Tentamen i Mekanik F del B FFM052

Tid och plats: Måndagen den 14 januari 2002 kl 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Ludde Edgren, ankn 3182.
Hjälpmedel: Valfria tabellsamlingar, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Gränsen för godkänt är 30 p.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. a) Är det möjligt för en satellit att röra sig på en cirkulär bana kring jorden så att omloppstiden blir kortare än ett dygn? (Satelliten påverkas bara av gravitationskraften från jorden.) (5 p)

   b) Emilia skickar en morgon klockan 08.15.13 ett email från Göteborg till Osqar i Stockholm, som får det klockan 08.15.19. Truls beskriver dessa båda händelser relativt sitt vilosystem, som rör sig med en likformig hastighet $\mathbf{v}$ relativt jorden. Är det möjligt att detta email enligt Truls kommer fram *innan* det skickades? (5 p)

2. Bevisa, utgående från Lorentztransformationen, den relativistiska formeln för transformering av hastigheter
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}.$$
(Här är u_x och u'_x x-komponenterna av hastigheter relativt två inertialsystem S och S' som rör sig relativt varandra med hastigheten v längs med x-axeln.)

3. En fjäder med fjäderkonstanten k_1 har sin ena ände fix och i den andra änden hänger en massa m_1. I denna massa är fäst ena änden av en annan fjäder med fjäderkonstanten k_2, och i den andra änden av denna fjäder hänger en annan massa m_2. De två massorna kan bara röra sig i vertikalled. Inför lämpliga generaliserade koordinater och ställ upp Lagranges ekvationer för detta system. Bestäm sedan vinkelfrekvenserna för svängningar kring jämviktsläget.

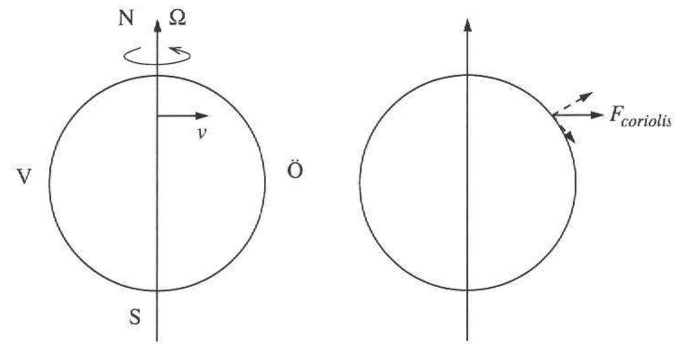
4. På grund av jordrotationen är inte jordklotet sfäriskt utan något avplattat vid polerna. För att analysera detta kan man anta att jorden är flytande, vilket betyder att den totala potentiella energin (från gravitationskraften och centripetalkraften) för en hypotetisk partikel med massan m skall vara konstant över hela jordytan. Givet att jordradien vid ekvatorn är 6378 km, uppskatta med denna metod jordradien vid polerna.

Vänd!

Lösningar till Tentamen i Mekanik F del B 2002-08-20

Uppgift 1.

a)

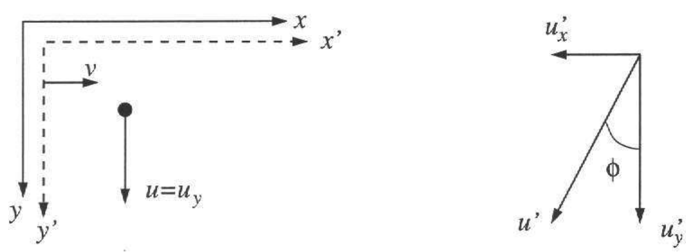


Om $\mathbf{\Omega}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}$ är bilens hastighet (relativt jorden) ges corioliskraften av

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}. \tag{1}$$

Corioliskraften är riktad utåt vinkelrätt mot $\mathbf{\Omega}$ och $\mathbf{v}$ och horisontalkomponenten är riktad söderut (se fig.).

b)



Betrakta ett koordinatsystem, (x', y'), där rymdskeppet är i vila, dvs systemet rör sig med hastighet $v = 2.0 \cdot 10^8$ m/s längs x-axeln i system (x, y) (fixt relativt jorden och solen). Neutrinopartiklarnas hastighet i system (x, y) är $u = u_y = c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s och beskrivs i (x', y')-systemet av

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = \{u_x = 0\} = -v \tag{2}$$

och

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - vu_x/c^2]} = \{u_y = c\} = c/\gamma = c\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{c^2 - v^2}, \tag{3}$$

dvs

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = c. \tag{4}$$

Neutrinopartiklarna rör sig med ljusets hastighet relativt rymdskeppet, men i en annan riktning än relativt jorden och solen. Om ϕ är vinkeln mellan u och u' har vi (se fig.)

$$\tan\phi = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 42°. \tag{5}$$

Uppgift 2.
Kinetisk energi: $K = f(q)\dot{q}^2$
potentiell energi: $V = V(q)$
Lagrangefunktionen: $L = K - V = f(q)\dot{q}^2 - V(q)$
Visa att Lagranges ekvation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ medför att den totala mekaniska energin $E = K + V$ är konstant, dvs $\frac{d}{dt}E = 0$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}(2f(q)\dot{q}) = 2\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 - \frac{dV}{dq} \tag{7}$$

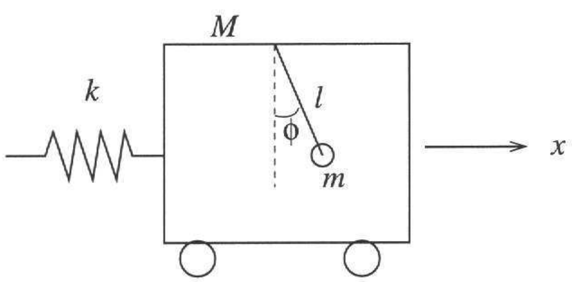
Lagranges ekv. blir

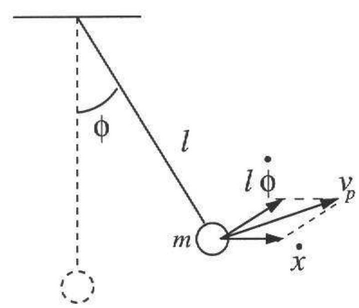
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq} = 0 \tag{8}$$

Energin ges av $E = f(q)\dot{q}^2 + V(q)$, så

$$\frac{d}{dt}E = \frac{df}{dq}\dot{q}\dot{q}^2 + 2f(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\dot{q} = \dot{q}\underbrace{\left(\frac{df}{dq}\dot{q}^2 + 2f(q)\ddot{q} + \frac{dV}{dq}\right)}_{=0 \text{ enl. Lagranges ekv.}} = 0 \tag{9}$$

V.S.V
Uppgift 3.





Generaliserade koordinater: x och ϕ
Vagnens kinetiska energi: $K_v = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$
Vagnens potentiella energi: $V_v = \frac{1}{2}kx^2$

Pendelns kula har hastigheten v_p (se fig.)

$$v_p^2 = l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + (l\dot{\phi}\cos\phi + \dot{x})^2 = l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi \tag{10}$$

Pendelns kinetiska energi: $K_p = \frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi)$
Pendelns potentiella energi: $V_p = -mgl\cos\phi$

Lagrangefunktionen kan nu skrivas $L = K_v + K_p - V_v - V_p$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\phi \tag{11}$$

Sök Lagranges ekvationer $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ för x och ϕ.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\phi}\cos\phi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\phi}\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + l\dot{x}\cos\phi)$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\ddot{\phi} + l\ddot{x}\cos\phi - l\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi)$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -ml\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi - mgl\sin\phi$

Vi kan nu skriva upp Lagranges ekv. för x och ϕ

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi}\cos\phi - \frac{ml}{M+m}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\phi + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{13}$$

För små svängningar omkring jämviktsläget reduceras ekvationerna ovan till

$$\ddot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\phi} + \frac{k}{M+m}x = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\ddot{x}}{l} + \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 \tag{15}$$

där vi har använt $\cos\phi \approx 1$, $\sin\phi \approx \phi$ och $\dot{\phi}^2 \approx 0$. Ekvationerna kan skrivas på matrisform $M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = 0$, där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \phi \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ml}{M+m} \\ \frac{1}{l} & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{k}{M+m} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l} \end{pmatrix} \tag{16}$$

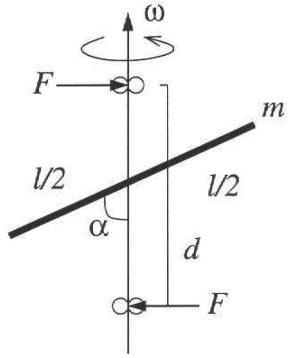
Ansats av typen $\mathbf{x} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, där $\mathbf{a}$ är en kolumnvektor innehållande amplituder, ger

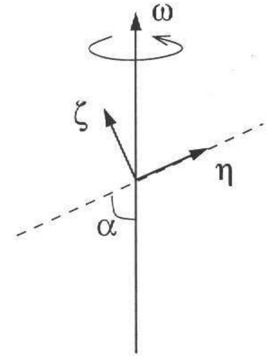
$$(-M\omega^2 + K)\mathbf{a} = 0. \tag{17}$$

Nollskilld lösning för $\mathbf{a}$ fås endast då determinanten av $(-M\omega^2 + K)$ är lika med noll. Detta leder till en andragradsekvation i ω^2 med lösningarna

$$\omega^2 = \frac{g(M+m)+kl}{2Ml} \pm \frac{1}{2Ml}\sqrt{g^2(M+m)^2 + (kl)^2 - 2gkl(M-m)} \tag{18}$$

Uppgift 4.





Placera ett koordinatsystem (ξ,η,ζ) längs stångens huvudtröghetsaxlar. I detta system är tröghetstensorn diagonal,

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\zeta\zeta}\end{pmatrix}, \tag{19}$$

där

$$I_{\xi\xi}=\frac{1}{12}ml^2,\ I_{\eta\eta}=0,\ I_{\zeta\zeta}=\frac{1}{12}ml^2. \tag{20}$$

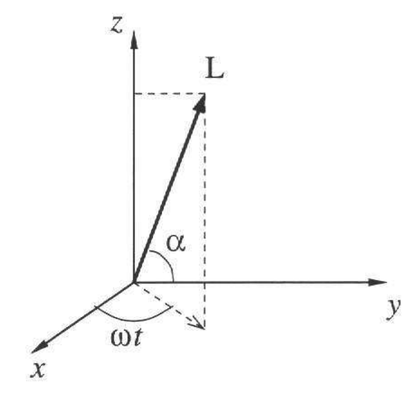
Rotationsvektorn beskrivs i (ξ,η,ζ)-systemet av

$$\boldsymbol{\omega}=\omega(\cos\alpha\hat{\eta}+\sin\alpha\hat{\zeta}). \tag{21}$$

Stångens rörelsemängdsmoment är $\mathbf{L}=\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha\end{pmatrix}=\frac{1}{12}ml^2\omega\sin\alpha\hat{\zeta}=L\hat{\zeta}, \tag{22}$$

dvs $\mathbf{L}$ roterar kring $\boldsymbol{\omega}$ vinkelrätt mot stången.



För att beräkna kraftmomentet på stången, $\boldsymbol{\tau}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}$, beskriver vi $\mathbf{L}$ i ett fixt koordinatsystem (x,y,z) där rotationsaxeln ligger i z-riktningen (se fig.),

$$\mathbf{L}=L\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{x}}+L\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{y}}+L\sin\alpha\hat{\mathbf{z}}. \tag{23}$$

Kraftmomentet ges av

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -L\omega\cos\alpha\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + L\omega\cos\alpha\cos\omega t\hat{\mathbf{y}} = L\omega\cos\alpha(-\sin\omega t\hat{\mathbf{x}} + \cos\omega t\hat{\mathbf{y}}), \tag{24}$$

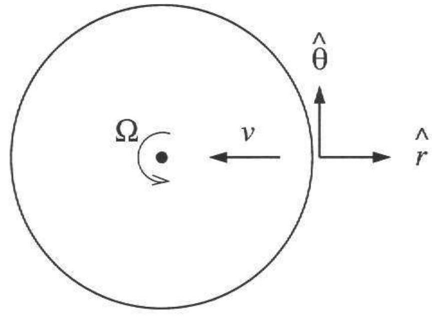
vilket ger

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = L\omega\cos\alpha = \frac{1}{12}ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{25}$$

Vi kan nu beräkna kraften F från axeln på vardera lagret mha $\tau = Fd$,

$$F = \frac{1}{12}m\frac{l^2}{d}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{26}$$

Uppgift 5.



Betrakta ett system som roterar med karusellen. Emils pendel påverkas i detta system, utöver tygngdkraften $W = mg$, av fiktiva krafter. De fiktiva krafterna i roterande system ges av

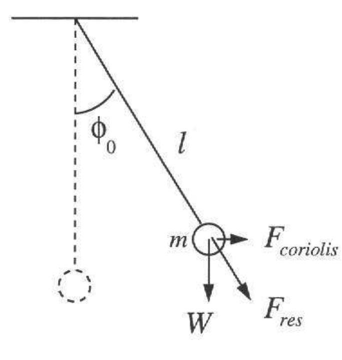
$$\mathbf{F}_{fict} = \mathbf{F}_{coriolis} + \mathbf{F}_{centrifugal} = -2m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_{rot} - m\boldsymbol{\Omega}\times(\ \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}), \tag{27}$$

där $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$ är rotationsvektorn och $\mathbf{v}_{rot} = v(-\hat{\mathbf{r}})$ är Emils hastighet i det roterande systemet. Centrifugalkraften är riktad utåt från rotationsaxeln och påverkar därför inte pendelns rörelse.

$$\mathbf{F}_{coriolis} = -2m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_{rot} = -2m\Omega\hat{\mathbf{z}}\times v(-\hat{\mathbf{r}}) = 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{28}$$

Totala kraften i pendelns rörelseplan ges av

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}} + 2m\Omega v\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{29}$$

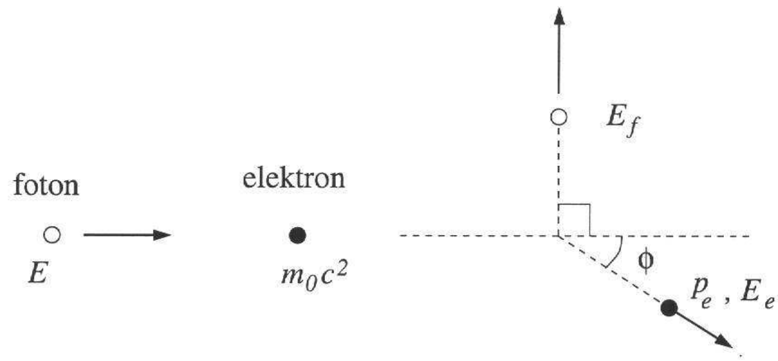


Pendelns utslagsvinkel i jämvikt, ϕ_0, ges av

$$\tan\phi_0 = \frac{F_{coriolis}}{W} = \frac{2m\Omega v}{mg} \Longrightarrow \phi_0 = \arctan(\frac{2\Omega v}{g}). \tag{30}$$

Om pendeln var stilla när Emil började gå kommer den att pendla med amplitud ϕ_0 omkring jämviktsläget. Maximal utsalagsvinkel blir därför $\phi_{max} = 2\phi_0$.

Uppgift 6.



Energikonservering ger

$$E + m_0c^2 = E_f + E_e, \tag{31}$$

där E_f och E_e är fotonens resp. elektronens energi efter stöten.

Rörelsemängdskonservering ger

$\rightarrow$: $E/c = p_e \cos\phi \Rightarrow E^2 = (p_e c)^2 \cos^2\phi$

$\uparrow$: $0 = E_f/c - p_e \sin\phi \Rightarrow E_f^2 = (p_e c)^2 \sin^2\phi$

där p_e är elektronens rörelsemängd efter stöten, E/c och E_f/c är fotonens rörelsemängd före resp efter stöten. Addition av ekvationerna ovan ger

$$E^2 + E_f^2 = (p_e c)^2. \tag{32}$$

Sätter vi in enregi-rörelsemängdsrelationen $(p_e c)^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2$ i ekv. (32) får vi

$$E^2 + E_f^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2 \tag{33}$$

Använd energikonservering (ekv. (31)) och ekv. (33) för att eliminera elektronens energi E_e. Från ekv. (31) har vi

$$E_e = E + m_0c^2 - E_f. \tag{34}$$

Insättning i ekv. (33) ger

$$E^2 + E_f^2 = (E + m_0c^2 - E_f)^2 - (m_0c^2)^2, \tag{35}$$

vilket leder till ett uttryck för fotonens energi efter stöten

$$E_f = \frac{E}{E/m_0c^2 + 1}. \tag{36}$$