Tentamen i Mekanik för F del B

Kurskod: FFM052
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 13 januari 2003 kl 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) En helikopters rotor roterar motsols sedd ovanifrån. När helikoptern hovrar (d v s står stilla i luften) är rotorn horisontell, men när helikoptern sedan skall börja röra sig framåt låter piloten den tippa kring en horisontell axel så att nosen sänks. Härvid uppstår en gyroskopverkan så att helikoptern även tippar i sidled. Är det helikopterns vänstra eller högra sida som sänks?

   b) En massa m är fäst i en icke-linjär fjäder som påverkar den med kraften $F = kx + \lambda x^3$, där k och λ är konstanter och x är avvikelsen från jämviktsläget. Systemet kan utföra en svängningsrörelse med amplituden $x_{\max}$ och svängningstiden T. Om $\lambda = 0$, blir svängningstiden $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ oberoende av amplituden $x_{\max}$. Om $\lambda > 0$, blir då T en avtagande eller växande funktion av $x_{\max}$?

2. Utgå från Newtons andra lag $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, där $\mathbf{F}$ är den totala yttre kraft som verkar på ett givet materiellt system med rörelsemängden $\mathbf{p}$. Härled därifrån rörelseekvationen för en raket med massan $m(t)$ som påverkas av en yttre kraft $\mathbf{F}(t)$. Raketens hastighet är $\mathbf{v}(t)$, och den massa som lämnar raketen har hastigheten $\mathbf{u}(t)$ relativt raketen. (*Ledning:* Det gäller alltså att ställa upp en differentialekvation från vilken man kan lösa ut $\dot{\mathbf{v}}(t)$ uttryckt i $\mathbf{F}(t)$, $m(t)$, $\dot{m}(t)$ och $\mathbf{u}(t)$.)

3. Hylsan A rör sig med konstant hastighet v. Bestäm vinkelhastigheten ω för stången AB uttryckt i s, v och R.

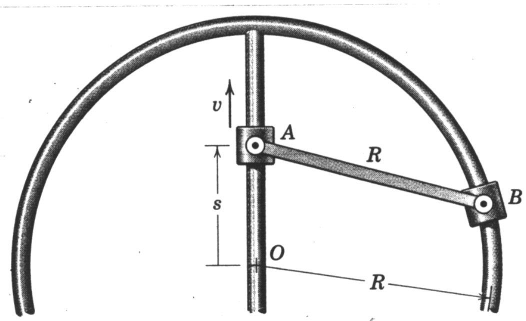
4. Den tunna ringen har massan m och kan fritt rotera i vertikalplanet kring den fixa punkten O. Om den släpps i vila då $\theta = 0$, bestäm n- och t-komponenterna av kraften som påverkar ringen i O som funktioner av θ.

5. Bestäm systemets rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_0$ med avseende på O i det avbildade ögonblicket. Klotens radie samt massan för axeln och stängerna kan försummas.

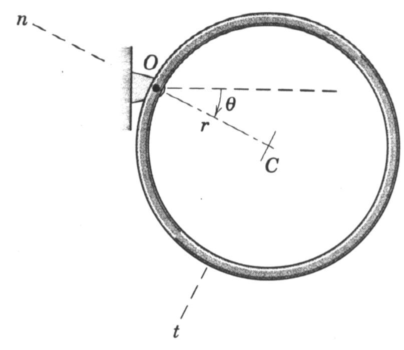
6. Ställ upp systemets rörelseekvation och bestäm dess naturliga vinkelfrekvens ω_n och dämpfaktor ζ.

Lycka till!

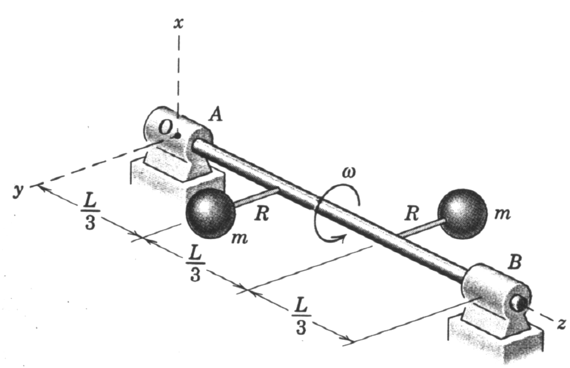
3.


v
A
R
B
s
O
R

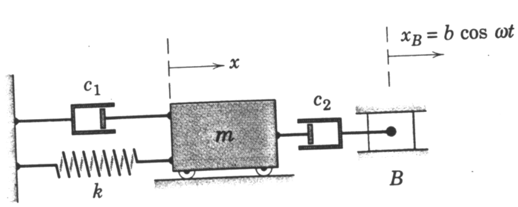
4.


n
O
θ
r
C
t

5.


x
O
A
y
ω
L/3
R
R
m
m
L/3
B
L/3
z

6.


$x_B = b \cos \omega t$
x
c_1
c_2
m
k
B

Tentamen i Mekanik för F del B

13 januari 2003

1a) Helikopterns rotor roterar motsols så att rörelsemängdsmomentet är riktat uppåt och dess tidsderivata framåt. Antag att vi lägger på ett yttre moment så att nosen på helikoptern inte sänks på någon sida, dvs så att nosen pekar rakt fram. För att åstadkomma detta måste ett moment som drar nosen åt höger läggas på. I frånvaro av detta yttre moment kommer alltså helikopterns vänstra sida att sänka sig.
b)Med $\lambda = 0$ har vi en linjär fjäder med $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, där k ges av lutningen i kurvan $F = kx$. Med $\lambda > 0$ fås en brantare lutning på kurvan $F = kx + \lambda x^3$ med ökande x_{max} vilket gör att T kommer att avta som funktion av x_{max}.
2 Skriv upp rörelsemängden före och efter ett tidssteg Δt:

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= (M + \Delta m)\bar{v} \\ \bar{p}(t + \Delta t) &= M(\bar{v} + \Delta\bar{v}) + \Delta m(\bar{v} + \bar{u}) \end{aligned}$$

där M,Δm är massan för raketen resp. det förbrukade bränslet under tiden Δt. $\bar{v}$ och $\Delta\bar{v}$ är hast. för raketen resp. dess förändring, $\bar{u}$ är förbränningsgasernas hastighet relativt raketen. Detta medför att

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \lim_{t\to 0}\frac{\bar{p}(t + \Delta t) - \bar{p}(t)}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\frac{M\Delta\bar{v} + \Delta m\bar{u}}{\Delta t} = M\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\bar{u}.$$

Med $\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$ fås att

$$\dot{\bar{v}}(t) = \frac{1}{M}(\bar{F}(t) + \dot{M}(t)\bar{u}(t)).$$

3 Vi har ett tvång på systemet för den rätvinkliga triangeln med sidorna $R, s/2, R\sin\theta$

$$(R\sin\theta)^2 + \frac{s^2}{4} = R^2$$

där θ är en av de två vinklarna som är lika stora i den likbenta triangeln som bildas av sidorna med längderna R, R, S. Derivera båda sidor m.a.p tiden så fås uttrycket ($\dot{s} = v$)

$$\dot{\theta} = \frac{-v}{\sqrt{4R^2 - s^2}}.$$

Vinkelhastigheten för stången kommer nu att bli $\omega = -\dot{\theta} = v(4R^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$, medsols rotation.
4 Vi skall räkna ut krafterna O_t, O_n riktad i $-\hat{t}$-led och $\hat{n}$-led, med hjälp av Newtons andra lag. Vi behöver då accelerationens t, n komponenter som ju är $a_t = r\alpha$ och $a_n = r\omega^2$ Då kraftmomentet $M = I\alpha$, där α är vinkelaccelerationen och tröghetsmomentet $I = I_c + mr^2$. Den tunna ringen har tröghetsmomentet $I_c = mr^2$, vilket medför att $I = 2mr^2$. Eftersom kraftmomentet kring pkt O är $M = mgr\cos\theta$ fås att

$$\alpha = \frac{mgr}{I}\cos\theta = \frac{g}{2r}\cos\theta.$$

Nu behöver vi endast ta fram ett uttryck för vinkelhastigheten så kan vi lösa ut våra efterfrågade kraftkomponenter. Genom att använda att $\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \alpha d\theta$ (ringen släpps ju i vila vid $\theta = 0$) fås att $\omega^2 = \frac{g}{r}\sin\theta$, vilket i sin tur leder till Newtons andra lag:

$$\begin{aligned} O_n - mg\sin\theta = mr\omega^2 &\quad\to\quad O_n = 2mg\sin\theta \\ -O_t + mg\cos\theta = mr\alpha &\quad\to\quad O_t = \frac{1}{2}mg\cos\theta \end{aligned}$$

där O_n är riktad i $\hat{n}$-led och O_t i $-\hat{t}$-led från punkten O.

5 Vinkelhastigheten $\bar{\omega} = \omega\hat{z}$ så att rörelsemängdsmomentet m.a.p O i det avbildade ögonblicket blir

$$\bar{H}_O = -\omega I_{xz}\hat{x} - \omega I_{yz}\hat{y} + \omega I_{zz}\hat{z}$$

där I_{xz}, I_{yz} är deviationsmoment. Vi har att

$$\begin{aligned} I_{zz} &= mR^2 + mR^2 = 2mR^2 \\ I_{yz} &= \frac{1}{3}mRL - \frac{2}{3}mRL = -\frac{1}{3}mRL \\ I_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

och slutligen

$$\bar{H}_O = \frac{1}{3}m\omega RL\hat{y} + 2m\omega R^2\hat{z}.$$

6 Vi ställer upp rörelseekvationen och identifierar sedan dämpfaktorn ζ och vinkelfrekvensen ω_n. Ur figuren ser vi att $c_1\dot{x}, kx, c_2\dot{x}$ kommer att motverka rörelsen i x-led medan $c_2\dot{x}_B$ kommer att vara en drivande faktor. Newtons andra lag kommer nu att se ut så här:

$$m\ddot{x} = -c_1\dot{x} - c_2\dot{x} - kx - c_2\omega b\sin\omega t$$

vilket också kan skrivas som

$$\ddot{x} = -\frac{(c_1 + c_2)}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x - \frac{c_2\omega b}{m}\sin\omega t$$

eller på standardformen

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = -\frac{c_2\omega b}{m}\sin\omega t.$$

Identifiera nu den dimensionslösa dämpfaktorn ζ och vinkelfrekvensen ω_n;

$$\zeta = \frac{(c_1 + c_2)}{2m\omega_n}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$