Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Tisdagen den 19 augusti 2003 kl 08.45 - 12.45 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Vilken av de två pendlarna har längst svängningstid? (Stängernas massa försummas. Stången och de två massorna i den högra pendeln rör sig tillsammans som en stel kropp.)

   b) Man har tillverkat tre klot med samma massa och radie. Klot Pb består av ett ihåligt sfäriskt skal av bly (densitet $11,3 g/cm^3$). Klot Al är ett massivt aluminiumklot (densitet $2,7 g/cm^3$). Klot Hg är gjort av en lätt plast (försumbar densitet), men har ett sfäriskt hålrum i mitten som är fyllt med flytande kvicksilver (densitet $13,6 g/cm^3$). Rangordna de tre kloten efter hur snabbt de rullar nerför ett lutande plan vid start i vila.

2. Betrakta en plan stel kropp. Dess tröghetsmomentet I_A med avseende på en axel vinkelrät mot kroppen genom en punkt A beror av läget för A. Visa att I_A antar sitt minsta värde då A sammanfaller med kroppens tyngdpunkt G.

3. Kedjan har längden L och massan ρ per längdenhet. Den släpps i vila när längden x av den del som hänger över kanten är försumbart liten. Bestäm kedjans acceleration a och spänning T i kedjan vid hörnet som funktioner av x.

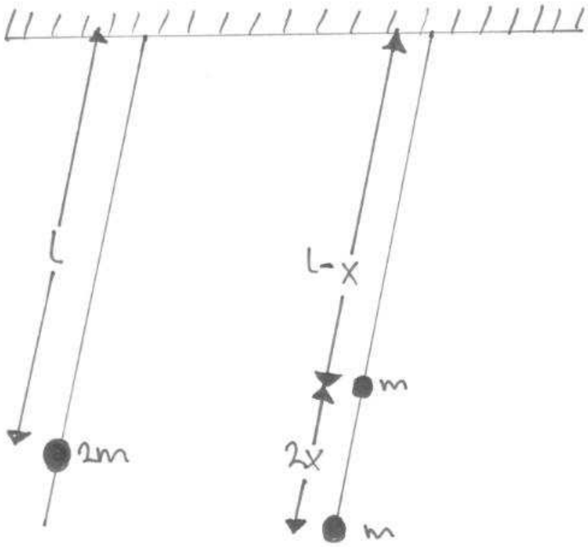
4. Den homogena stången har massan m. Den släpps i vila när den är vertikal. Bestäm den momenta accelerationen för ändpunkten A omedelbart därefter. (Friktionen försummas.)

5. De två homogena stängerna har vardera massan m. De utgör en stel kropp som roterar kring z-axeln med den konstanta vinkelhastigheten ω. Bestäm systemets rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_O$ med avseende på origo O.

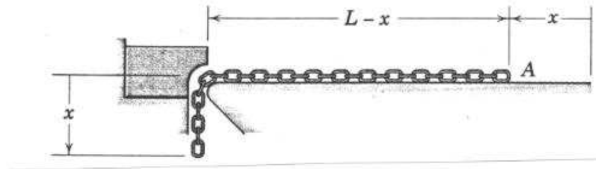
6. En kula med massan $0,70 kg$ är upphängd i en lätt tråd med längden $2,3 m$ och utför en plan pendelrörelse med liten amplitud. Efter tiden $47 s$ har utslagsvinkeln minskat till hälften av den ursprungliga på grund av luftmotståndet. Vi antar att luftmotståndet kan beskrivas med en kraft $\mathbf{F}$ som angriper i kulan och är motriktad kulans hastighet $\mathbf{v}$, samt att $|\mathbf{F}| = c|\mathbf{v}|$, där c är en konstant. Vad får man för värde på c?

Lycka till!

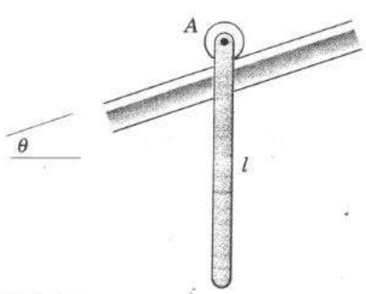
1. a)



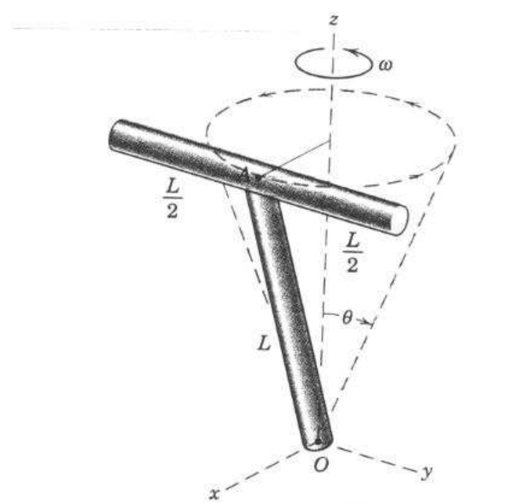
3.



4.



5.



Tentamen i Mekanik för F del B

19 augusti 2003

1a) Systemet med de två massorna har längst svängningstid. Tröghetsmomentet för detta system är $I_{dubbel} = m((l-x)^2 + (l+x)^2) = 2m(l^2 + x^2)$ vilket skall jämföras med det enkla systemet, $I_{enkel} = 2ml^2$. Dvs $I_{dubbel} > I_{enkel}$ vilket medför att svängningstiden är längre för systemet med två massor. Rörelseekvationen för en fysisk pendel ges ju utav

$$I\ddot{\theta} + 2mgl\theta = 0, \quad \text{där} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mgl}}.$$

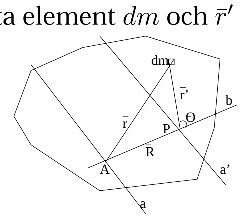
Detta kan också inses om vi låter $x \to l$ vilket gör att längden på pendeln blir dubellt så lång och eftersom svängningstiden $T \sim \sqrt{r/g}$ (där r är längden på pendeln) följer det att T ökar då r ökar.
1b) Kulornas totala kinetiska energi kommer att vara lika stor efter att de rullat lika lång sträcka. Dess storlek ges av

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

dvs ju större tröghetsmoment kulan har desto mer energi går åt att rotera kulan istället för att translatera den. Tröghetsmomentet för det sfäriska skalet är $I_{Pb} = \frac{2}{3}mR^2$, och det massiva aluminiumklotet $I_{Al} = \frac{2}{5}mR^2$. Klotet med ett hålrum fyllt med flytande kvicksilver har försumbart tröghetsmoment ($I_{Hg} \approx 0$). Detta gör att relationerna för hastigheterna blir

$$v_{Hg} > v_{Al} > v_{Pb}.$$

2 Låt en axel a gå genom en godtycklig punkt A och en parallell axel a' genom tyngdpunkten G. Rita ut en vinkelrät linje b från axel a genom axel a'. Punkten där dessa korsas kallar vi P och vektorn mellan P och A, $\bar{R}$. Välj ett godtyckligt masselement dm och låt $\bar{r}$ vara vektorn från A till detta element dm och $\bar{r}'$ vektorn mellan P och dm som bildar vinkel θ med linje b.



Tröghetsmomentet ges utav $I = \int r^2 dm$.

Cosinussatsen ger att $r^2 = R^2 + r'^2 + 2Rr' \cos\theta$, dvs

$$I_A = R^2 \int dm + \int r'^2 dm + 2R \int r' \cos\theta dm$$

Den första termen är mR^2, den andra tröghetsmomentet för tyngpunkten I_G och den sista termen är noll eftersom $r' \cos\theta$ är vinkelrät mot axel a' och börjar där dessa skär varandra. (En summering över alla vinkelräta avstånd till masselementen är ju noll eftersom vi utgår ifrån axeln genom tyngdpunkten.) Vi har alltså att

$$I_A = I_G + mR^2$$

vilket antar sitt minsta värde då $R = 0$, dvs då A sammanfaller med G.
3 Vi tänker oss kedjan som bestående av två delar, en som hänger över kanten med längden x, och en del som rör sig utmed planet med längden $L - x$. Newtons andra lag ger nu

$$\rho x g - T = \rho x \ddot{x} \qquad \text{och} \qquad T = \rho(L-x)\ddot{x}$$

där T är spännkraften i kedjan och ρ massan per längdenhet. Med hjälp av dessa ekvationer finner vi accelerationen $\ddot{x}$ och spännkraften T som funktioner av x:

$$\ddot{x} = \frac{g}{L}x \qquad\qquad T = \rho g x(1 - \frac{x}{L})$$

4 Inför en x-axel riktad nedåt utmed det lutande planet, dvs i acc. riktningen för punkten A. Kraftmomentet kring punkten A ges av

$$\Sigma M_A = I\alpha + \Sigma m\bar{a}d$$

där d är det vinkelräta avståndet mellan acc. riktningen för stångens tyngdpunkt och A. Om vi inför polära koordinater och låter $l = 2r$ så fås att $I = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{3}mr^2$ och $0 = \frac{1}{3}mr^2\alpha + mr\alpha r - mar\cos\theta$, dvs

$$\alpha = \frac{3a\cos\theta}{4r}$$

Vi har också Newtons andra lag i x-led:

$$ma - mr\omega^2\sin\theta - mr\alpha\cos\theta = mg\sin\theta$$

Den momentana accelerationen a för punkten A vid start i vila ($\omega = 0$) fås genom att kombinera de två utrycken så att

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta}$$

Alternativ lösning: Inför koordinatsystem med y-axeln riktad uppåt längs med den homogena stången och x-axeln vinkelrät mot denna. Inför också vinkelhast. ω och vinkelacc. α för stången. Accelerationen för tyngdpunkten G kan nu skrivas som $\bar{a}_G = a_A(-\cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{y}) + \frac{1}{2}l\omega^2\hat{y} + \frac{1}{2}l\alpha\hat{x}$. Newtons andra lag i x- och y-led samt en kraftmomentsekvation kring tyngpunkten G ges av

$$\begin{aligned} -N\sin\theta &= m(-a_A\cos\theta + \frac{1}{2}l\alpha) \\ N\cos\theta - mg &= m(-a_A\sin\theta + \frac{1}{2}l\omega^2) \\ N\sin\theta\frac{l}{2} &= I\alpha \end{aligned}$$

där N är normalkraften och $I = \frac{1}{12}ml^2$. Lösning av detta ekvationssystem ger den momentana accelerationen a_A given ovan.

5 Inför principalaxlar x', y', z' utmed den stela kroppen, med vinkeln θ mellan z'- och z-axeln. Detta leder till att matrisen för tröghetsmomentet endast har nollskilda element i diagonalen (dvs deviationsmomenten är noll)

$$I = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$

där $I_{x'x'} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{3}mL^2 + mL^2 = \frac{17}{12}mL^2, I_{y'y'} = \frac{1}{3}mL^2, I_{z'z'} = \frac{1}{12}mL^2$. För att relatera våra två koordinatsystem inför vi enhetsvektorer $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ utefter x', y' resp. z'-axlarna.

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{z} & \hat{x} &= \cos\theta\hat{x}' + \sin\theta\hat{z}' \\ \hat{y}' &= \hat{y} & & \\ \hat{z}' &= \sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z} & \hat{z} &= -\sin\theta\hat{x}' + \cos\theta\hat{z}' \end{aligned}$$

Vinkelhastigheten kan nu skrivas som $\bar{\omega} = \omega\hat{z} = \omega(-\sin\theta\hat{x}' + \cos\theta\hat{z}')$ vilket medför att rörelsemängdsmomentet

$$\bar{H} = \bar{\omega}\cdot I = -\omega I_{x'x'}\sin\theta\hat{x}' + \omega I_{z'z'}\cos\theta\hat{z}' = -\frac{4}{3}\omega mL^2\sin\theta\cos\theta\hat{x} + (\frac{1}{12}\omega mL^2 + \frac{4}{3}\omega mL^2\sin^2\theta)\hat{z}$$

Alternativ lösning: Om vi inte inför principalaxlar behöver vi räkna ut I_{zz} och deviationsmomenten I_{yz} och I_{xz} eftersom

$$\bar{H} = -\omega I_{xz}\hat{x} - \omega I_{yz}\hat{y} + \omega I_{zz}\hat{z} \tag{14}$$

där $I_{xz} = \int xzdm = \frac{m}{L}\int_0^L l\sin\theta l\cos\theta dl + \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2} L\sin\theta L\cos\theta dy = \frac{4}{3}mL^2\sin\theta\cos\theta$, $I_{yz} = \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2} yzdy = 0$ och $I_{zz} = \int(x^2+y^2)dm = \frac{m}{L\sin\theta}\int_0^{L\sin\theta} x^2\sin^2\theta dx + \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2}(L^2\sin^2\theta + y^2)dy = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{4}{3}mL^2\sin^2\theta$. Insättning i uttrycket för rörelsemängdsmomentet ger nu samma resultat som ovan.

6 Genom att lösa rörelseekvationen för den dämpade svängningsrörelsen och sedan studera kvoten mellan uttrycken för utslagsvinkeln vid tiden $t = 0$ och $t = 47s$ kan vi ta fram storleken på c. Inför polära koordinater r, θ och sätt upp Newtons andra lag i $\hat{\theta}$-led:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - cl\dot{\theta}$$

För små vinklar ($\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$) fås ekvationen för en dämpad svängningsrörelse

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

där $\gamma = \frac{c}{2m\omega_0}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Lösningen ges utav

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}t + \delta)$$

där δ är en fasfaktor. Kvoten för detta uttryck vid tiden $t = 0$ och $t' = 47s$ är 2 (vinkeln då pendeln är i sitt vändläge är ju halverad efter $47s$) dvs

$$2 = \frac{\theta(0)}{\theta(t')} = \frac{A}{Ae^{-\gamma\omega_0 t'}}$$

Lösning av denna ekvation och insättning av givna värden $m = 0.70kg, t' = 47s$ ger

$$c = \frac{2m\ln 2}{t'} = 0.021kg/s$$