Tentamen i Mekanik för F, del 2 (gäller även som tentamen i Mekanik F, del B)
Onsdagen 11 januari 2006, 08.30-12.30, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Tentamen är uppdelad i två delar. Den obligatoriska delen omfattar uppgifterna 1-3, totalt 40 poäng, varav 20 krävs för betyg 3. Förutsatt att kravet för betyg 3 är uppfyllt rättas även överbetygsdelen, uppgifterna 4 och 5. För betyg 4 krävs 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, av maximalt 60 på de två delarna sammanlagt. Lycka till!

Obligatoriska uppgifter

---

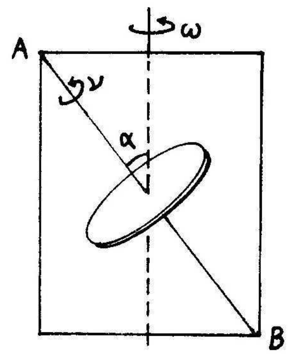
1. En bil kör upp över en kant (t.ex. en trottoirkant). Modellera bilens fjädring med en linjär fjäderkraft och en viskös dämpning. Antag för enkelhets skull att resultatet av att bilen kör upp på kanten är att hela underlaget plötsligt höjs (fram- och bakhjul samtidigt) och att bilens vertikala hastighet inte hinner ändras under detta förlopp, så att man härur får begynnelsevillkor för den efterföljande rörelsen. Lös rörelseekvationen i vertikalled för att få fram tidsförloppet för bilens vertikala rörelse sedan den passerat kanten! Nödvändiga parametrar får införas. Ge ett hyfsat realistiskt exempel på numeriska värden och diskutera händelseförloppet!
(15 poäng)

2. a. En kula kan glida utan friktion på en roterande horisontell skiva med radie R och vinkelhastighet Ω. Om kulan ges en begynnelsefart v (relativt skivan) i en punkt på skivans periferi, vilken riktning skall den ha (relativt skivan) för att passera skivans mittpunkt? Rita!
(4 poäng)

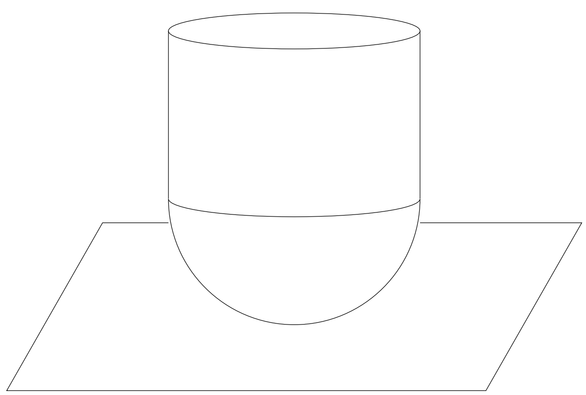
   b. Samma kula och samma skiva som i deluppgift a. Kulan är nu i vila på radien $a \neq 0$ relativt det *inertialsystem* där skivans mittpunkt är i vila. Visa att de fiktiva krafter (centrifugalkraft, corioliskraft) som kulan utsätts för i skivans system (ett roterande system med origo i vila i skivans mitt) tillsammans ger upphov till rätt relativ acceleration!
(6 poäng)

3. En homogent sfäriskt skal med massa μ och radie a rullar utan glidning nedför ett lutande plan med lutningsvinkel θ. Beräkna dess masscentrums acceleration (uttryckt i ovan nämnda storheter samt tyngdaccelerationen g), dels med kraft- och momentekvationer, dels med en energimetod, och jämför resultaten!
(15 poäng)

4. En homogen, tunn, cirkulär skiva med radien r och massan m är vid centrum fäst mitt på en viktlös axel AB vinkelrät mot skivan. Axelns ändpunkter är lagrade i en ram, så att axeln lutar vinkeln α mot vertikalen. Skivan roterar med konstant vinkelhastighet ν relativt ramen, som i sin tur roterar med konstant vinkelhastighet ω kring vertikalen genom skivans centrum. Sök lagerkrafterna i A och B, om tyngdkraften kan försummas. Avståndet mellan A och B är a.
(10 poäng)



5. En kropp är sammansatt av ett homogent halvklot med radien r och en homogen cylinder med radien r och höjden h enligt figuren, båda av samma material med densiteten ρ. För vilka värden på parametrarna är den vertikala positionen i figuren ett stabilt jämviktsläge på ett plant underlag? Bestäm vinkelfrekvensen för små svängningar kring det (friktionen mellan kroppen och underlaget är så liten att den kan anses glida friktionsfritt)!
(10 poäng)



1) Rörelseekvationen för bilens masscentrums position i vertikalled, x, är på formen

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0 - h(t)) - b\frac{d}{dt}(x - h(t)) - mg$$

där $h(t)$ är markens höjd under bilen, k = fjäderkonstant, b = dämpkonstant, x_0 = konstant.

Efter trottoarkantspassagen är $h(t)$ = konstant.

Med lämpligt val av origo har man då ekv.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad , \quad \text{som kan skrivas}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad , \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{m} .$$

Allm. lösn: $x(t) = \left(A\, c(\omega_d t) + B\, s(\omega_d t)\right)e^{-\zeta\omega_n t}$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Antag passagen sker vid tiden $t=0$.

För $t<0$ har man samma ekvation, fast med jämviktsläget $x=-h$, h = trottoarkantens höjd. $\Rightarrow$ Randvillkor: $x(0) = -h \quad \dot{x}(0) = 0$.

dvs $A = -h$, $\quad -\zeta\omega_n A + \omega_d B = 0 \quad\quad B = -\zeta\frac{\omega_n}{\omega_d}h$

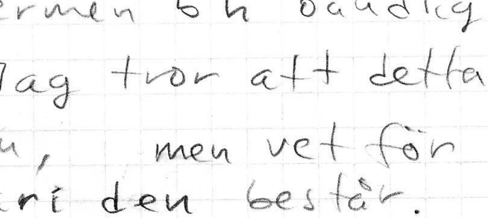
Enligt min erfarenhet av bilfärder är svängningsrörelsen något underdämpad och periodtiden ~ 1 s.

Realistiska parametervärden kan vara

$m = 10^3$ kg $\quad h = 0.1$ m $\quad \omega_n = 10\ s^{-1} \quad \zeta = 0.5$

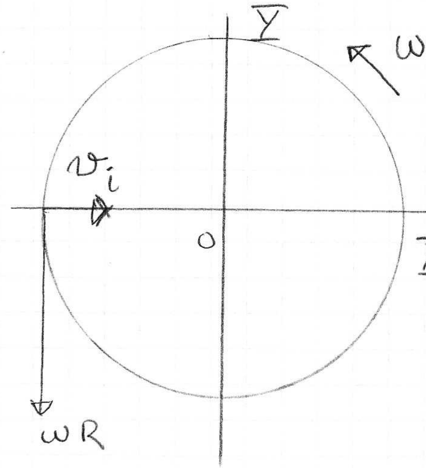
$\omega_d = \omega_n\sqrt{\frac{3}{4}} \quad k = 10^5$ N/m $\quad b = 2\cdot 10^3$ Ns/m

Efter passagen består rörelsen i insvängning mot nytt jämviktsläge:



Anm: En kuriositet: Om rörelseekvationen ovan gäller hela tiden säger termen $b\dot{h}$ oändlig acceleration vid tiden $t=0$. Jag tror att detta antyder en brist hos modellen, men vet för lite om bilar för att säga vari den består.

2) Jag inför inertialsystem $\underline{X}, \underline{Y}$ i vila relativt skivans mittpunkt. (som skivan roterar kring). Inga horisontella krafter på kulan $\Rightarrow$ kulans hastighet = konstant. Den måste då vara riktad radiellt. Vi kan välja tid och system så att $(\underline{X}(t), \underline{Y}(t)) = (v_i t, 0)$.



$\underline{v} = \underline{v}_{kula} - \underline{v}_{skiva} = (v_i, R\omega)$ (se fig), bildar vinkel θ med axeln $\hat{\underline{X}}$

$$R\omega = v \, s(\theta)$$

$$v_i = v \, c(\theta)$$

a) svar: sökta vinkeln θ ges av $\sin\theta = R\omega/v$, orienterad enl fig.

b) Antag nu $(\underline{X}(t), \underline{Y}(t)) = (-R, 0)$.

skivfixa koordinater (x, y) ges av

$$x = \underline{X}\, c(\omega t) + \underline{Y}\, s(\omega t)$$

$$y = -\underline{X}\, s(\omega t) + \underline{Y}\, c(\omega t)$$

För kulan: $(x, y) = -R(c(\omega t), s(\omega t))$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = R\omega(s(\omega t), -c(\omega t))$$

$$(\ddot{x}, \ddot{y}) = R\omega^2(c(\omega t), s(\omega t))$$

$\underline{F}_{cor} = -2m\omega\hat{z} \times (\dot{x}, \dot{y}) = -2m\omega(\dot{y}, -\dot{x}) = 2mR\omega^2(c(\omega t), s(\omega t))$

$\underline{F}_{cf} = -m\omega\hat{z} \times (\omega\hat{z} \times (x, y)) = m\omega^2(x, y) = -m\omega^2 R(c(\omega t), s(\omega t))$

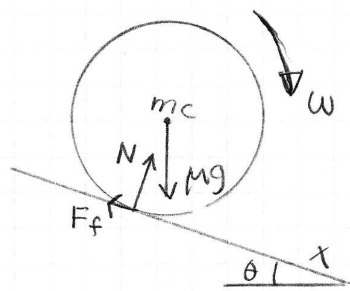
Rörelseekv. $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \underline{F}_{cor} + \underline{F}_{cf}$

stämmer, för $m(\ddot{x}, \ddot{y}) - \underline{F}_{cor} - \underline{F}_{cf}$

$$= (mR\omega^2 - 2mR\omega^2 + mR\omega^2)(c(\omega t), s(\omega t)) = 0.$$

Lösningsskisser, tentamen i mekanik

del 2 den 11/1-2006.



3| Ingen glidning $\Rightarrow$ $a\omega = \dot{x}$

Rörelselagarna för vridning kring mc och mc's rörelse utför planet är

$$I\dot{\omega} = aF_f, \qquad I = \frac{2}{3}\mu a^2$$

$$\mu\ddot{x} = \mu g\, s(\theta) - F_f.$$

$$0 = \ddot{x} - a\dot{\omega} = g\, s(\theta) - \frac{F_f}{\mu} - a^2\frac{F_f}{I} = g\, s(\theta) - \left(1 + \frac{3}{2}\right)\frac{F_f}{\mu}$$

$$\Rightarrow F_f = \frac{2}{5}\mu g\, s(\theta)$$

$$\ddot{x} = \left(1 - \frac{2}{5}\right)g\, s(\theta) = \underline{\underline{\frac{3}{5} g \sin\theta}}$$

Energimetod: $V = -\mu g\, x\, s(\theta)$

$$E_k = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2\left(1 + \frac{2}{3}\right)$$

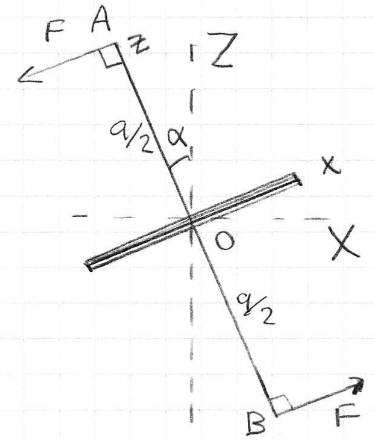
$$E = E_k + V = \frac{1}{2}\frac{5}{3}\mu\dot{x}^2 - \mu g\, x\, s(\theta)$$

Energikonservering: $0 = \dot{E} = \frac{5}{3}\mu\ddot{x}\dot{x} - \mu g\dot{x}\, s(\theta)$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}\ddot{x} - g\, s(\theta) = 0 \qquad \underline{\underline{\ddot{x} = \frac{3}{5} g\, s(\theta).}}$$

4) Använd rörelsemängds-momentlagen $\dot{\underline{L}} = \underline{N}$

ramfixa koordinater (X, Y, Z) och (x, y, z) enl fig.



$$\underline{\omega}_{tot} = \nu \hat{z} + \omega \hat{Z}$$
$$= \left(\nu + \omega\, c(\alpha)\right) \hat{z} + \omega\, s(\alpha)\, \hat{x}$$
$$\underline{L} = I_{\parallel} \left(\nu + \omega\, c(\alpha)\right) \hat{z} + I_{\perp}\, \omega\, s(\alpha)\, \hat{x}$$
$$= L_Z \hat{Z} + L_X \hat{X} \quad \text{säg}$$
$$L_X = - I_{\parallel}\, \nu\, s(\alpha) - \left(I_{\parallel} - I_{\perp}\right) \omega\, c(\alpha)\, s(\alpha)$$
$$\dot{\underline{L}} = L_X \dot{\hat{X}} = L_X\, \omega \hat{Z} \times \hat{X} = L_X\, \omega\, \hat{Y}$$
$$\underline{N} = - a F \hat{Y}$$

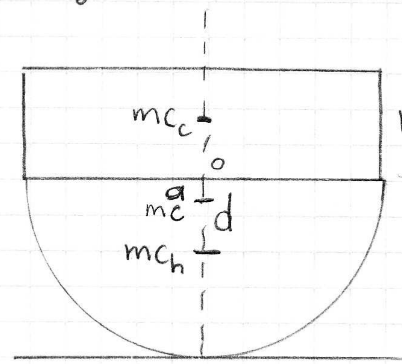
skivans tröghetsmoment $I_{\parallel} = \frac{1}{2} m r^2 \quad I_{\perp} = \frac{1}{2} I_{\parallel}$

sökta lagerkraferna enl. fig. med

$$F = - L_X\, \omega / a =$$
$$= \frac{1}{2} m r^2 \frac{\omega}{a} \left(\nu\, s(\alpha) + \frac{1}{2} \omega\, c(\alpha)\, s(\alpha)\right)$$

5] cylinderns, halvklotets och kroppens massor, masscentra, och tröghetsmoment m.a.p. sina masscentra ges av

$m_c = \pi r^2 h \rho \qquad m_h = \frac{2}{3}\pi r^3 \rho$



$m = m_c + m_h \qquad d = \frac{3}{8} r$

$a = \left(m_h d - m_c \frac{h}{2}\right)/m = \frac{\pi}{4} r^2 (r^2 - 2h^2)\, \rho/m$

$I_c = m_c\left(\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{12} h^2\right)$

$I_h = \frac{83}{320} m_h r^2$

$I = I_c + (h/2 + a)^2 m_c + I_h + (d-a)^2 m_h$

När kroppen vrider sig rör sig mc bara vertikalt (pga inga horisontella krafter), och o bara horisontellt (pga geometrin). Potentiella energin beror därför av vridningsvinkeln θ enl. $V = -mga\cos\theta$.

För små svängningar gäller $E_K \approx \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$
(Masscentrums hastighet $a \sin\theta\, \dot{\theta}$ ger ett försumbart bidrag till E_K).
Energikonservering ger rörelseekvationen $I\ddot{\theta} + mga\theta = 0$, som ger sökta vinkelfrekvensen $\omega^2 = mga/I$.

$\Rightarrow$ villkor för stabilitet: $a > 0$, dvs $r^2 > 2h^2$.