektive. Resultatet blir rörelseekvationen

$$(m + M + m/2 + 4m/2 + 4M')\ddot{y} = (-m - M + 2M')g.$$

Härav följer svaret till frågan i uppgiften, se nedan.
Lösning med hjälp av energilagen: När, som här, systemet har bara en frihetsgrad behövs bara en rörelseekvation och den kan man hitta med hjälp av energilagen. Sammanlagda energin pga translationsrörelse, rotation, och gravitation är

$$\begin{aligned} E &= \Sigma(\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh) = \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}ma^2(\frac{\dot{y}}{a})^2 + \frac{1}{2}ma^2(\frac{2\dot{y}}{a})^2 + (m+M)\dot{y}^2 + M'(2\dot{y})^2] + (M+m)gy + M'g(-2y) = \\ &= \frac{1}{2}(\frac{5}{2}m + M + 4M')\dot{y}^2 + (m + M - 2M')gy. \end{aligned}$$

Denna energi är konserverad, så $\dot{E} = 0$. Tidsderivatan av högerledet innehåller en faktor $\dot{y}$. Dividerar vi med den får vi ekvationen

$$0 = (\frac{7}{2}m + M + 4M')\ddot{y} + (m + M - 2M')g.$$

Den ser ut som en rörelseekvation, och måste vara den vi söker, eftersom det bara finns en. Härledningen av den är invändningsfri om $\dot{y}$ är nollskild. Men ekvationen måste gälla även när $\dot{y} = 0$, eftersom man i så fall kan göra $\dot{y}$ är nollskild genom att ändra startvillkoren, utan att ändra rörelseekvationen.
Svar: Vänstra klossens acceleration uppåt är $\ddot{y}$, den högras $-2\ddot{y}$, med

$$\ddot{y} = \frac{2M' - m - M}{4M' + \frac{7}{2}m + M}g.$$

Anm: Man kan göra flera rimlighetskontroller av svaret. Man kan tex övertyga sig om att det stämmer i de förenklade fallen när bara en av massorna är nollskild, eller att jämvikt är möjlig när täljaren är noll.

4. Först ser jag på precessionsrörelsen före stöten. Beteckningar: $\hat{Z}$= vertikal uppåtriktad enhetsvektor. $\hat{z}$= horisontell enhetsvektor som pekar i snurrans axels riktning från upp hängningspunkten mot skivan. s= snurrans spinn. Snurrans vinkelhastighet ω, rörelsemängdsmoment L, och rörelsemängdsmomentekvationen $\dot{L} = M$ kan nu tecknas. Den sista ger ett uttryck för s.

$$\begin{gathered} \vec{\omega} = \Omega\hat{Z} + s\hat{z}, \\ \vec{L} = m(\ell^2 + a^2/4)\Omega\hat{Z} + m(a^2/2)s\hat{z}, \\ \dot{\vec{L}} = \Omega\hat{Z} \times \vec{L} = m(a^2/2)s\Omega\vec{Z} \times \vec{z} = \vec{M} = \ell\vec{z} \times (-mg\hat{Z}), \\ s = (2\ell g)/(a^2\Omega). \end{gathered}$$

Därmed är snurrans rörelsetillstånd före stöten bestämt. Stöten ger ett rörelsemängdsmomenttillskott. Det nya rörelsemängsmomentet L' och motsvarande vinkelhastighet ω' beräknas:

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \vec{L} + \ell\hat{z} \times (-K\hat{Z}) = m(\ell^2 + a^2/4)\Omega\hat{Z} + m(a^2/2)s\hat{z} + \ell K\vec{Z} \times \vec{z}, \\ \vec{\omega}' &= \Omega\hat{Z} + (2\ell g)/(a^2\Omega)\hat{z} + (\ell K)/(m(\ell^2 + a^2/4))\vec{Z} \times \vec{z}. \end{aligned}$$

Sista raden är det sökta rotationsvektoruttrycket. Observera att vektorerna $\hat{Z}$, $\hat{z}$, $\vec{Z} \times \vec{z}$ bildar en högerorienterad bas.

5. Jag kallar partikelns starthastighet v_0. Den bildar alltså $45°$ vinkel mot jordytan. Om man tänker sig att jorden är platt, och accelerationen $-g\hat{z}$, så blir banan en parabel, högsta höjden $h_p = v_0^2/(4g)$, och flygsträckan $s = 4h_p$. Vi väljer därför starthastigheten så att $v_0^2 = gs$.
Så startar vi partikeln på samma sätt men beräknar rörelsen med Keplers lagar i stället. Då kommer avståndet till nedslagsplatsen, s_p, att skilja sig lite från s. Det finnes flera orsaker till korrektioner. Avståndet mäts nu utefter den krökta jordytan. Banans form är annorlunda. Högsta höjden blir större eftersom större andel av kinetiska energin omvandlas till potentiell, och eftersom gravitationen avtar med höjden. I räkningen som följer beräknas först den nya högsta höjden, h. Därefter den nya banan.
Energi- och rörelsemängsmoment-konseveringslagarna ger, med v_m = hastigheten i banans högsta punkt, M = jordens massa, R = jordens radie:

$$-\frac{MG}{R} + \frac{v_0^2}{2} = -\frac{MG}{R+h} + \frac{v_m^2}{2}, \qquad \frac{Rv_0}{\sqrt{2}} = (R+h)v_m.$$

v_m elimineras med hjälp av rörelsemängdsmomentekvationen. Energiekvationen innehåller kvantiteter av mycket olika storlek. Det kan vara lämpligt att klumpa ihop termer som nästan kancellerar. Jag definierar en liten dimensionslös parameter $x \equiv h/(R+h)$ och räknar på,

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R}{R+h}v_0 = (1-x)\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{1}{2}(v_0^2 - v_m^2) = \frac{MG}{R} - \frac{MG}{R+h} = \frac{MG}{R}x;$$
$$x = \frac{R}{2MG}(v_0^2 - v_m^2) = \frac{Rv_0^2}{4MG}(2-(1-x)^2) \equiv a(2-(1-x)^2) = a(1+x-x^2) \approx a + a^2.$$

Här har jag infört en ny dimensionslös liten parameter $a = (Rv_0^2)/(4MG) = v_0^2/(4gR)$. Sedan har jag uttryckt x i a korrekt till ordning a^2. Detta uttryck beskriver den elliptiska banans höjd h. Denna högre höjd ger längre sträcka. Men vi måste också undersöka hur banans form påverkar sträckan. Vi vet att banan är ellips. Om högsta höjden, $R+h$, inträffar när banvinkelvariabeln $\theta = 0$, så kan banekvationen skrivas

$$r(\theta) = \frac{(R+h)(1-e)}{1 - e\cos\theta}.$$

Banans vinkel mot jordytan är $45°$ vid start och nedslag, dvs

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{-e\sin\theta}{1-e\cos\theta} = \pm 1, \quad \text{när} \quad \begin{cases} \theta = \mp\theta_0 \\ r = R \end{cases}.$$

Detta innebär två samband mellan θ_0, h, R och e,

$$1 - e\cos\theta_0 = e\sin\theta_0, \qquad 1 - e\cos\theta_0 = (1 + h/R)(1-e).$$

Vi eliminerar e, och skriver om ekvationen med målet att kombinera termer som nästan kancellerar när θ_0 är mycket litet.

$$\sin\theta_0 = (1 + \frac{h}{R})(\sin\theta_0 + \cos\theta_0 - 1); \qquad \frac{1-\cos\theta_0}{\sin\theta_0} = \frac{h}{h+R} = x.$$

Nu har vi alla ekvationer vi behöver. Vi löser dem approximativt genom potensserieutveckling

$$x = \theta_0/2 + \theta_0^3/24 + o(\theta_0^5);$$
$$\theta_0 = 2x - (2/3)x^3 + 0(x^5) = 2a(1 + a^2) + o(a^3).$$

slutligen har vi sträckan utefter jordytan mellan start och landning, när a^3-termer försummas, $s_p = 2R\theta_0 = 4Ra(1 + a) = s(1 + a)$. Så $\delta = a = v_0^2/(4gR) = s/(4R)$, och efterfrågade maximala sträcka $s = 4R\delta$. Sammanfattningsvis, går man igenom räkningarna ser man att höjdökningen orsakas till lika delar av ökad andel omvandlad kinetisk energi och minskad gravitationskraft, och ger en ökning av flygsträckan som reduceras till hälften av ändringarna i jordytans och banans form.