Tentamen i Mekanik F del B

Tid och plats: Tisdagen den 20 augusti 2002 kl 09.15 - 13.15 i V.
Jourhavande assistent: Niclas Jacobson, ankn 8425.
Hjälpmedel: Valfria tabellsamlingar, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Gränsen för godkänt är 30 p.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. a) En bil färdas rakt österut på en väg i Göteborgstrakten. På grund av jordrotationen påverkas den av en Corioliskraft, som kan uppdelas i en vertikalkomponent och en horisontalkomponent. Åt vilket väderstreck är horisontalkomponenten riktad? (5 p)

   b) En ström av masslösa neutrinopartiklar färdas med ljushastigheten $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s från solen mot jorden. Deras bana korsas i rät vinkel av ett rymdskepp, som färdas med hastigheten $v = 2,0 \cdot 10^8$ m/s (relativt jorden och solen). Hur stor hastighet har neutrinopartiklarna relativt rymdskeppet? (5 p)

2. Ett mekaniskt system beskrivs med en generaliserad koordinat q och Lagrangefunktionen $L = K - V$. De kinetiska och potentiella energierna är av formen $K = f(q)\dot{q}^2$ respektive $V = V(q)$, där f och V är vissa givna funktioner av q. Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, det vill säga att $\frac{d}{dt}E = 0$.

3. En vagn med massan M kan röra sig friktionslöst längs ett horisontellt spår och är förbunden med en fix punkt på spåret med en fjäder med fjäderkonstanten k. Från vagnen hänger en kula med massan m (och tyngden mg) i ett snöre med längden l. Kulan pendlar i ett vertikalplan genom spåret som vagnen rör sig på. Skriv upp Lagranges ekvationer för detta system och bestäm vinkelfrekvenserna för små svängningar omkring jämviktsläget.

4. En homogen stång med längden l och massan m är i sin mittpunkt fäst på en axel som bildar vinkeln α med stången. Axeln är friktionslöst lagrad i två kullager på avståndet d från varandra, och roterar med vinkelhastigheten ω. Beräkna kraften från axeln på vardera lagret. (Tyngdkraften får försummas.)

Vänd!

5. Emil står först stilla på en karusell som roterar med vinkelhastigheten Ω och börjar sedan plötsligt gå i riktning mot centrum med hastigheten v. Framför sig håller han en matematisk pendel som bara kan göra utslag i ett vertikalplan vinkelrätt mot hans gångriktning.

   Bestäm pendelns utslagsvinkel när den har kommit i jämvikt (5 p).

   Bestäm även dess maximala utslagsvinkel om den hängde stilla rakt ned när Emil började gå (5 p).

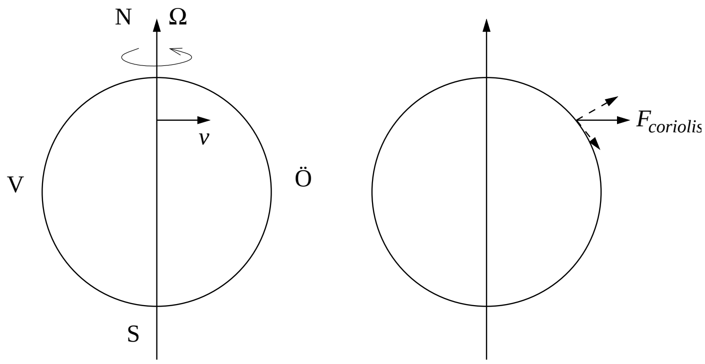
6. En foton med energin E kolliderar med en elektron i vila (vilomassa m_0). Efter kollisionen består systemet av elektronen samt en foton som rör sig i 90^o vinkel relativt den inkommande fotonen. Bestäm den utgående fotonens energi.

Lycka till!

Lösningar till Tentamen i Mekanik F del B 2002-08-20

Uppgift 1.

a)

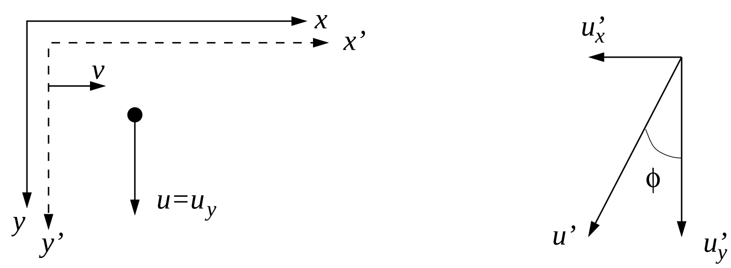


Om $\mathbf{\Omega}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}$ är bilens hastighet (relativt jorden) ges corioliskraften av

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}. \tag{1}$$

Corioliskraften är riktad utåt vinkelrätt mot $\mathbf{\Omega}$ och $\mathbf{v}$ och horisontalkomponenten är riktad söderut (se fig.).

b)



Betrakta ett koordinatsystem, (x', y'), där rymdskeppet är i vila, dvs systemet rör sig med hastighet $v = 2.0 \cdot 10^8$ m/s längs x-axeln i system (x, y) (fixt relativt jorden och solen). Neutrinopartiklarnas hastighet i system (x, y) är $u = u_y = c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s och beskrivs i (x', y')-systemet av

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = \{u_x = 0\} = -v \tag{2}$$

och

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - vu_x/c^2]} = \{u_y = c\} = c/\gamma = c\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{c^2 - v^2}, \tag{3}$$

dvs

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c. \tag{4}$$

Neutrinopartiklarna rör sig med ljusets hastighet relativt rymdskeppet, men i en annan riktning än relativt jorden och solen. Om ϕ är vinkeln mellan u och u' har vi (se fig.)

$$\tan\phi = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 42°. \tag{5}$$

Uppgift 2.
Kinetisk energi: $K = f(q)\dot{q}^2$
potentiell energi: $V = V(q)$
Lagrangefunktionen: $L = K - V = f(q)\dot{q}^2 - V(q)$
Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, dvs $\frac{d}{dt}E = 0$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}(2f(q)\dot{q}) = 2\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 - \frac{dV}{dq} \tag{7}$$

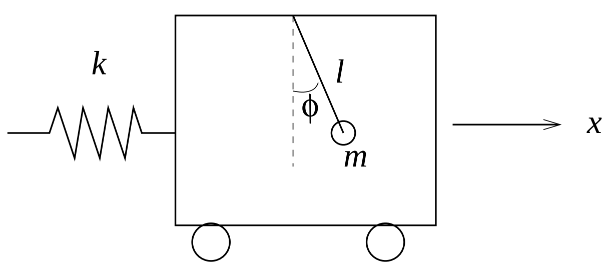
Lagranges ekv. blir

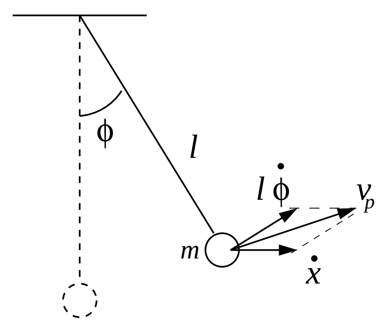
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq} = 0 \tag{8}$$

Energin ges av $E = f(q)\dot{q}^2 + V(q)$, så

$$\frac{d}{dt}E = \frac{df}{dq}\dot{q}\dot{q}^2 + 2f(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\dot{q} = \dot{q}\underbrace{\left(\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\right)}_{=0 \text{ enl. Lagranges ekv.}} = 0 \tag{9}$$

V.S.V
Uppgift 3.





Generaliserade koordinater: x och ϕ
Vagnens kinetiska energi: $K_v = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$
Vagnens potentiella energi: $V_v = \frac{1}{2}kx^2$

Pendelns kula har hastigheten v_p (se fig.)

$$v_p^2 = l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + (l\dot{\phi}\cos\phi + \dot{x})^2 = l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi \tag{10}$$

Pendelns kinetiska energi: $K_p = \frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi)$
Pendelns potentiella energi: $V_p = -mgl\cos\phi$

Lagrangefunktionen kan nu skrivas $L = K_v + K_p - V_v - V_p$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\phi \tag{11}$$

Sök Lagranges ekvationer $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ för x och ϕ.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\phi}\cos\phi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\phi}\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + l\dot{x}\cos\phi)$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\ddot{\phi} + l\ddot{x}\cos\phi - l\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi)$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -ml\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi - mgl\sin\phi$

Vi kan nu skriva upp Lagranges ekv. för x och ϕ

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi}\cos\phi - \frac{ml}{M+m}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\phi + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{13}$$

För små svängningar omkring jämviktsläget reduceras ekvationerna ovan till

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi} + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\ddot{x}}{l} + \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 \tag{15}$$

där vi har använt $\cos\phi \approx 1$, $\sin\phi \approx \phi$ och $\dot{\phi}^2 \approx 0$. Ekvationerna kan skrivas på matrisform $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$, där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \phi \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ml}{M+m} \\ \frac{1}{l} & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{k}{M+m} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \tag{16}$$

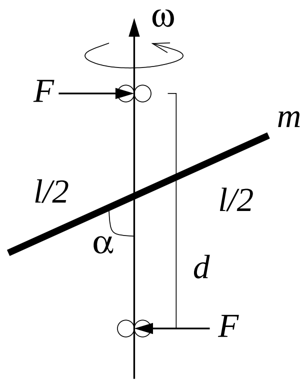
Ansats av typen $\mathbf{x} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, där $\mathbf{a}$ är en kolumnvektor innehållande amplituder, ger

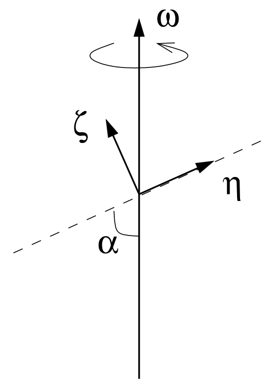
$$(-M\omega^2 + K)\mathbf{a} = 0. \tag{17}$$

Nollskilld lösning för $\mathbf{a}$ fås endast då determinanten av $(-M\omega^2 + K)$ är lika med noll. Detta leder till en andragradsekvation i ω^2 med lösningarna

$$\omega^2 = \frac{g(M+m) + kl}{2Ml} \pm \frac{1}{2Ml}\sqrt{g^2(M+m)^2 + (kl)^2 - 2gkl(M-m)} \tag{18}$$

Uppgift 4.





Placera ett koordinatsystem (ξ, η, ζ) längs stångens huvudtröghetsaxlar. I detta system är tröghetstensorn diagonal,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

där

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{12} m l^2, \; I_{\eta\eta} = 0, \; I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{12} m l^2. \tag{20}$$

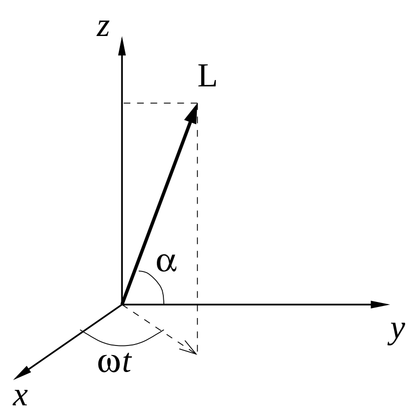
Rotationsvektorn beskrivs i (ξ, η, ζ)-systemet av

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos\alpha\hat{\eta} + \sin\alpha\hat{\zeta}). \tag{21}$$

Stångens rörelsemängdsmoment är $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{12} m l^2 \omega \sin\alpha\hat{\zeta} = L\hat{\zeta}, \tag{22}$$

dvs $\mathbf{L}$ roterar kring $\boldsymbol{\omega}$ vinkelrätt mot stången.



För att beräkna kraftmomentet på stången, $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$, beskriver vi $\mathbf{L}$ i ett fixt koordinatsystem (x, y, z) där rotationsaxeln ligger i z-riktningen (se fig.),

$$\mathbf{L} = L\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{y}} + L\sin\alpha\hat{\mathbf{z}}. \tag{23}$$

Kraftmomentet ges av

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -L\omega\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\omega\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{y}} = L\omega\cos\alpha(-\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + \cos\omega t\hat{\mathbf{y}}), \tag{24}$$

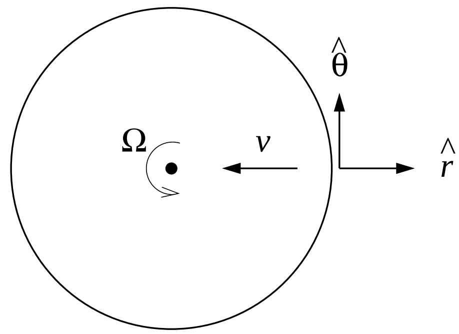
vilket ger

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = L\omega\cos\alpha = \frac{1}{12}ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{25}$$

Vi kan nu beräkna kraften F från axeln på vardera lagren mha $\tau = Fd$,

$$F = \frac{1}{12}m\frac{l^2}{d}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{26}$$

Uppgift 5.



Betrakta ett system som roterar med karusellen. Emils pendel påverkas i detta system, utöver tygngdkraften $W = mg$, av fiktiva krafter. De fiktiva krafterna i roterande system ges av

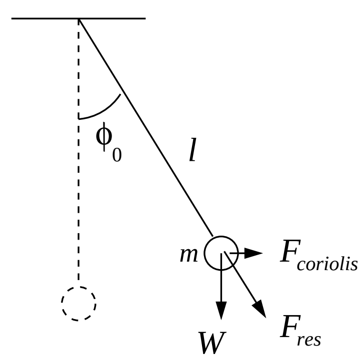
$$\mathbf{F}_{fict} = \mathbf{F}_{coriolis} + \mathbf{F}_{centrifugal} = -2m\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_{rot} - m\mathbf{\Omega}\times(\ \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}), \tag{27}$$

där $\mathbf{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}_{rot} = v(-\hat{\mathbf{r}})$ är Emils hastighet i det roterande systemet. Centrifugalkraften är riktad utåt från rotationsaxeln och påverkar därför inte pendelns rörelse.

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_{rot} = -2m\Omega\hat{\mathbf{z}}\times v(-\hat{\mathbf{r}}) = 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{28}$$

Totala kraften i pendelns rörelseplan ges av

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}} + 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{29}$$

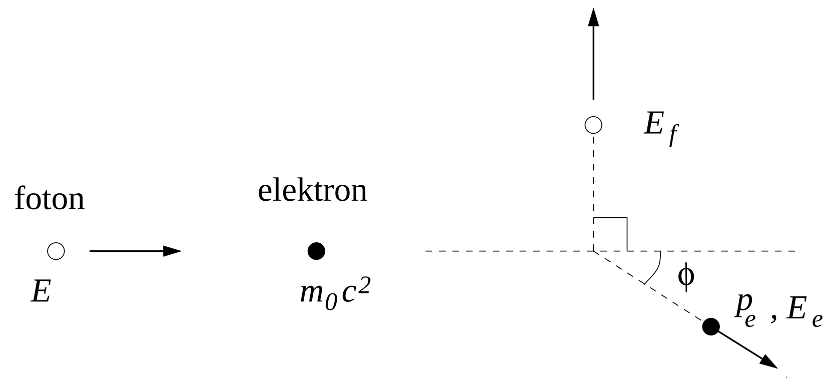


Pendelns utslagsvinkel i jämvikt, ϕ_0, ges av

$$\tan\phi_0 = \frac{F_{coriolis}}{W} = \frac{2m\Omega v}{mg} \Longrightarrow \phi_0 = \arctan(\frac{2\Omega v}{g}). \tag{30}$$

Om pendeln var stilla när Emil började gå kommer den att pendla med amplitud ϕ_0 omkring jämviktsläget. Maximal utsalagsvinkel blir därför $\phi_{max} = 2\phi_0$.

Uppgift 6.



Energikonservering ger

$$E + m_0c^2 = E_f + E_e, \tag{31}$$

där E_f och E_e är fotonens resp. elektronens energi efter stöten.

Rörelsemängdskonservering ger

$\rightarrow$: $E/c = p_e \cos\phi \Rightarrow E^2 = (p_ec)^2 \cos^2\phi$

$\uparrow$: $0 = E_f/c - p_e \sin\phi \Rightarrow E_f^2 = (p_ec)^2 \sin^2\phi$

där p_e är elektronens rörelsemängd efter stöten, E/c och E_f/c är fotonens rörelsemängd före resp efter stöten. Addition av ekvationerna ovan ger

$$E^2 + E_f^2 = (p_ec)^2. \tag{32}$$

Sätter vi in enregi-rörelsemängdsrelationen $(p_ec)^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2$ i ekv. (32) får vi

$$E^2 + E_f^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2 \tag{33}$$

Använd energikonservering (ekv. (31)) och ekv. (33) för att eliminera elektronens energi E_e. Från ekv. (31) har vi

$$E_e = E + m_0c^2 - E_f. \tag{34}$$

Insättning i ekv. (33) ger

$$E^2 + E_f^2 = (E + m_0c^2 - E_f)^2 - (m_0c^2)^2, \tag{35}$$

vilket leder till ett uttryck för fotonens energi efter stöten

$$E_f = \frac{E}{E/m_0c^2 + 1}. \tag{36}$$