Tentamen i Mekanik för F, del B
Tisdagen 17 augusti 2004, 8.45-12.45, V-huset
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Ling Bao, tel. 7723184

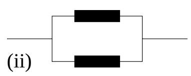
Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, kalkylator i fickformat, samt en egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll.

Alla svar, utom på fråga 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt! Maximal total poäng är 60. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng. Lycka till!

1. Svara på följande fem frågor. Endast svar skall ges. (15 poäng — 3 poäng per korrekt besvarad deluppgift)

   a. Ange SI-enheterna för effekt och för rörelsemängdsmoment uttryckta i grundenheterna kilogram, meter och sekund.

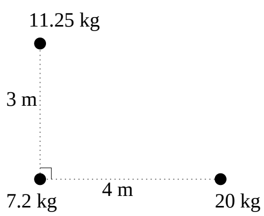
   b. Två fjädrar har fjäderkonstanterna k_1 och k_2. Ange den totala fjäderkonstanten när fjädrarna (i) "seriekopplas" respektive (ii) "parallellkopplas".

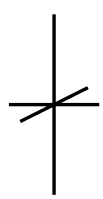


   c. Ett tåg går med farten 200 km/h i en kurva med krökningsradien 2 km. Hur stor vinkel skall tåget luta för att passagerarna skall uppleva det som "horisontellt"?

   d. En stel kropp består av en homogen sfär med massan m och radien r samt en tunn ring med massan m placerad längs sfärens ekvator ($z = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$). Skriv ned tröghetsmomenten m.a.p. x-, y- och z-axlarna samt alla deviationsmoment.

   e. Tre punktmassor är placerade och har massor enligt figuren nedan till vänster. Ange samtliga gravitationskrafter med vilka massorna påverkar varandra, till storlek och riktning. Rita! (Newtons gravitationskonstant är $G \approx 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$.)

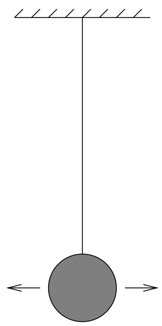




2. En stel kropp är uppbyggd av tunna pinnar med densiteten ρ (massa/längdenhet). Två av pinnarna har längden l och den tredje längden $2l$. De är sammanfogade vinkelrätt mot varandra i mittpunkterna (se figuren ovan). Man vill använda kroppen som en "leksakssnurra". Den ena änden av den längre pinnen är i friktionsfri kontakt med ett glatt horisontellt bord, och lutar en vinkel θ mot vertikallinjen. Om man antar att snurrans rörelse är sådan att θ är konstant i tiden (reguljär precessionsrörelse), sök sambandet mellan spinnet ν och precessionshastigheten Ω i termer av givna storheter. Beskriv också masscentrums rörelse. Luftmotståndet kan försummas. (I denna uppgift är det inte tillåtet att använda någon färdig formel för precessionsrörelsen, utan sådana måste härledas från "$\dot{\mathbb{L}} = \mathbb{M}$".) (20 poäng)

3. Pendeln i ett pendelur består av en tunn cylindrisk pinne med längden 400 mm och radien 1.0 mm, samt en cylindrisk skiva med radien 40 mm och tjockleken 5.0 mm vars masscentrum är stelt fäst i pinnens ände. Båda pendelns delar är av järn, med densiteten 7.87 kg/dm^3. Pendeln påverkas av en litet bromsande vridande moment p.g.a. dess luftmotstånd, som är proportionellt mot vinkelhastigheten med en proportionalitetskonstant 1.0×10^{-5} kg m^{2}s^{-1}. Om uret fick gå i ett lufttomt rum, hur många sekunder för fort skulle det gå per dygn? Pendeln antas utföra små svängningar.

   (Alla räkningar får göras utan hänsyn till att urets mekanik påverkar pendeln. Utan inverkan från urets fjäder skulle pendelns rörelse avstanna. I det här problemet får man räkna med att periodtiden för en svängning förändras av luftmotståndet, men strunta i att amplituden skulle minska med tiden. Resultatet får därför tas som en uppskattning. Om man vill förenkla uppgiften med väl motiverade approximationer är det därför tillåtet.) (15 poäng)



4. Ett isberg som väger 10^{11} kg skall bogseras från Antarktis till nordligare breddgrader. Frågan gäller bogserlinans vinkel mot färdriktningen.

   För att kunna uppskatta vattenmotståndet på isberget kan vi approximera det med en sfär, och försumma det faktum att en liten del av det sticker upp över ytan. Densiteten kan sättas till 10^3 kg/m^3. Vattenmotståndet beter sig olika för laminärt och för turbulent flöde. Vilket som gäller bestäms av Reynoldstalet, $Re = \frac{\rho d v}{\eta}$, där ρ är vattnets densitet, d föremålets typiska diameter, v dess fart och $\eta \approx 1.5 \times 10^{-3}$ kg/(ms) vattnets viskositet. För Reynoldstal mindre än c:a 30 har man laminär strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten enligt $F \approx 6\pi\eta r v$ där r är sfärens radie. För Reynoldstal från c:a 10^3 och uppåt har man turbulent strömning, och vattenmotståndet är proportionellt mot farten i kvadrat enligt $F \approx \frac{1}{2}\rho C_d A v^2$, där A är föremålets tvärsnittsarea och C_d en formfaktor som för en sfär är ungefär 0.5.

   Bestäm, ungefärligen, vilken vinkel bogserlinan bildar med färdriktningen, om isberget bogseras med farten 2 m/s i rakt nordlig riktning och befinner sig på 45° sydlig bredd. Ange också riktning, dvs. om isberget kommer att färdas öster eller väster om bogserbåten. (10 poäng)

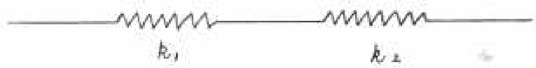
Mekanik för F del B

17 augusti 2004

1. a. Effekt : $[P] = \frac{Nm}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

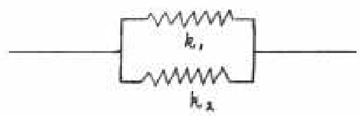
Rörelsemängdsmoment : $[L] = \frac{kg \cdot m^2}{s}$

b. i.



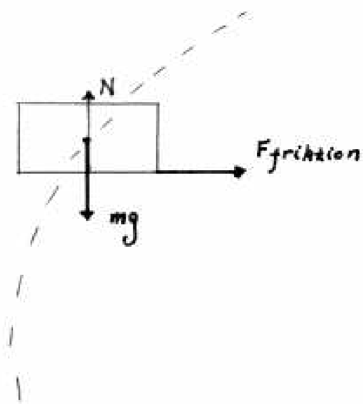
$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

ii.



$k = k_1 + k_2$

c.



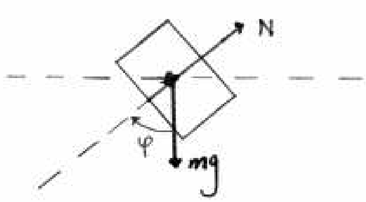
Använd cylindriska koordinater :

$$m\vec{a} = m\{(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \cancel{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}} + \ddot{z}\hat{k}\}$$

$$= \vec{F}$$

$$\Rightarrow \quad mr\dot{\theta}^2\hat{r} = -\vec{F} = +F_{friktion}\,\hat{r}$$

Låt tåget luta så att man känner som "horisontellt" :



$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\begin{cases} mg = N\cos\varphi \\ mr\dot{\theta}^2 = N\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{v^2}{rg}$$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) = 8{,}94°$

d. Homogen sfär

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$

Tunn ring

$I_{xx} = mr^2$

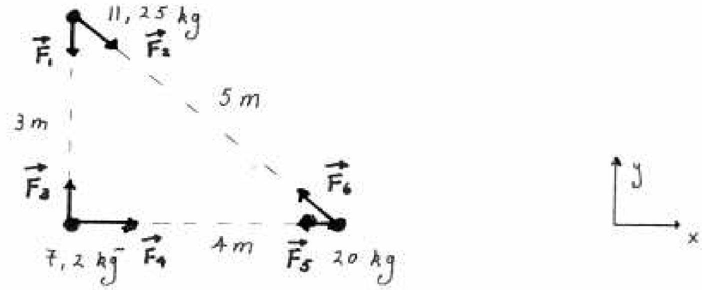
$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 \qquad \left(I_{yy} = \int_0^{2\pi}(r\sin\theta)^2\,\frac{m}{2\pi}\,d\theta\right)$

Summan

Alla deviationsmoment försvinner eftersom kroppens symmetriaxlar sammanfaller med de valda koordinataxlarna.

$$I = \begin{bmatrix} \frac{7}{6}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{6}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}mr^2 \end{bmatrix}$$

e.



$$\vec{F}_1 = \frac{G \cdot 11,25 \cdot 7,2}{3^2}(-\hat{y}) = -6,00 \cdot 10^{-10}\,\hat{y} \quad N$$

$$\vec{F}_2 = \frac{G \cdot 11,25 \cdot 20}{5^2} \cdot \frac{4\hat{x} - 3\hat{y}}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4,80 \cdot 10^{-10}\,\hat{x} - 3,60 \cdot 10^{-10}\,\hat{y} \quad N$$

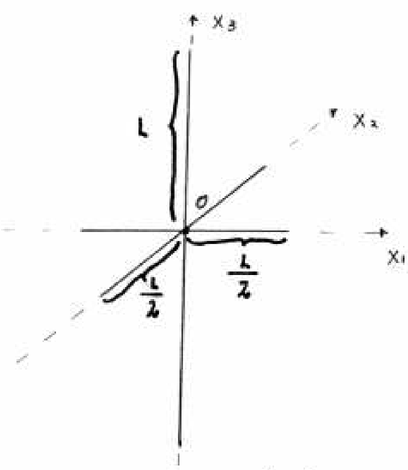
$$\vec{F}_3 = 6,00 \cdot 10^{-10}\,\hat{y} = -\vec{F}_1 \quad N$$

$$\vec{F}_4 = \frac{G \cdot 7,2 \cdot 20}{4^2}\,\hat{x} = 6,00 \cdot 10^{-10}\,\hat{x} \quad N$$

$$\vec{F}_5 = -6,00 \cdot 10^{-10}\,\hat{x} = -\vec{F}_4 \quad N$$

$$\vec{F}_6 = -\vec{F}_2 = -4,80 \cdot 10^{-10}\,\hat{x} + 3,60 \cdot 10^{-10}\,\hat{y} \quad N$$

2.



densitet ρ, $m = 4\rho L$

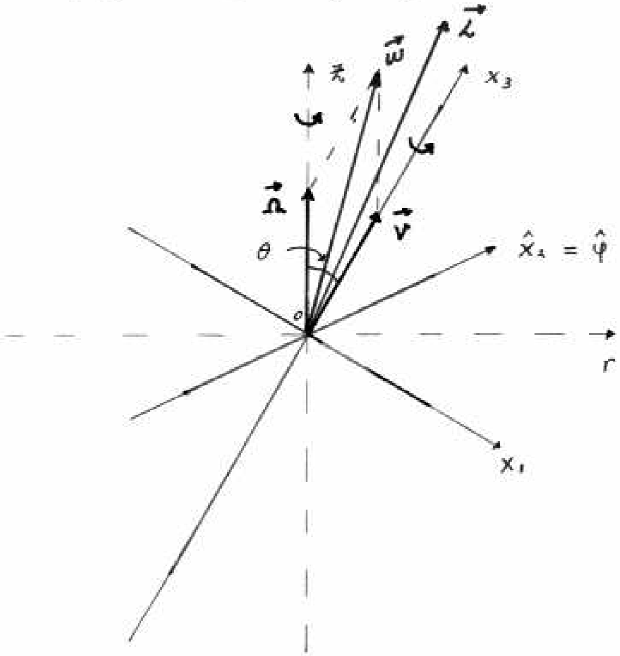
Underlaget är friktionsfritt.

Eftersom underlaget är friktionsfritt, kommer kroppens kontaktpunkten med bordet att röra sig, medan dess masscentrum befinner sig i vila.

Beräkna kroppens tröghetsmoment m.a.p. masscentrum O.

$$\begin{cases} I_1 = 0 + \frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{2}(2L)^2 = \frac{3}{16}mL^2 \\ I_2 = \frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 + 0 + \frac{4}{12}\frac{m}{2}L^2 = \frac{3}{16}mL^2 \\ I_3 = \frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 + 0 = \frac{1}{24}mL^2 \end{cases}$$

$$I = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} m l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} m l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} m l^2 \end{bmatrix}$$



låt $I_\perp = I_1 = I_2 = \frac{5}{12} m l^2$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{x}_1 + \omega_2 \hat{x}_2 + \omega_3 \hat{x}_3 = \Omega \hat{z} + \nu \hat{x}_3$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = I_1 \omega_1 \hat{x}_1 + I_2 \omega_2 \hat{x}_2 + I_3 \omega_3 \hat{x}_3$$

$$= I_\perp \vec{\omega} + (I_3 - I_\perp) \omega_3 \hat{x}_3$$

$$= I_\perp (\Omega \hat{z} + \nu \hat{x}_3) + (I_3 - I_\perp) \omega_3 \hat{x}_3$$

$$\omega_3 = \vec{\omega} \cdot \hat{x}_3 = \Omega \hat{z} \cdot \hat{x}_3 + \nu = \Omega \cos\theta + \nu$$

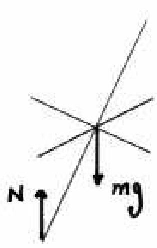
$$\Rightarrow \vec{L} = I_\perp \Omega \hat{z} + [I_\perp \nu + (I_3 - I_\perp)(\Omega \cos\theta + \nu)] \hat{x}_3$$

$$= I_\perp \Omega \hat{z} + [I_3 \nu + (I_3 - I_\perp) \Omega \cos\theta] \hat{x}_3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L} = [I_3 \nu + (I_3 - I_\perp) \Omega \cos\theta] \frac{d\hat{x}_3}{dt},$$

där $\frac{d\hat{x}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}_3 = (\Omega \hat{z} + \nu \hat{x}_3) \times \hat{x}_3 = \Omega \sin\theta \, \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L} = [I_3 \nu + (I_3 - I_\perp) \Omega \cos\theta] \Omega \sin\theta \, \hat{\varphi}$$



Normalkraften: $N = mg \Rightarrow \vec{N} = mg \hat{z}$

Massan: $m = \rho \cdot (l + l + 2l) = 4 \rho l$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{x} \times \vec{F} = (-l \hat{x}_3) \times mg \hat{z} = mgl \sin\theta \, \hat{\varphi}$

(m.a.p. masscentrum O)

Rörelsemängdsmomentlagen : $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$

$$[I_3 \nu + (I_3 - I_\perp)\Omega\cos\theta]\Omega\sin\theta = mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{I_3\Omega}[(I_\perp - I_3)\Omega^2\cos\theta + mgl]$$

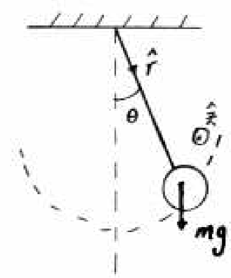
$$= \frac{6}{\Omega m l^2}[\frac{1}{4} m l^2 \Omega^2 \cos\theta + mgl]$$

$$= \frac{3\Omega\cos\theta}{2} + \frac{6g}{\Omega l}$$

Svar : $\nu = \frac{3\Omega\cos\theta}{2} + \frac{6g}{\Omega l}$

Kroppens masscentrum står stilla.

3.



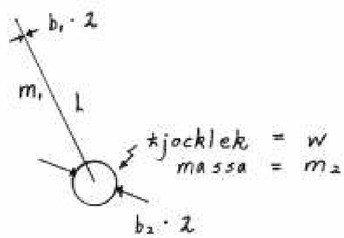
Pendelns massa : $m = \rho V = 0{,}208$ kg

Pendelns masscentrum :

$$\vec{R}_{mc} = \frac{1}{m}(m_1\frac{l}{2} + m_2 l)\hat{r} = \frac{l}{m_1+m_2}(\frac{m_1}{2} + m_2)\hat{r}$$

$m_1 = 0{,}0099$ kg ; $m_2 = 0{,}198$ kg

$m_1 \ll m_2$ { Kan approximera bort pinnen här ! }



$$\vec{R}_{mc} \approx 0{,}98\, l\, \hat{r} = R_{mc}\hat{r}$$

Pendels tröghetsmoment m.a.p. upphängningspunkten :

$$I = I_{pinne} + I_{vikt} = (\frac{1}{4}m_1 b_1^2 + \frac{1}{12}m_1 l^2 + m_1(\frac{l}{2})^2) +$$

$$+ (\frac{1}{2}m_2 b_2^2 + m_2 l^2)$$

$$\approx 0{,}033 \text{ kg m}^2$$

{ Här kan man approximera pendeln med en punktmassa : $I \approx m_2 l^2$. }

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = I\dot{\theta}\hat{z}$$

$$\vec{\tau} = \underbrace{-R_{mc}\cdot mg\sin\theta\,\hat{z}}_{\text{gravitation}} \underbrace{-\mu\dot{\theta}\,\hat{z}}_{\text{luftmotstånd}}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$$

$$I\ddot{\theta} = -R_{mc}mg\sin\theta - \mu\dot{\theta}$$, θ små $\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mu}{I}\dot{\theta} + \frac{R_{mc}mg}{I}\theta = 0$$

Låt $\omega_0 = \sqrt{\frac{R_{mc}\, mg}{I}}$ Pendels frekvens i vakuum

$\gamma = \frac{\mu}{2I}$

$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + B)$

där $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

skillnad i antal sekunder per dygn:

$$\Delta T = \left(\frac{3600 \cdot 24}{2\pi}\omega_0\right) \cdot \frac{2\pi}{\omega} - 3600 \cdot 24$$

$$= 86400\left(\frac{\omega_0}{\omega} - 1\right) = 86400\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}} - 1\right)$$

$$= 86400\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4 I R_{mc}\, mg}}} - 1\right)$$

$$\approx 0{,}000041 \text{ s}$$

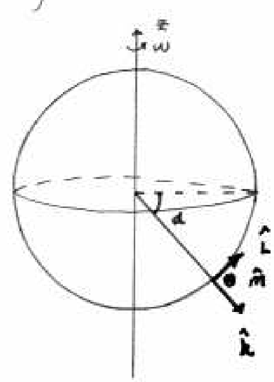
<u>Svar</u>: Om uret skulle stå i ett vakuum skulle det gå 0,000041 s för fort per dygn.

4. $m = 10^{11}$ kg, $\rho = 10^3$ kg/m³ $\Rightarrow V = 10^8$ m³, $R = 288$ m

$v_r = 2$ m/s i rakt nordlig riktning ; $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg/ms

$\Rightarrow Re = \frac{\rho \cdot 2R \cdot v_r}{\eta} \approx 7{,}7 \cdot 10^8 \Rightarrow$ turbulent strömnig

Inför ett koordinatsystem som roterar med jorden.

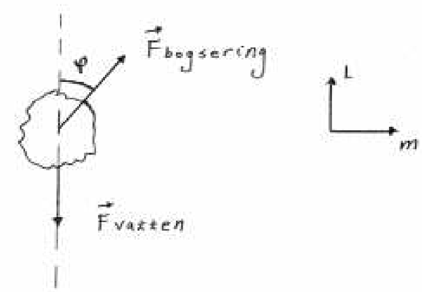


$\hat{k}$: ⊥ jordytan

$\hat{l}$: norrut

$\hat{m}$: österut

$\hat{z} = \cos\alpha\,\hat{l} - \sin\alpha\,\hat{k}$



Dessutom påverkas isberget av coriolikraften och centrifugalkraften. Då isberget rör sig med konstant hastighet norrut, måste det råda kraftjämvikt på lm-planet. $(\ddot{l} = \ddot{m} = 0)$

$$\vec{F}_{bogsering} = F_b \, (\cos\varphi \, \hat{l} + \sin\varphi \, \hat{m})$$

$$\vec{F}_{vatten} = - \frac{1}{2} \rho \, C_d \, A \, V_r^2 \, \hat{l} \qquad \text{(turbulent flöde)}$$

$$\vec{F}_{corioli} = -2m \, (\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}) = -2m \, (\omega \hat{z}) \times (V_r \hat{l})$$

$$= -2m \omega V_r \, (\cos\alpha \, \hat{l} - \sin\alpha \, \hat{k}) \times \hat{l} = -2m \omega V_r \sin\alpha \, \hat{m}$$

$$\vec{F}_{centrifugal} = -2m \, \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -2m \, (\omega \hat{z}) \times [(\omega \hat{z}) \times (L \hat{l})]$$

$$= -2m \omega^2 L \, \hat{z} \times [(\cos\alpha \, \hat{l} - \sin\alpha \, \hat{k}) \times \hat{l}]$$

$$= -2m \omega^2 L \, (\cos\alpha \, \hat{l} - \sin\alpha \, \hat{k}) \times (\sin\alpha \, \hat{m})$$

$$= 2m \omega^2 L \sin\alpha \, (\cos\alpha \, \hat{k} + \sin\alpha \, \hat{l})$$

Jämvikt i l-led : $F_b \cos\varphi - \frac{1}{2} \rho \, C_d \, A \, V_r^2 + 2m\omega^2 L \sin^2\alpha = 0$

Jämvikt i m-led : $F_b \sin\varphi - 2m\omega V_r \sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_b \sin\varphi = 2m\omega V_r \sin\alpha \\ F_b \cos\varphi = \frac{1}{2} \rho \, C_d \, A \, V_r^2 - 2m\omega^2 L \sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{2m\omega V_r \sin\alpha}{\frac{1}{2} \rho \, C_d \, A \, V_r^2 - 2m\omega^2 L \sin^2\alpha}$$

Sätt in : $m = 10^{11}\,\text{kg}$; $\omega = \frac{2\pi}{3600 \cdot 24}\,\text{s}^{-1}$; $V_r = 2\,\text{m/s}$; $\alpha = 45°$

$\rho = 10^3\,\text{kg/m}^3$; $C_d = 0,5$; $A = 260000\,\text{m}^2$; $L = 0$

$\tan\varphi \approx 0,079 \qquad \Rightarrow \quad \varphi \approx 4,515°$

$$\vec{F}_{bogsering} = F_b \, (0,997 \, \hat{l} + 0,079 \, \hat{m})$$

<u>Svar</u> : $\varphi = 4,515°$

Isberget kommer att färdas väster om bogserbåten.