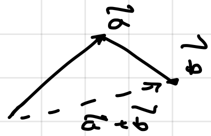
Vektorn är en riktad sträcka

En bas är en uppsättning av linjärt oberoende vektorer

- antal vektorer anger dimensionen på rummet
- Ex: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ en bas för $\mathbb{R}^3$.

V ett vektorrum



- Addition: $\vec{a}+\vec{b}$
- Multiplikation m $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda\vec{a}$

"Extra": skalärprodukt , $\vec{a}\cdot\vec{b} \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}\\ \vec{b} &= b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}\end{aligned}\right\} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

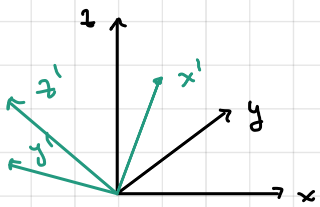
$\{$där $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}\}$

I en bas: $\{\hat{x}\cdot\hat{x} = 1;\ \hat{x}\cdot\hat{y} = 0\}$

$\rightarrow$ ortogonal bas

Basbyte, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rightarrow \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$

relaterade genom en rotation



Låt $\vec{u} = u_1\hat{x} + u_2\hat{y} + u_3\hat{z} = u_1'\hat{x}' + u_2'\hat{y}' + u_3'\hat{z}'$

Vi har $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{pmatrix}$ där P är en rotationsmatris.

P ska vara ortogonal $\therefore$ bevarar skalärprodukter

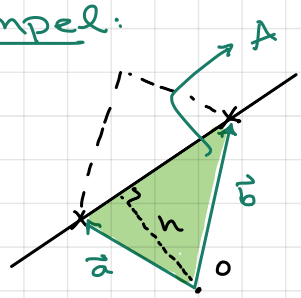
$\vec{a}' = P\vec{a}$ & $\vec{b}' = P\vec{b}$

$$\vec{a}'\cdot\vec{b}' = \vec{a}'^T\vec{b}' = \vec{a}^T\underbrace{P^TP}_{I}\vec{b} = \vec{a}^T\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

dvs $P^TP = I$, alltså ortogonal

- En ortogonalmatris för en stel kropp ger orienteringen
- Diagonalisering av matriser - stelkropp : kopplade svängningar

Exempel:



L går genom $\vec{a}, \vec{b}$

Vad är dess avstånd till origo?

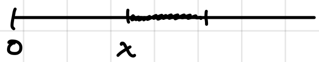
l: $\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ som parametrisering av linjen

- $\|\vec{r}\|^2$ = minimera map t.

alt. $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}h|\vec{b} - \vec{a}| \quad \therefore \quad h = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b} - \vec{a}|}$

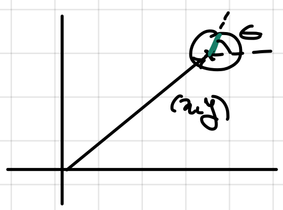
- Vilka (och hur många) är frihetsgraderna för en stelkropp.

1 dimension:



Har en frihetsgrad (translationsfrihetsgrad)

2 dimensioner:

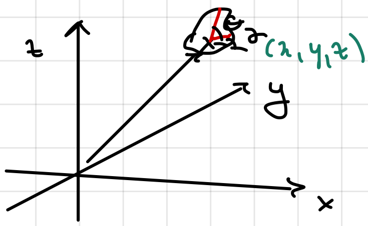


Den har 3 frihetsgrader

2 translation, 1 rotation

dim	tr.	rot	tot
1	1	0	1
2	2	1	3
3	3	3	6

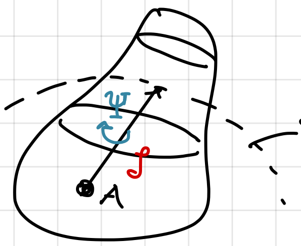
3 dimensioner



Den har 6 frihetsgrader

3 translation, 3 rotation

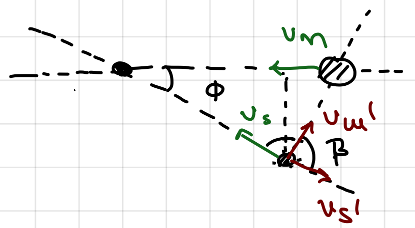
θ, φ + rotation kring egen axel



$S^2 - (\theta, \varphi)$

$|\rho| =$ konst. ty stelkropp

1)



Vi vet att $\tan\beta = \dfrac{|v_m' \times v_s'|}{|v_s' \cdot v_m'|}$

där $v_s' = -v_s$ & $v_m' = -(v_m) - (-v_s) = v_s - v_m$

$$\Rightarrow \quad \tan\beta = \frac{|(v_s - v_m) \times v_s|}{|v_s \cdot (v_s - v_m)|} = \frac{|v_m \times v_s|}{|v_s^2 - v_s \cdot v_m|} =$$

$$= \frac{|v_m||v_s|\sin\phi}{|v_s|^2 - |v_s||v_m|\cos\phi|}$$

2) Planets ekvation: $\underbrace{n_1 x + n_2 y + n_3 z = 0}$

där $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$. $\iff \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$

Låt $\vec{\ell} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$ vara param. av linjestycket.

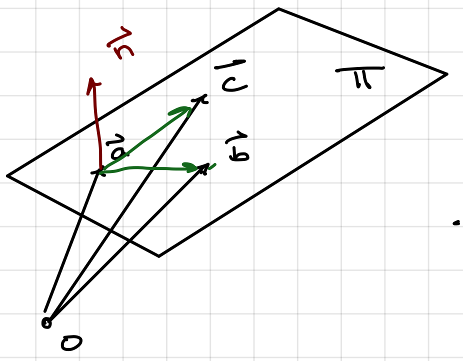
$\vec{\ell}$ UP ger att $\vec{n} \cdot (\vec{a} + \lambda\vec{v}) = 0.$

$$\iff \vec{n} \cdot \vec{a} + \lambda\, \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\iff \lambda = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{v}}.$$

$$\therefore \quad \vec{i} = \vec{a} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{v}}\, \vec{v}$$

3)

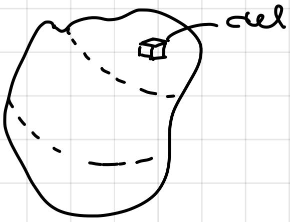


$$\vec{n} = (\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}).$$

$$\pi: \quad \vec{n} \cdot \vec{x} = \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{a}}_{= D}$$

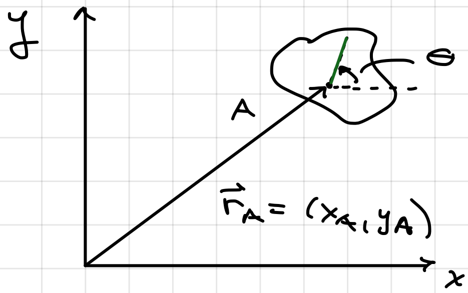
$$\therefore \quad d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}|}$$

Stelkroppskinematik



Stel kropp

2 dimensioner

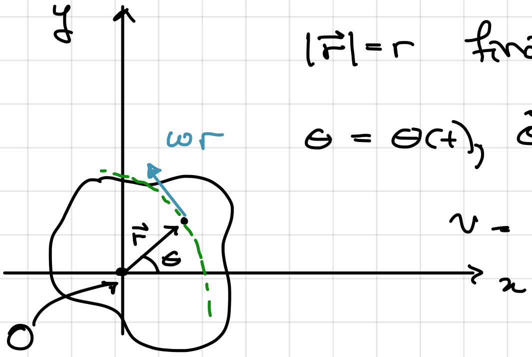


Detta gäller även 3d-situationer

- saker som roterar runt en axel $\perp \hat{x}, \hat{y}$.

Bestäm hastighet, acc. för en godtycklig pkt på kroppen.

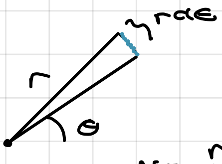
1) Fixera rotation kring en pkt O.



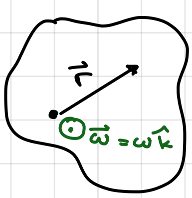
$|\vec{r}| = r$ förändras ej.

$\theta = \theta(t)$, $\dot{\theta} = \omega$

$v = |\vec{v}| = \omega r$



$v = \frac{r d\theta}{dt} \xrightarrow[dt \to 0]{} r\omega$



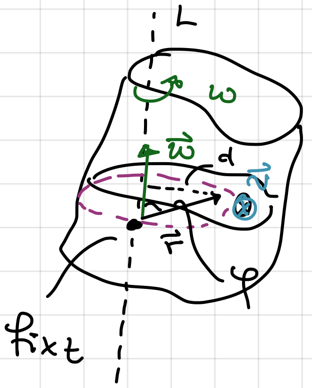
rotationsvektor

ω ut ur tavlan då $\omega > 0$

ω in i tavlan då $\omega < 0$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ då $v = \omega r \sin\theta \underset{\theta = 90°}{=} \omega r$

Detta stämmer även i 3d.



Momentant rotation runt L.

$$\vec v = \vec\omega \times \vec r$$

$$v = \omega d = \omega r \sin\varphi$$

Om $\varphi = 0$ ∴ $v = 0$. OK! Ligger på axeln.

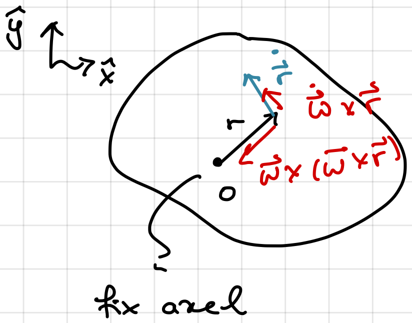
Är detta det mest allmänna?

Vi har 3 rotationsfrihetsgrader

$\vec\omega$ räcker ty 3 komponenter. Ja, det är det.

$$\vec v = \vec\omega_1 \times \vec r + \vec\omega_2 \times \vec r = \underbrace{(\vec\omega_1 + \vec\omega_2)}_{\vec\omega} \times \vec r$$

, rotationsvektor $\vec\omega_1 + \vec\omega_2$.



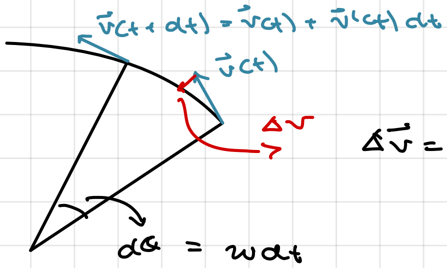
$$\dot{\vec r} = \vec\omega \times \vec r$$

$$\vec a = \ddot{\vec r} = \dot{\vec\omega} \times \vec r + \vec\omega \times \dot{\vec r} =$$

$$= \underbrace{\dot{\vec\omega} \times \vec r}_{\text{tang. acc.}} + \underbrace{\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r)}_{\text{centr. acc}} = \vec\alpha \times \vec r - \omega^2 \vec r$$

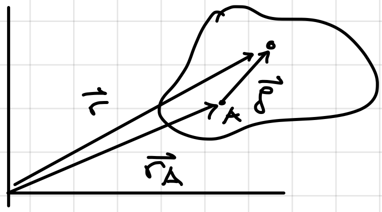
Plan rotation, $\vec\omega = \omega \hat z$

$$\dot{\vec\omega} = \dot\omega \hat z = \alpha \hat z$$



$$\Delta \vec v = \vec v'(t)\,dt$$

Ingen fix axel

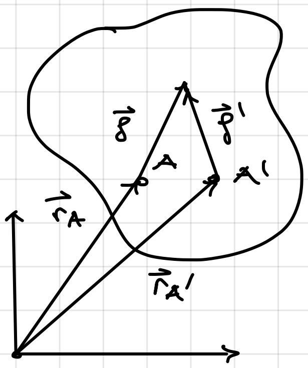


$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}$

Translation av a & rotation runt a.

$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$



$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho} = \vec{r}_{A'} + \vec{\rho}\,'$

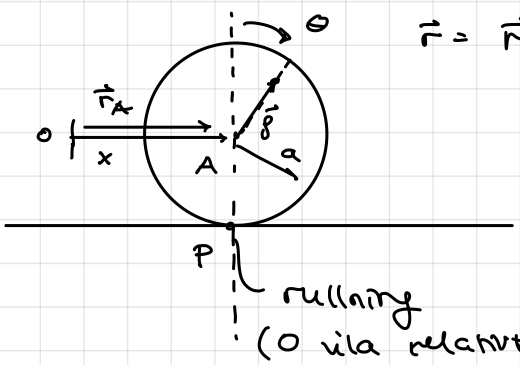
$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \dot{\vec{r}}_{A'} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}\,'$

samma

Välj A s.a. $\begin{cases} \text{den är fix} \\ \text{masscentrum} \end{cases}$ eller

Exempel

Hjul som rullar



$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}$

rullning (O vila relativt marken)

2 translation
1 rotation

$\uparrow$
$y_A = 0$

Kvar x, θ, men relateras ur rullningen.

$\Rightarrow$ 1 frihetsgrad

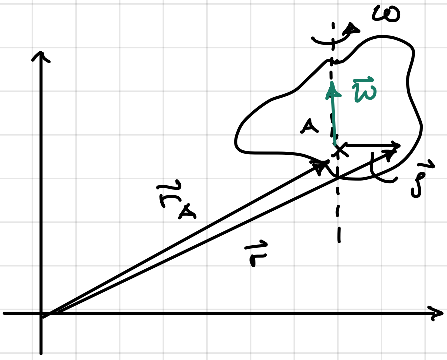
$\vec{v}_P = \dot{x}\hat{x} - \omega\hat{z} \times (-a\hat{y}) =$

$= \dot{x}\hat{x} - \omega a \hat{x} = \bar{0}$

$\Leftrightarrow \dot{x} = a\dot{\theta}$ i P

Alt. (momentant)

Välj P som pkt (den står stilla!) kring rotation.



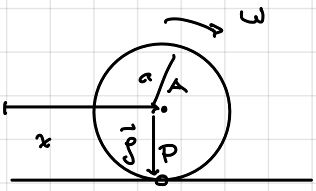
$$\vec r = \vec r_A + \vec\rho$$

$$\vec v = \vec v_A + \vec\omega \times \vec\rho$$

$$\vec a = \vec a_A + \underbrace{\vec\alpha \times \vec\rho}_{a_t} + \underbrace{\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec\rho)}_{a_c}$$

Antal rotationsfrihetsgrader: $\binom{n}{2}$

<u>Exempel</u> Rullande hjul



$$x = x(t)$$

$$\vec v_A(t) = \dot x(t)\,\hat x$$

<u>Vad är acc för kontaktytan m. underlaget</u>

$$\vec r_P = \vec r_A + \vec\rho$$

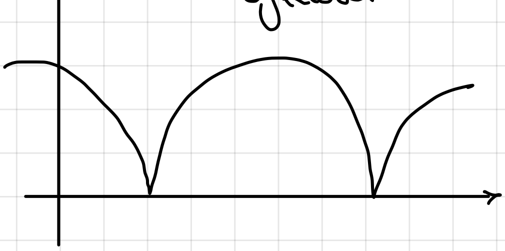
$$\vec v_P = \vec v_A + \vec\omega \times \vec\rho \underset{\uparrow \text{ rullning}}{=} 0 \Rightarrow \omega = \frac{\dot x}{a} \quad \text{där } \omega \odot$$

$$\vec a_P = \vec a_A + \vec\alpha \times \vec\rho + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec\rho)$$

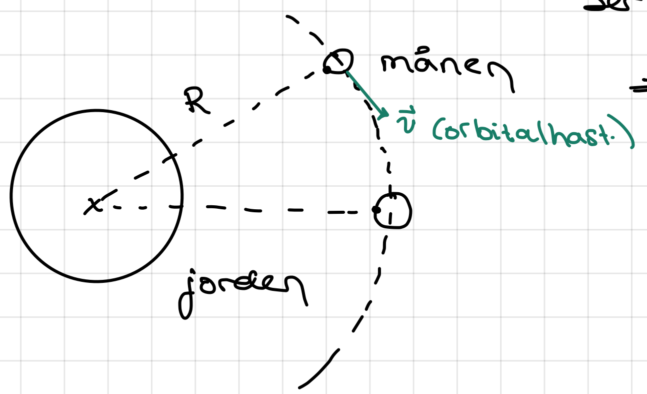
$$= \underbrace{\ddot x\,\hat x - \frac{\ddot x}{a}\cdot a\,\hat x}_{=0} + \omega^2 a\,\hat y = \underbrace{\omega^2 a\,\hat y}_{= \frac{\dot x^2}{a}\hat y}$$

(dvs enbart centripetalacc).

Cykloid



Ex: Månen.



Ser alltid samma sida av månen

$\Rightarrow$ Dess rotationshast. kring dess egen axel = rotationsh. runt jorden som axel. $\left(= \frac{v}{R}\right)$

1) Transl. för månens mittpkt : v

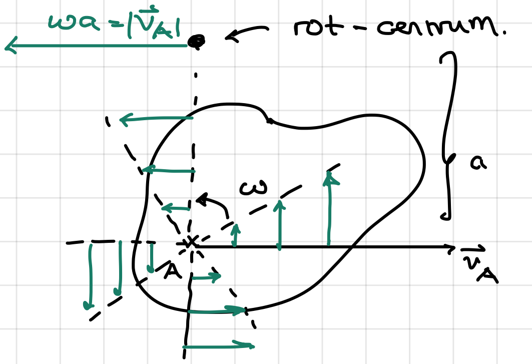
+ rotation kring mittpkt $\left(\frac{v}{R}\,\hat{\otimes}\right)$

2) Transl. för jordens mittpkt : 0.

Bara rotation kring jordens mittpkt. $\left(\frac{v}{R}\,\hat{\otimes}\right)$

Rotationsvektor ändras inte efter val av ref.-pkt.

- Finns det alltid någon pkt "på kroppen" som är i vila (momentant). I så fall kan vi momentant beskriva rörelsen som ren rotation kring den punkten.



$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

Gå vinkelrät mot hastighet, hitta avst. a s.a. $\omega a = |\vec{v}_A|$ s.a. den pkten är i vila. Tag detta som rot-centrum.

Plan rörelse

Nu blir $v_A = \omega a$.

Detta rotationscentrum är momentan. (OBS!)

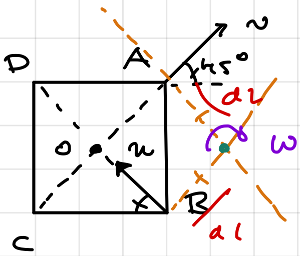
Svar: Ja, men om $\omega = 0$ är det rotation runt en punkt oändligt långt bort.

I 3 dimensioner, om $\vec{v}_A$ har komponent i rotationsaxel, kan vi aldrig enbart se det som rotation (momentant).

Men man kan alltid hitta en punkt vars hastighet $\parallel$ med rotationsaxeln.

ty $\vec{\omega} \times \vec{\jmath}$ har ingen del $\parallel$ med axeln.

Exempel



Bestäm u.

$\vec{v}$: 2 frihetsgrader

$\vec{u}$: 1 riktning

3 frihetsgrader. OK!

alt 1 $\quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_A$

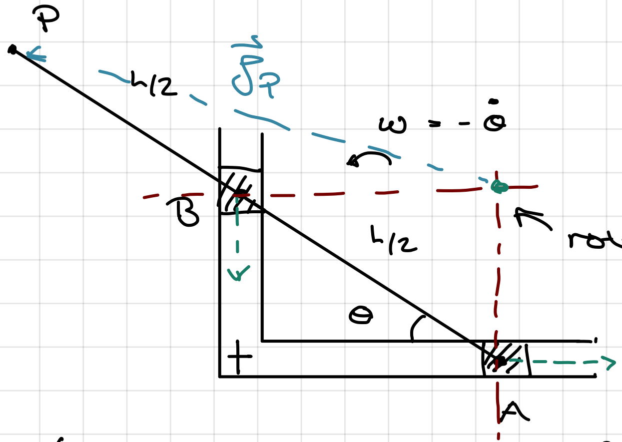
Sätt in ^{A}, $_B$ & bestäm $\vec{v}_0, \vec{\omega}$. } testa själv

alt 2 $\quad$ tag ett rotationscentrum • (vi vill ta bort translationen momentant)

$\Rightarrow u = v$. Måste ligga på skärningen & ω = konst.

Men $d_1 = d_2$, alltså måste $u = v$.

S. 103



Bestäm P:s, A:s, B:s fart.

1) $x_A = \frac{L}{2}\cos\theta \quad \therefore \quad \vec{v}_A = -\frac{L}{2}\sin\theta \cdot \dot{\theta}\hat{x} = \frac{L\omega}{2}\sin\theta\,\hat{x}$

$y_B = \frac{L}{2}\sin\theta \quad \therefore \quad \vec{v}_B = \frac{L}{2}\cos\theta \cdot \dot{\theta}\hat{y} = -\frac{L\omega}{2}\cos\theta\,\hat{y}$

$\vec{v}_B = \frac{\vec{v}_A + \vec{v}_P}{2} \Rightarrow \vec{v}_P = 2\vec{v}_B - \vec{v}_A = -L\omega\cos\theta\,\hat{y} - \frac{L\omega}{2}\sin\theta\,\hat{x}$

Vi har $\sin(\theta+\gamma) = \sin(\theta)\cos(\gamma) + \sin(\gamma)\cos(\theta) =$

$$= \sin\theta \cdot \sqrt{1-\left(\frac{h}{b}\right)^2} + \cos\theta \cdot \frac{h}{b}$$

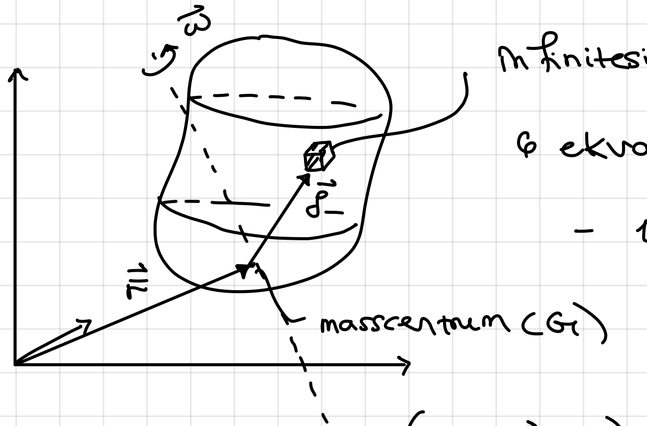
$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{\sqrt{2}\,(L+x)\tan\theta \cdot \dot{c} \cdot \sqrt{1-\cos\theta\cdot\frac{h}{b} + \sin\theta\cdot\sqrt{1-\left(\frac{h}{b}\right)^2}}}{b\left(\sin\theta\cdot\sqrt{1-\left(\frac{h}{b}\right)^2} + \cos\theta\cdot\frac{h}{b}\right)}$$

Dim: $\left[\frac{m \cdot m/s}{m} = m/s\right]$. ok!

Rimlighet, om $\dot{c}\uparrow$, $\dot{x}\uparrow$. ok!

om $x\uparrow$, $\dot{x}\uparrow$. ok!

Stelkroppsdynamik



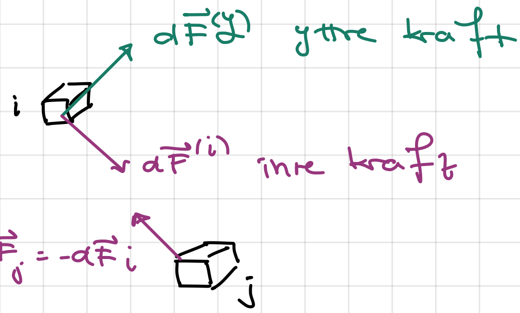
Infinitesimal volym dV (massa $dm = \rho\, dV$)

6 ekvationer:

- 1 per frihetsgrad

$(\vec{r} = \bar{r} + \vec{\rho})$

$$\int_V d\vec{F}^{(i)} = 0$$



Varje del: $dm\,\vec{a} = d\vec{F}$

$$dm\,\vec{a} = d\vec{F}^{(i)} + d\vec{F}^{(y)}$$

Lägger ihop: $\int_K dm\,\vec{a} = \int_K d\vec{F}^{(y)} = \vec{F}$

Tyngdpkt: $\bar{r} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{m}\int(\bar{r} + \vec{\rho})\,dm =$

$$= \frac{\bar{r}}{m}\int dm + \frac{1}{m}\int \vec{\rho}\,dm =$$

$\Rightarrow \frac{1}{m}\int \vec{\rho}\,dm = \vec{0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{beräkna m-c. i ett koordinats.} \\ \text{m. m-c. i origo} \end{array} \right\}$

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{\bar{r}} + \vec{\rho} \\ \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\bar{r}}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \\ \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{\bar{r}}} + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \int dm\, \vec{a} = \int dm \left(\ddot{\vec{\bar{r}}} + \cancel{\vec{\alpha} \times \vec{\rho}} + \cancel{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})} \right)$$
$$= m \ddot{\vec{\bar{r}}}$$

Masscentrum beter sig som en partikel (3 ekv.)

<u>RMM m.a.p. G.</u>

För en partikel

RRM: $\vec{r} \times \vec{p}$

$\Downarrow$

$d\vec{L} = \vec{r} \times dm \vec{v}$

$$\vec{L}_G = \int dm\, \vec{\rho} \times \vec{v} =$$
$$= \int dm\, \vec{\rho} \times (\cancel{\dot{\vec{\bar{r}}}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) =$$
$$= \int dm\, \vec{\rho} \times (\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\rho}}_{\dot{\vec{\rho}}})$$

Vridande moment m.a.p. G

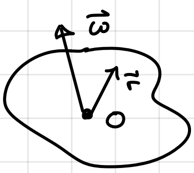
$$\vec{M} = \int \vec{\rho} \times d\vec{F} = \int dm\, \vec{\rho} \times \ddot{\vec{r}} = \int dm\, \vec{\rho} \times (\cancel{\ddot{\vec{\bar{r}}}} + \ddot{\vec{\rho}}) =$$
$$= \int dm\, \vec{\rho} \times \ddot{\vec{\rho}} =$$
$$= \int dm \frac{d}{dt} (\vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}) = \frac{d}{dt} \int dm\, \vec{\rho} \times (\dot{\vec{\rho}}) = \frac{d}{dt} \int dm\, \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) =$$
$$= \frac{d}{dt} (\vec{L}_G) \quad \text{(3 ekv. till)}$$

Dvs: $\vec{M} = \dot{\vec{L}}_G$ styr rotationen. (inre moment kancelleras)

$\vec{F} = m \vec{a}_G = \dot{\vec{p}}$ (translation)

$\vec{p} = m\vec{v}$, analogt med detta, hur uttrycks $\vec{L}$ i termer av $\vec{\omega}$

<u>Ofta</u> Fix pkt (3 frihetsgrader kvar)
(rotation runt o)



$\dot{\vec{L}}_o = \vec{M}_o$

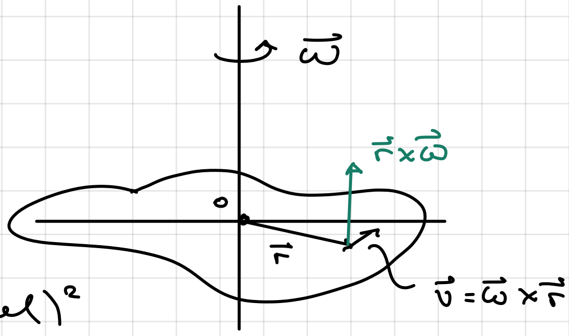
Plan rörelse

$$\vec{L}_o = \int dm\, \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$= \int dm\, r^2 \omega \hat{z} =$$

$$= \omega \int dm\, \underbrace{r^2}_{(\text{avst. till axel})^2} \hat{z}$$

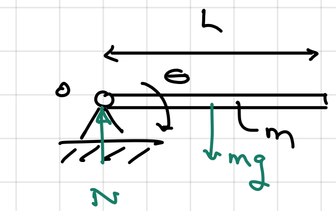
$\rightarrow I_o$ (tröghetsmoment)



$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

$$\begin{cases} \vec{L}_o = I_o \vec{\omega} & (\text{bara för plan rörelse}) \\ I_o \vec{\alpha} = \vec{M}_o \end{cases}$$

Exempel:



Bestäm MC:s acc. omedelbart efter pinnen släppts.

Den rotation runt o.

Centripetalacc = 0.

$$I_o \ddot{\theta} = M_o = \frac{L}{2} m g = \frac{L}{2} m g$$

$$I_o = \frac{m}{L} \int_0^L x^2\, dx = \frac{mL^2}{3}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\frac{L}{2} m g}{\frac{mL^2}{3}} = \frac{3g}{2L}$$

Vi vet att $\bar{a} = \ddot{\theta} \frac{L}{2} = \frac{3g}{4}$ //

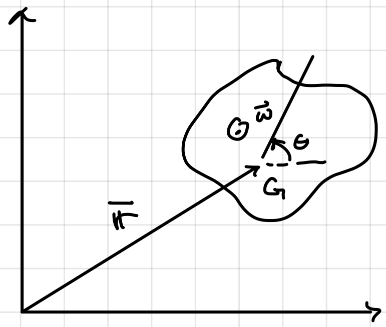
$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$I_o = \int_K x^2\, dm$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{M}_o$$

$$\vec{L}_o = I_o \vec{\omega}$$

Plan stelkroppsrörelse



Välj masscentrum för translation

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \\ \dot{\vec{H}}_G &= \vec{M}_G \end{aligned}\right\} \text{allmänt}$$

Plan rörelse:

$h_G = I_G \dot{\theta}$

↳ tröghetsmoment map axel

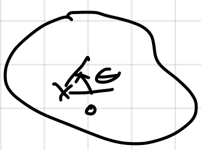
där $I_G = \int dm\, \rho^2$ (ρ – avst. från axeln)

$I_G \ddot{\theta} = M_G$

Plan rotation ↔ 1 dim translation

θ	x
$\dot{\theta} = \omega$	$v = \dot{x}$
$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$a = \dot{v} = \ddot{x}$
Moment	Kraft
Tröghetsmoment	Massa
$M = I\alpha$	$F = ma$
$T = \frac{1}{2} I \omega^2$	$T = \frac{1}{2} m v^2$

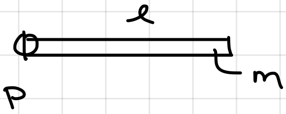
Om det finns en fix pkt



$\dot{\vec{h}}_o = \vec{M}_o$

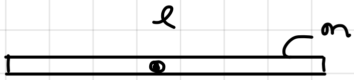
För att bestämma t.ex. $\ddot{\theta}$ behövs ofta beräkning av I_P.

Ex:



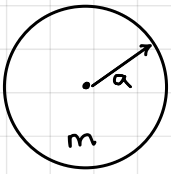
$$I_P = \frac{m l^2}{3}$$

Ex:



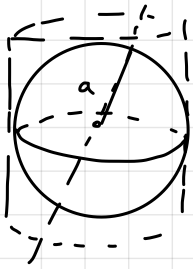
$$I = \int_{-l/2}^{l/2} dm\, x^2 = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2\, dx = \frac{m}{3l}\left(2\cdot\frac{l^3}{8}\right) = \frac{m l^2}{12}$$

Ex: cirkelskiva



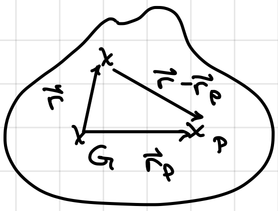
$\frac{1}{2} m a^2$

klot



$\frac{2}{5} m a^2$

"Steiners sats / parallellaxelteoremet"



$$I_G = \int dm\, r^2$$

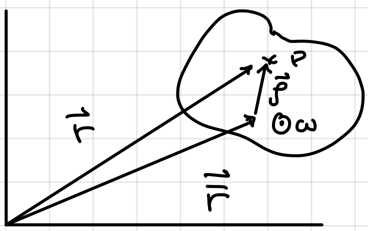
$$I_P = \int dm\, |\vec{r}-\vec{r}_P|^2 =$$

$$= \int dm\left(r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}_P + r_P^2\right) =$$

$$= \int dm\, r^2 - \vec{r}_P\cdot \underbrace{\int 2\, dm\, \vec{r}}_{=0} + \int dm\, r_P^2 = I_G + m r_P^2$$

ty massc.

Kinetisk energi



$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

$$dT = \frac{1}{2} dm\, v_P^2$$

$$T = \frac{1}{2}\int dm\, v_P^2 =$$

plan rörelse

$$= \frac{1}{2}\int dm\left(v_G^2 + 2\vec{v}_G\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) + |\vec{\omega}\times\vec{\rho}|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int dm\, v_G^2 + \int dm\, \vec{v}_G\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) + \frac{1}{2}\int dm\,(\omega\rho)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int dm\, v_G^2 + \frac{1}{2}\int dm\, \omega^2 \rho^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \int dm\, \rho^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Dvs: $\left[T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \right]$

Arbete $\quad dT = \underbrace{m\vec{v}\cdot d\vec{v}}_{\vec{F}\cdot d\vec{r}} + \underbrace{I_G\, \omega\, d\omega}_{M_G \cdot d\theta}$

$$= \vec{F}\cdot d\vec{r} + M_G\, d\theta$$

$$\Rightarrow T = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int M_G\, d\theta$$

$$m\vec{v}\cdot d\vec{v} = m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$m\vec{v}\cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$m\vec{v}\cdot\vec{a} = m\vec{a}\cdot\vec{v}$$

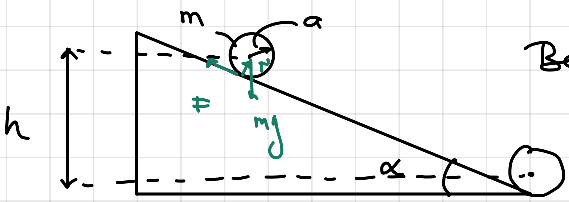
$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$$

Exempel

→ utan glidn.

Klot rullar ner för ett lutande plan från vila.

Bestäm farten då höjden minskat m. h.



N ⊥ mg verkar i mc ⇒ ingen hävarm.

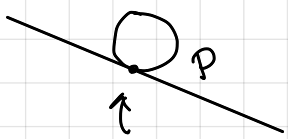
Initiellt: mgh

Efter: $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m a^2\right)\cdot \omega^2$

Men $\omega = \frac{v}{a}$ ty utan glidn.

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{5} m v^2 = \frac{7}{10} m v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} g h}$$



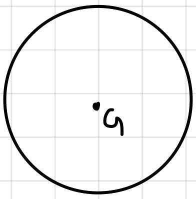
kontaktpkt stilla.
friktionen utför inget arbete!

Alt: Tag P, momentant i vila. ∴ translationshastighet är 0. Ren rotation.

$\frac{1}{2} I_P \omega^2 = mgh$ $\quad$ Steiners sats

$$I_P = I_G + ma^2 = \frac{2}{5} m a^2 + m a^2 = \frac{7}{5} m a^2$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10} m \frac{v^2}{a^2} \cdot a^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} g h}$$



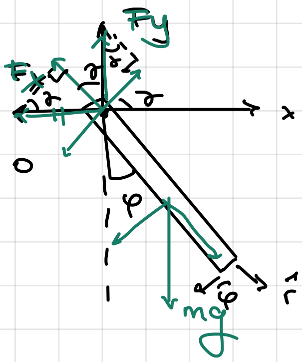
$I_G = \frac{2}{5}ma^2.$

Vi vet att $I_G = \int_K dm\,\rho^2 =$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{m}{\frac{4\pi a^3}{3}} \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi \,(r\sin\theta)^2 =$$

$$= \frac{2}{5}ma^2$$

6.20



Vi vet att

$$(-F_x\sin\gamma - F_y\cos\gamma + mg\cos\varphi)\,\hat r + (F_x\cos\gamma - F_y\sin\gamma + mg\sin\gamma)\,\hat\varphi =$$
$$= m\left((\ddot r - r\dot\varphi^2)\,\hat r + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\,\hat\varphi\right)$$

Men $\ddot r = \dot r = 0$ ty stel kropp.

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x\sin\gamma + F_y\cos\gamma - mg\cos\gamma = m\frac{l}{2}\dot\varphi^2 & (1) \\ F_x\cos\gamma - F_y\sin\gamma + mg\sin\gamma = m\frac{l}{2}\ddot\varphi & (2) \end{cases}$$

Notera dessutom att $\sum M_O = \frac{dL_O}{dt}$ (RMM)

där $M_O = -mg\sin\gamma\cdot\frac{l}{2}$

, $\frac{dL}{dt} = I\ddot\varphi = \frac{ml^2}{3}\ddot\varphi \Rightarrow \ddot\varphi = \frac{-3g}{2l}\sin\varphi$ (A

Dessutom: $mg\frac{l}{2}\cos\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\omega^2$ (energiprincipen)

$$\to \dot\varphi^2 = \frac{3g}{l}\cos\gamma \quad (B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x\sin\gamma + F_y\cos\gamma - mg\cos\gamma = \frac{3mg}{2}\cos\gamma \\ F_x\cos\gamma - F_y\sin\gamma - mg\sin\gamma = -\frac{3mg}{4}\sin\gamma \end{cases}$$

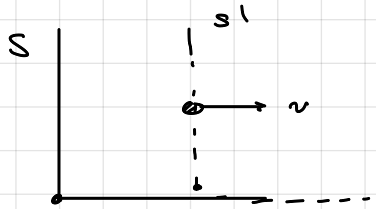
Inertialsystem

koordinataxlar (+ tid)

Ett referenssystem där "Newtons lagar" gäller.

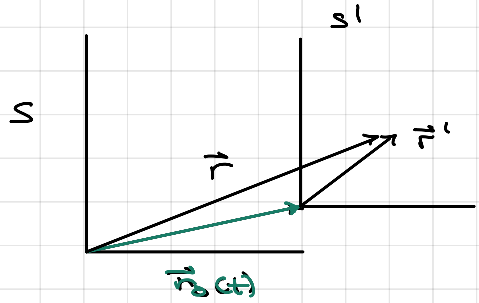
Newtons 1a: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

Om S är ett inertialsystem är även S', som rör sig m. konst. hastighet $\vec{v}$ relativt S, ett inertialsystem.



Samma fysik i alla inertialsystem. – Relativitetsprincipen

• Låt $\vec{r}_0(t) = \vec{c} + \vec{v}t$



Vi har $\vec{r} = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'$

$d/dt \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0(t) + \dot{\vec{r}}' =$

$= \vec{v} + \dot{\vec{r}}'$

$d/dt \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'$

Om $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}'$

Galileitransformationen

$(\vec{v} = v\hat{x})$ ∴

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Annorlunda i speciell relativitetsteori

Symmetrier :

- Translationsinvarians i rummet
- Translationsinvarians i tiden
- Rotationsinvarians
- Galileitransf.

Symmetri $\longleftrightarrow$ konserverade storheter (E. Noether)

- Translationsinvarians $\longleftrightarrow$ rörelsemängd
- Rotationsinvarians $\longleftrightarrow$ rörelsemängdsmoment
- Translationinvarians (i tid) $\longleftrightarrow$ energi

- Ett referenssystem : (x, y, z, t)
- Ett inertialsystem: referenssystem där N 1a lag gäller
  Då gäller att S & S' är inertialsys. Om S' rör sig m. konst. $\vec{v}$ relativt S.
- En symmetri som bevaras under en transf kallas invariant.

Idag: Speciell relativitetsteori

- Experimentella resultat + tankeexperiment antydde att ljushastigheten c är samma i alla referensramar.
- Einstein 1905 (Minkowski, geometrisk härl.)

Den speciella relativitetsteorin bygger på 2 postulat:

I: fysikens lagar har samma form i alla inertialsyst.

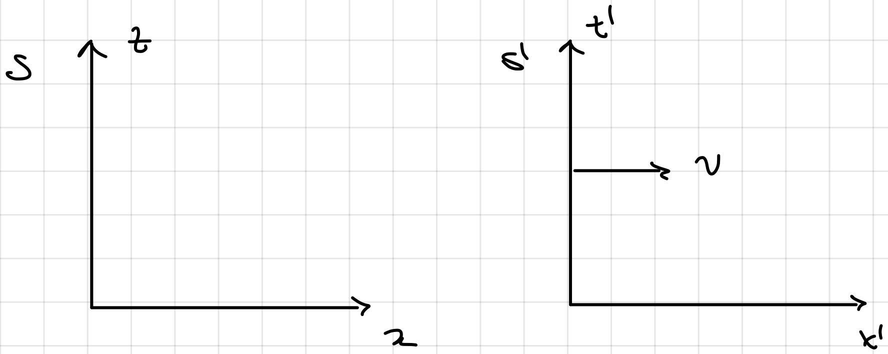
II: ljusets fart c är samma i alla inertialsyst.

från Galileitransf.

- $c = 2,99792458,0 \cdot 10^8$ m/s (varför exakt?)

Vi vill hitta en transformation mellan (t', x') till (t, x)

(vi antag $y' = y$ & $z' = z$).



Fungerar Galileitransformationen under förutsättningarna?

- Nej, vi kan hitta ett vilosystem för ljus. (bryter mot IIa postulatet).

Mål: hitta en transf. s.a. c är samma i bägge systemen S & S'.

Om vi inför $\vec{r} = (x, y, z)$ & $\vec{r}' = (x', y', z')$

$$\begin{cases} \therefore \ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = c^2 \ \text{ i } S & (1) \\ \therefore \ \left|\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|^2 = c^2 \ \text{ i } S' & (2) \end{cases}$$

$$(1)\cdot dt^2 \Rightarrow d\vec{r}^{\,2} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2$$

$$(2)\cdot dt'^2 \Rightarrow d\vec{r}'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = c^2 dt'^2 \qquad (A)$$

Inför nu $ds^2 := -(c\,dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$ds'^2 := -(c\,dt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

ds^2 ser ut som ett 4D-avst. men m. minustecken framför $(c\,dt)^2$.

$$\Rightarrow (A): \begin{cases} ds^2 = 0 \\ ds'^2 = 0 \end{cases}$$

Dvs: ds^2 är bevarad av transformationen.

Månday: rotationer bevarar skalärprodukten

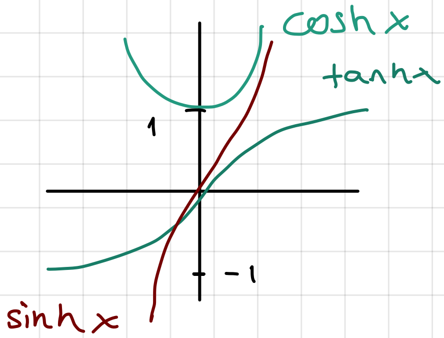
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}'\cdot\vec{a}' \text{ för roterad } \vec{a}'.$$

$$|\vec{a}|^2 = a^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}'\cdot\vec{a}' = a'^2 = |\vec{a}'|^2 \Rightarrow a = a' \text{ ty } a, a' \geq 0.$$

Nu: vilka transf bevarar ds^2 ?

Antar att $y' = y$, $z' = z$.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & -\sinh\beta \\ -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad (B)$$



där $\beta \in \mathbb{R}$ kallas rapiditet

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(Hyperboliska ettan: $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$)

Bevarar (B) ds^2?

$$ds'^2 \underset{(A)}{=} -c^2dt'^2 + dx'^2 = -(\cosh\beta \cdot c\,dt - \sinh\beta \cdot dx)^2 + (-\sinh\beta \cdot c\,dt + \cosh\beta\, dx)^2 =$$

$$= -c^2dt^2[\cosh^2\beta - \sinh^2\beta] + dx^2[\cosh^2\beta - \sinh^2\beta] + 0 =$$

$$= -c^2dt^2 + dx^2 = ds^2.$$

Ja, den bevarar! $\Rightarrow$ ljusets hastighet är bevarad

Vi vill skriva (B) i termer av hastigheten v.

$$(B) \Rightarrow \begin{cases} ct' = ct\cosh\beta - x\sinh\beta \\ x' = -ct\sinh\beta + x\cosh\beta \end{cases} \quad (C)$$

Betrakta S_2: $x' = -ct\sinh\beta + x\cosh\beta$

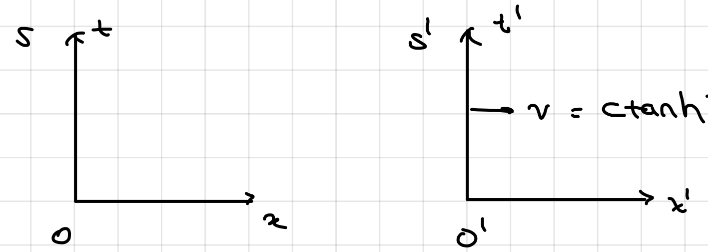
$$x' = \underbrace{\cosh\beta}_{\neq 0\ \forall\beta}(x - ct\tanh\beta))$$

{ för små β,
$\tanh\beta \approx \beta = \frac{c}{v}$
$\cosh\beta \approx 1$ ← Galilei.
$\Rightarrow x' = x - vt.$

Origo i S' för O' & i S för O.

O', $x' = 0$. $\Rightarrow 0 = \cosh\beta(x - ct\tanh\beta) \Leftrightarrow x = ct\tanh\beta$

Men O' rör sig enl. $x = vt \Rightarrow v = c\tanh\beta$



Vad är $\cosh\beta$ i termer av v?

$$\cosh\beta = \frac{\cosh\beta}{\sqrt{\cosh^2\beta - \sinh^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} := \gamma(v)$$

$$\Rightarrow v = c\sinh\beta\sqrt{1-(\tfrac{v}{c})^2} \Leftrightarrow \sinh\beta = \frac{v/c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \gamma(v)\frac{v}{c}$$

Vi kan byte β till v i (B).

Då fås efter insättning i (B):

$$(C)\quad \begin{cases} t' = \gamma(v)\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' = \gamma(v)(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Lorentztransf. relaterar tid & rumskoord mellan två inertialsyst. i rörelse relativt varandra.

Kallas för en <u>boozt</u> i x-led

— Lorentztransformationens vanligaste form.

Finns motsvarighet för boozt i y-led.

En boozt är en rotationsfri Lorentztransf.

Minkowski beskriver Lorentz-transf. som hyperbolisk rotation

↳ Läs!!

- Döljer att det är en rotation i 4D m. "metrik"

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- v är naturlig i 3D men ej i 4D.

  - <u>jmf</u> Parametrisera 2D rotation m. $u = \tan\alpha$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(x+uy)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(x-uy)$$

Notera likheten med (C).

Vi jämför Lorentztransf. & Galileitransf.

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} t' = \gamma(v)\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' = \gamma(v)(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

- γ - faktor : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$, $\gamma \geq 1$

- tid & $\underbrace{\text{rum}}_{(x,y,z)}$ mixas i Lorentz.

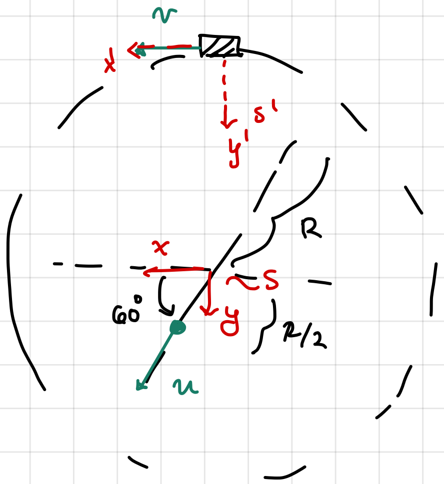
Samtidiga händelser är olika för olika observatörer.

- Tidsskillnaden mellan händelser är också olika
- Längder är olika (i Lorentz)
- v mellan S & S' : $v < c$ ty $-1 < \tanh \xi < 1$.

Finns inget vilosyst. för något som rör sig med ljusets fart c.

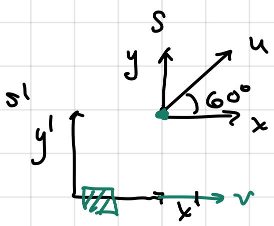
Om $c \to \infty \Leftrightarrow v$ är liten, då kommer Lorentz $\Rightarrow$ Galilei.

Exempel:



Vad är vinkeln α mellan handens hastighet & x'-riktningen i givna läget om $v = u = c/2$?

Lösn:



uttryck hastigheten u i både S & S'.

Relatera sedan de mha Lorentztransf.

$\underline{S}$: $u_x = \frac{dx}{dt} = u\cos 60° = u/2$

$u_y = u \sin 60° = \frac{\sqrt{3}u}{2}$

S': $u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{u}{2} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{u}{2}}$

$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} =$

Lorentz-transf

$= \frac{dy/dt}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt})} = \frac{\sqrt{3}\,u/2}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{u}{2})}$

$$\begin{cases} t' = \gamma(v)\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) \\ x' = \gamma(v)(x - vt) \\ y' = y \end{cases}$$

Sätt $v = u = c/2$: $u'_x = \frac{\frac{c}{4} - \frac{c}{2}}{\frac{1 - 1/8}{c^2}} = \frac{-\frac{1}{4}c}{7/8} = -2/7\,c$

Vi har $u'_y = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 7/8/c^2} = \frac{3/4}{7/4} = 3/7$

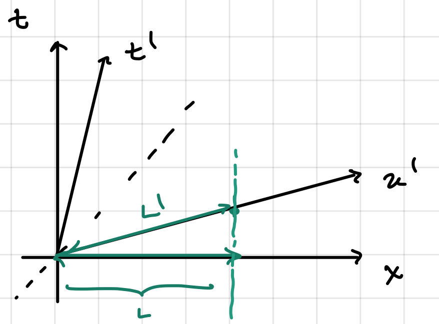
Vi har $\tan\alpha = \frac{3/7c}{-2/7c} = -3/2 \rightarrow \alpha = \arctan(-3/2)$, α i IIa kv.

Svar: $\tan\alpha = -3/2$, IIa kvadranten.

$\rightarrow$ α större i relativistiskt fall.

Gräns: $v \to c \Rightarrow \tan\alpha \to 0^- \rightarrow \alpha \to 180°$.

Relativistisk strålkastareffekt



$L'^2 = L^2 - dt^2 < L^2.$

minustecken!!

Vi väljer $c = 1$, v är dimlöst

$x' = \cosh\beta\, x + \sinh\beta\, t =$

$= \cosh\beta(\underbrace{x + \tanh\beta\, t}_{x - vt})$ då $x' = 0$

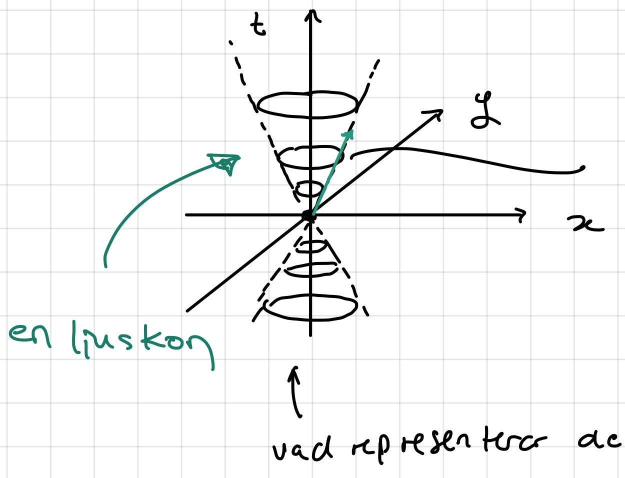
$v = -\tanh\beta$, β kallas rapiditet

$\cosh\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ger $x' = \gamma(x - vt)$.

$\sinh\beta = \dfrac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$c = 299\,792\,458$ m/s

en definition, ingen uppmätt siffra.



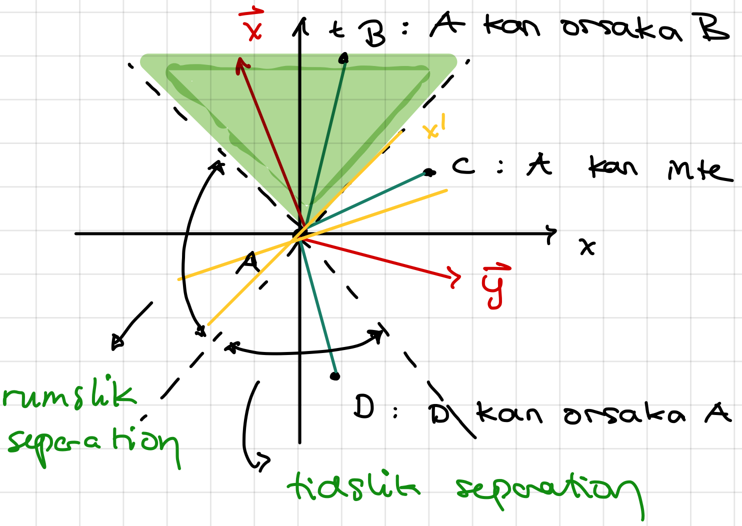
pkt i rumtid = "händelse"

en ljuspuls sänds ut

$x = (t, x, y, z)$

$x^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2 =$

$= t^2\left(-1 + \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2}\right) = 0$



Kausalitet: kollapsar om vi låter partiklar färdas i c.

$\vec{x}$ innehåller mer t. än x. (innanför ljuskonen)

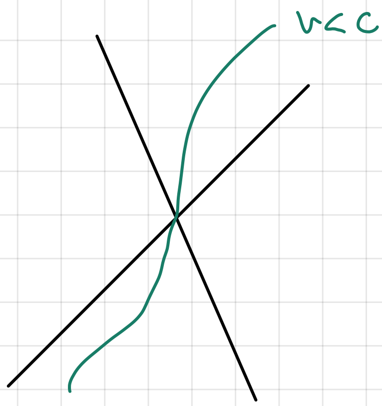
dvs: $|\vec{x}|^2 = -t^2+x^2 \leq 0.$

$\vec{y}$ innehåller mer x än t. (utanför ljuskonen)

dvs $|\vec{y}|^2 = -t^2+x^2 \geq 0.$

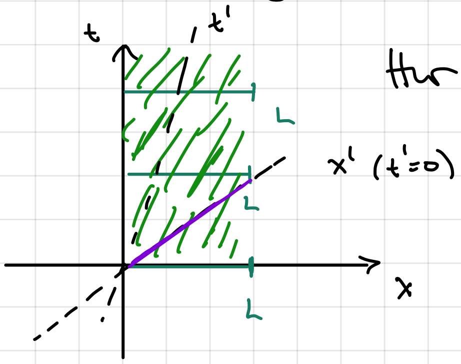
Samma uppdelning i alla inertialsystem.

$$\begin{cases} \text{tidslik} < 0 \\ \text{ljuslik} = 0 \\ \text{rumslik} \geq 0 \end{cases}$$



tagioner

Ex: Hur lång är en pinne?



Hur lång i S' (som rör sig m. v relativt S)

$L' < L$

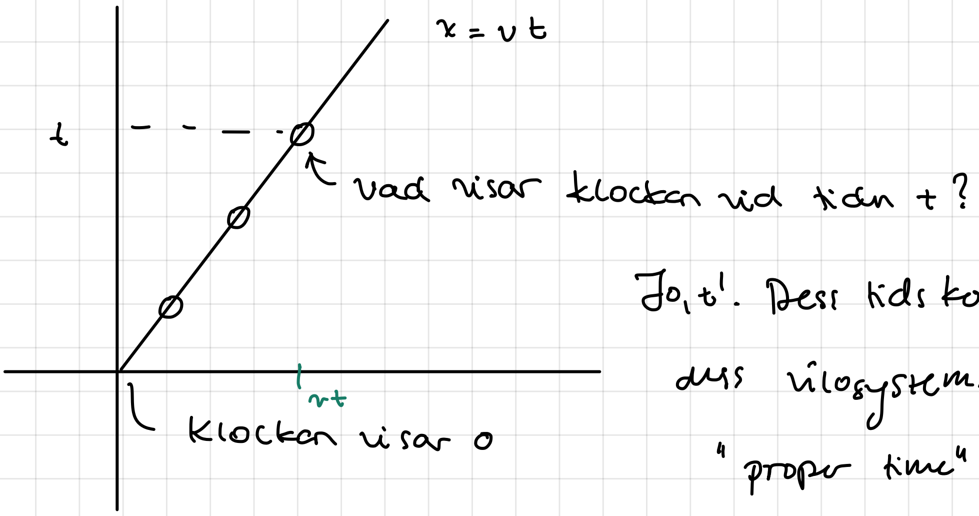
$$\begin{cases} x' = \gamma(v)(x - vt) \\ t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

$$t' = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{c^2}x \Rightarrow x' = \gamma(v)\left(x - \frac{v^2}{c^2}x\right) = x\gamma(v)\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \frac{x}{\gamma(v)}$$

dvs $L' = \frac{1}{\gamma(v)} L$

längdkontraktion

Tidsdilation:



Jo, t'. Dess tids koordinat i dess vilosystem.

"proper time" på eng.

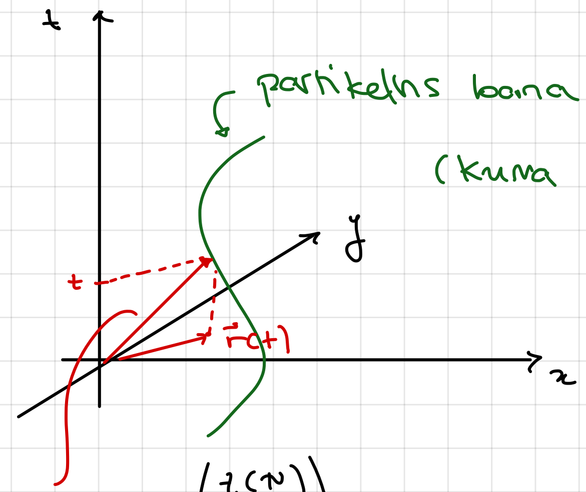
$$-t'^2 = v^2t^2 - t^2$$

$$t'^2 = t^2(1 - v^2)$$

$$\Rightarrow t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{t}{\gamma(v)}.$$

Tidsdilation.

Rörelsemängd (massa, energi)



$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

(kurva i rumtid)

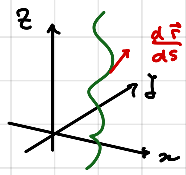
$$\underline{X}(\tau) = \begin{pmatrix} t(\tau) \\ x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix}$$

parametrisering m. parameter τ.

En möjlighet $\tau = t$.

Vi vill ha $\underline{U} = \frac{d\underline{X}}{dt}$

Analogi: parametriserad kurva i 3d



$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

Välj z till parameter.

$$\vec{r}(z) = (x(z), y(z), z) \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dz} = \left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1\right)$$

vektor?

Men $\frac{d\vec{r}}{ds}$ $\left[\frac{\text{vektor}}{\text{inv.}} = \text{vektor}\right]$.

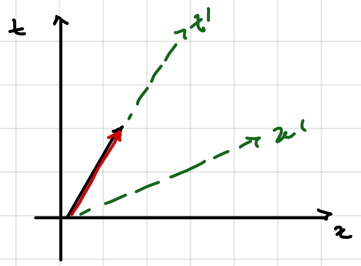
ds invariant oavsett ortogonalt system

tryggt val!!

$d\vec{s} = (dt, d\vec{r})$ partikelns hastighet $< c$ (tidslik vektor)

$$ds^2 = -dt^2 + |d\vec{r}|^2 < 0$$

$$dt = \sqrt{-ds^2}$$



I S': partikelns momentana vilosystem

$\therefore \; ds^2 = -dt'^2$

välj $d\tau = dt'$

Parametern är partikelns egentid. (invariant)

$$\Rightarrow \quad \underline{V} = \frac{d\underline{X}}{d\tau}$$

$$d\tau = dt' , \quad -dt'^2 = -dt^2 + |d\vec{r}|^2$$

$$\hookrightarrow \quad dt' = \sqrt{dt^2 - |d\vec{r}|^2} = dt\sqrt{1-\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2} =$$

$$= dt\sqrt{1-v^2} = \frac{dt}{\gamma(v)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{V} = \gamma(v)\frac{d\underline{X}}{dt} = \gamma(v)\cdot(1, \vec{v})$$

$$\vec{p} = m\underline{V} = m\gamma(v)\begin{pmatrix}1\\ \vec{v}\end{pmatrix} = (p^0, \vec{p})$$

- $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$

$$\underline{V}^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -1$$

Alt: $\underline{V}^2 = (\gamma(v)^2)(-1+v^2) = -1.$

- Rumskomp: $\vec{p} = m\gamma(v)\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m\vec{v}\,(1+\mathcal{O}(\vec{v}^2))$

  för små v gäller $\vec{p} = m\vec{v}$.

- Tidskomp: $p^0 = m\gamma(v) = \frac{m}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}(v^4)$

  $\hookrightarrow$ motsvarar energin

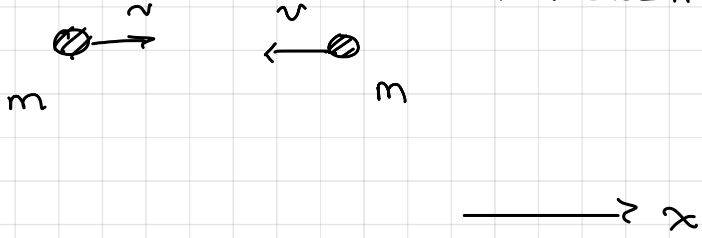
  $\therefore \quad E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \ldots$

sätt in c igen

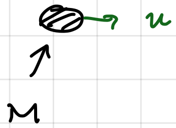
$$\Rightarrow \quad E = \gamma(v)mc^2$$

Ex:

* inelastisk stöt



efter:



? (sakta)

före: $\vec{p}_f = m\gamma(v)\cdot(1,v) + m\gamma(v)\,(1,-v) =$

$\Updownarrow \quad = (2m\gamma(v), 0)$

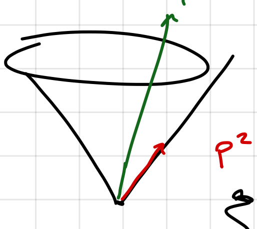
efter: $\vec{p}_e = M\gamma(u)\,(1,u)$

} jfr komponenter

$\Rightarrow u = 0 \quad \therefore \quad M = 2m\gamma(v) \geq 2m$ tv

termisk energi införs från stöten

Massa manifesterar sig i form av energi



$m\gamma(v)\cdot(1,v)$ $\quad m \to 0, \ \gamma \to \infty$ $\quad (0\cdot\infty$ -odef$)$

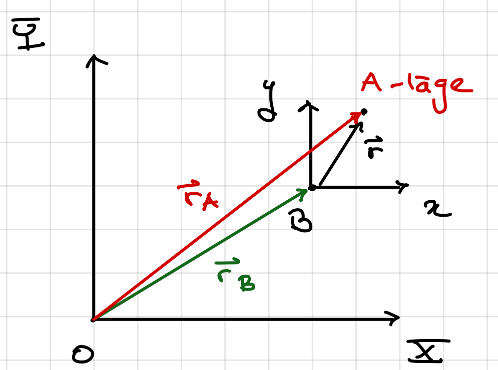
$p^2 = 0$: massless partikel

funkar ej!

$\vec{p} = \varepsilon(1,\vec{n}) \Rightarrow p^2 = 0$

↑ energi

Rörelse i icke-inertiala system



XYZ : inertialsyst.

xyz : acc system (NIIa gäller ej)

(samma orientering, men $\ddot{\vec{r}}_B \neq 0$)

Vi vet lagarna i XYZ :

$$m\ddot{\vec{r}}_A = \vec{F}$$

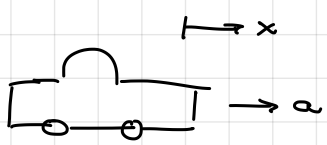
Använd att $\vec{r}_A = \vec{r} + \vec{r}_B$, derivera 2 ggr.

$$\Leftrightarrow \quad m(\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}}_B) = \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} + \underbrace{m\ddot{\vec{r}}_B}_{\text{"extra acc"}} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_B}$$

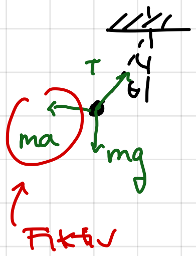
Vi tolkar detta som en fiktiv kraft

Exempel: Bil kör m. konstant acc. $a\hat{x}$ (rakt fram)



Vi hänger upp en pendel inne i bilen.

Vad är jämviktsläget?

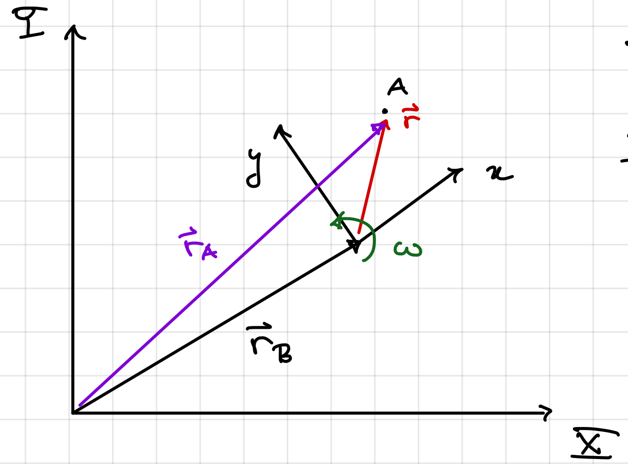


$\hat{x}$: $-ma + T\sin\theta = 0 \quad \therefore \quad T\sin\theta = ma$

$\hat{y}$: $T\cos\theta - mg = 0 \quad \therefore \quad T\cos\theta = mg$

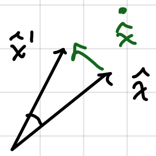
$$\Rightarrow \quad \tan\theta = a/g$$

Mer allmänt:



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

Vet: $m\ddot{\vec{r}}_A = \vec{F}$ (inertialsystem)



$$\therefore \quad m(\ddot{\vec{r}}_B + \ddot{\vec{r}}) = \vec{F}$$

Vi ska undersöka $\ddot{\vec{r}}$.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + x\dot{\hat{x}} + y\dot{\hat{y}} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \vec{\omega}\times\hat{x} \\ \dot{\hat{y}} = \vec{\omega}\times\hat{y} \end{array} \right\} =$$

$$= \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \vec{\omega}\times(x\hat{x} + y\hat{y}) =$$

$$= \underbrace{\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}}_{:=\vec{v}_{rel}} + \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

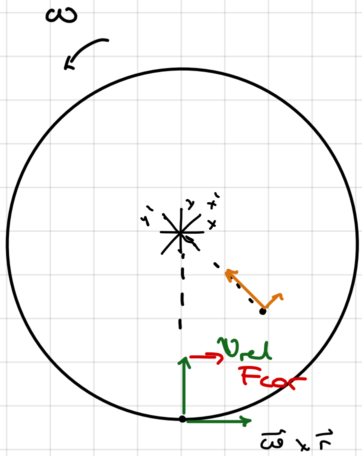
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}) =$$

$$= \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m(\ddot{\vec{r}}_B + \underbrace{\vec{a}_{rel}} + 2\vec{\omega}\times\underbrace{\vec{v}_{rel}} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}))$$

sett från acc syst.

- $$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{rel} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}}_{\text{coriolisacc.}} + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{centripetalacc.}}$$



$\vec{v}_{rel}$ svänger pga rotationen (1 bidrag)

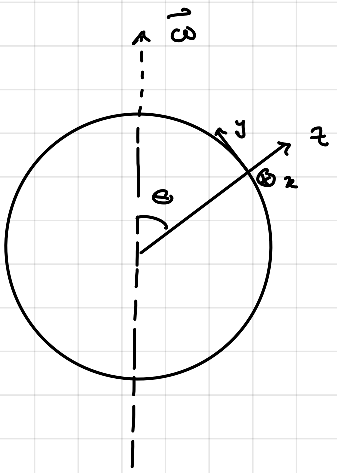
$\vec{\omega} \times \vec{r}$ blir mindre till beloppet (1 bidrag)

tillsammans coriolisacc.

$$\Rightarrow m\vec{a}_{rel} = \vec{F} - \underbrace{m(\vec{a}_B + \overbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}}^{\text{corioliskraft}} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{centrifugalkraft}})}_{\text{fiktiva krafter}}$$

- lodlinje, effektiv gravitation

Ex:



$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$$

$$\vec{\omega} = \omega(\hat{z}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta)$$

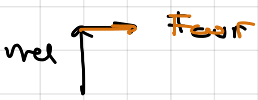
$$\Rightarrow \vec{F}_{cor} = -2m\omega(\hat{z}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta) \times (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) =$$

$$= -2m\omega(\dot{x}\cos\theta\hat{y} - \dot{y}\cos\theta\hat{x} - \underbrace{\dot{x}\sin\theta\hat{z}}_{\text{försumma!}})$$

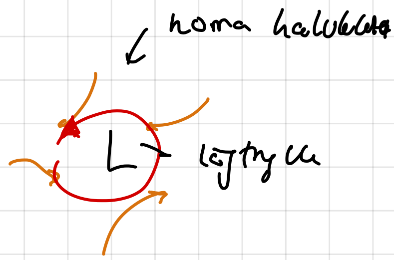
Horisontell komp: $-2m\omega\cos\theta(\dot{x}\hat{y} - \dot{y}\hat{x}) =$

$$= -2m\cos\theta\, \omega\hat{z} \times \underbrace{(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y})}_{\vec{v}_{rel}}$$

På norra halvklotet:

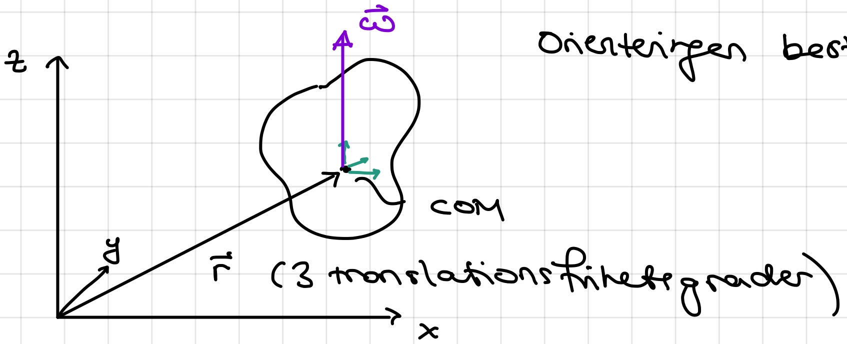


På södra halvklotet:



Föreläsning 11

Allmänn stelkroppsrörelse



Orienteringen bestäms via en ortogonal matris

(krånglig)

Små ändringar på ett litet tidsintervall kan beskrivas med en rotationsvektor. (enkelt)

Orientering P : $P^T P = I$

liten förändring av orienteringen : $P = I + \varepsilon$

$$\therefore P^T P = (I+\varepsilon)^T (I+\varepsilon) = (I+\varepsilon^T)(I+\varepsilon) =$$

$$= I + \varepsilon + \varepsilon^T + \underbrace{\varepsilon^T\varepsilon}_{= O(\varepsilon^2)} = I + \varepsilon + \varepsilon^T = I$$

$\Rightarrow \quad \varepsilon + \varepsilon^T = 0, \quad$ dvs $\quad \varepsilon = -\varepsilon^T \quad$ { ε är en antisymmetrisk matris }

- $$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $$P\vec{v} = \vec{v} + \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{v} + \begin{pmatrix} -\varepsilon_3 v_2 + \varepsilon_2 v_3 \\ \varepsilon_3 v_1 - \varepsilon_1 v_3 \\ -\varepsilon_2 v_1 + \varepsilon_1 v_2 \end{pmatrix} = \vec{v} + \vec{\varepsilon} \times \vec{v}$$

där $\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \ldots \quad \vec{\omega} \times \vec{v}$

{ antal koordinatplan : $\binom{d}{2}$ = # antal antisymmetriska matriser

I 3d : $\binom{3}{2} = \binom{3}{1}$ { plan $\perp$ vektor }

Vi vet sedan tidigare att: $\dot{H}_G = M_G$

(G vid infärm. om fast annars tyngdpunkt)

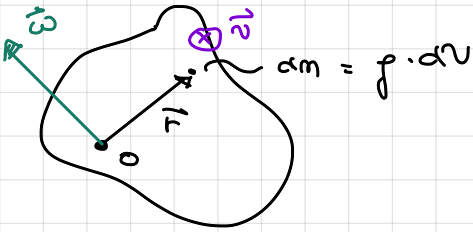
Vi vet i 2 dim att : $\vec{L} = \overset{\text{tal}}{I}\vec{\omega}$

Men i 3 dim? : $\vec{L} = I\vec{\omega}$

tröghetsmatrisen (mest allmänna)

<u>Härledning:</u>

Vi undersöker relationen mellan $\vec{\omega}$ & $\vec{L}$.



$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times dm\vec{v} = dm \;\; \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{L} = \int dm \; \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \int dm \left(r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} \right)$$

$$dL_x = dm\left((x^2+y^2+z^2)\omega_x - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)x\right) =$$

$$= dm(y^2\omega_x - yx\omega_y + z^2\omega_x - zx\omega_z) =$$

$$= dm\left((y^2+z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_x\right)$$

...

$$d\vec{L} = dm \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \int_{\text{Kropp}} d\vec{L} = \underbrace{\left(\int dm \begin{pmatrix} \downarrow \end{pmatrix} \right)}_{= I \text{ — tröghetsmatris.}} \vec{\omega}$$

Tröghetsmatrisens komp. kommer bero på val av koordinatsystem.

- På diagonalen: y^2+z^2 : (avst. från x-axeln)^2

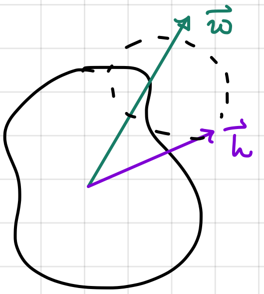
  ⋮

  Dvs tröghetsmoment resp x,y,z-axlarna.

- Avdiagonala element kallas deviationsmoment

  – gör att (i allmänhet) $\vec{L}$ inte $\parallel$ med $\vec{\omega}$.

Exempel:



Kan kroppen rotera m. konst. $\vec{\omega}$?

$\dot{\vec{L}} = 0 \Rightarrow \vec{\omega}$ måste förändras!

Nej, i allmänhet inte!

Ja, om $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Dvs $\vec{L} = \lambda\vec{\omega} = I\vec{\omega}$ ← egenvektor

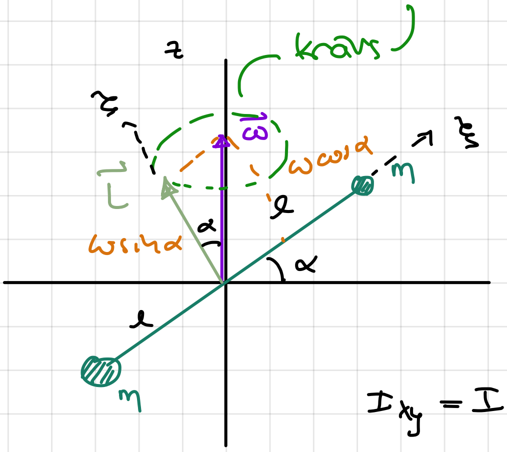
↑ egenvärde

(om $\vec{\omega}$ egenvektor till I så kan den rotera m. konst $\vec{\omega}$).

I symmetrisk (kan alltid diagonaliseras)

Exempel:

vridmoment om $\vec{\omega}$ ska vara konst. ($\vec{L}$ "roterar" kring $\vec{\omega}$)



$\vec{L} = I\vec{\omega}$ Bestäm I:

$I_{xx} = 2m(\ell\sin\alpha)^2$

$I_{yy} = 2m\ell^2$

$I_{zz} = 2m(\ell\cos\alpha)^2$

Valet ξ, ζ gör att vi kan döda alla deviationsmoment.

$I_{xy} = I_{yz} = 0$

$I_{xz} = -2m(\ell^2\sin\alpha\cos\alpha)$

$$\Rightarrow I = 2m\ell^2\begin{pmatrix}\sin^2\alpha & 0 & -\sin\alpha\cos\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha\cos\alpha & 0 & \cos^2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = 2m\ell^2\omega\cos\alpha\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\0\\\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$ ger "barfall"

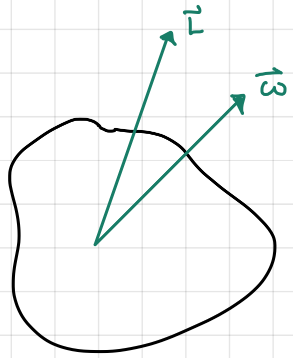
Tröghetsmatris:

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ där I är tröghetsmatrisen

$\vec{L}$ behöver ej vara parallell m. $\vec{\omega}$ ty I är en matris.

Skiljer sig från $\vec{p} = m\vec{v}$

skalär, därför $\vec{p} \parallel \vec{v}$.



$$I = \int dm \begin{pmatrix} x^2+y^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & y^2+z^2 \end{pmatrix}$$

där element I_{ij} beskrivs som:

$$I_{ij} = \int dm \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right) \quad \text{där} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Frågan: kan man välja koordinater s.a. I är diagonal? Svaret är ja, alltid!

$\Rightarrow$ Finns det tre ortog. vektorer $\hat{e}_{1,2,3}$ s.a.

$$I\hat{e}_i = \lambda_i e_i \quad \text{för } i = 1,2,3$$

$$\rightarrow \quad I' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Egenvektorer ger riktn. på huvudaxlar & egenvärden ger ny tröghetsmatris.

Vi söker: $\det(I - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$\mathbb{1}$: enhetsmatris

egenvektorer m. olika egenvärden är ortogonala

$\therefore$ polynomekv. i λ. (3 reella rötter ty symmetrisk)

Låt $I\hat{e}_1 = \lambda_1 \hat{e}_1$

$I\hat{e}_2 = \lambda_2 \hat{e}_2$

$$\therefore\ \hat{e}_1 \cdot \underbrace{(I\hat{e}_2)}_{\hat{e}_1 \cdot \lambda_2 \hat{e}_2 = \lambda_2(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2)} = \hat{e}_1^T I \hat{e}_2 = (\hat{e}_1^T I \hat{e}_2)^T =$$

$$= \hat{e}_2^T I^T \hat{e}_1 = e_2^T I \hat{e}_1 = \hat{e}_2^T \lambda_1 \hat{e}_1 =$$

$$= \lambda_1 \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2$$

$$\therefore\ (\lambda_1 - \lambda_2)(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2) = 0$$

Då $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gäller att $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2$. $\boxtimes$

(Om $\lambda_1 = \lambda_2$) alla linjärkomb $a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2$ är f.f. en egenvektor)

$\therefore$ kan alltid välja $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ som tre ortogon. vektorer.

$$I = \sum_i \lambda_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_i^T$$

$$I\vec{e}_1 = (\lambda_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1^T + \underbrace{\lambda_2 \hat{e}_2 \hat{e}_2^T + \lambda_3 \hat{e}_3 \underbrace{e_3^T)\vec{e}_1}_{=0}}_{0} =$$

$$= \lambda_1 e_1$$

osv.

$$= \underbrace{(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)}_{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vec{e}_2^T \\ \vec{e}_3^T \end{pmatrix}}_{P^T}$$

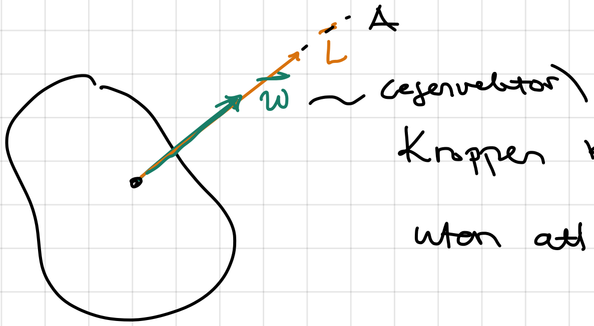
P en rotationsmatris

Kröckner delta

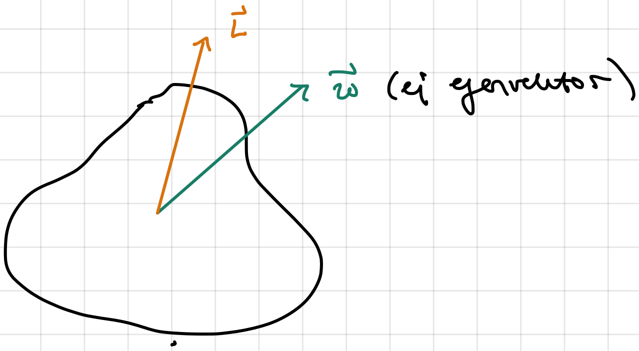
$$\{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}\}$$

$PP^T = 1$

Fysik: Om objektet roterar kring egenvektorn $\vec{e}_i$ kommer $\vec{L} = \lambda_i \vec{\omega}$, dvs $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.



Kroppen kan rotera runt axeln A utan att tillföra något yttre vridmoment.



$\vec{\omega}$ kan ej vara konst. bara $\vec{L}$.

konst $\vec{\omega}$ kräver ett vridmoment.

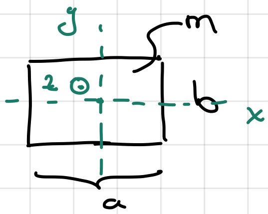
ty $\vec{M} := \dot{\vec{L}} \neq 0$.

Varje kropp har 3 $\perp$ axlar — kallas huvudtröghetsaxlar.

$\exists$ koord-system s.a. $I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$

hur trögt det är att rotera (huvudtröghetsmoment)

Ex:



$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ pga symmetri.

$$I_{xx} = \int y^2\,dm = \frac{m}{ab}\int y^2\,dA = \frac{m}{ab}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} y^2\,dx\,dy =$$

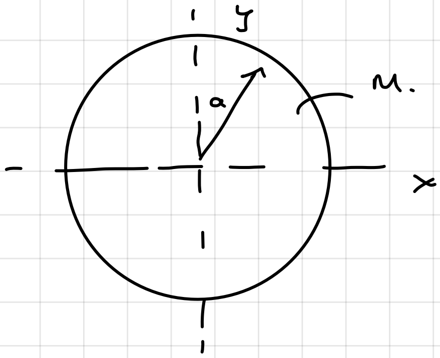
$$= 2\,\frac{m}{ab}\cdot a\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{b^3}{8}\right) = \frac{mb^2}{12}$$

$I_{yy} = \dfrac{ma^2}{12}$ enl. symmetri.

$I_{zz} = \dfrac{m}{12}(a^2+b^2)$

$$\Rightarrow I = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Ex:



$I_{xz} = I_{xy} = I_{zy} = 0$ symmetri.

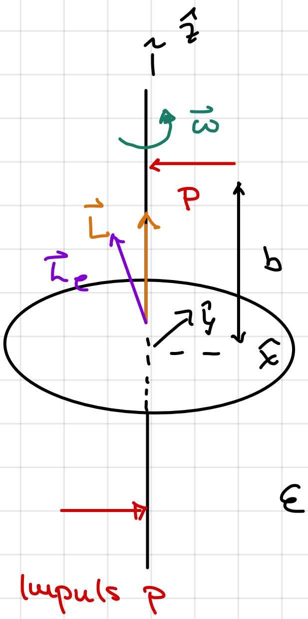
$$I_{zz} = \frac{ma^2}{2} \; ; \; I_{zz} = \int x^2 + y^2 \, dm = I_{xx} + I_{yy} = 2 I_{xx}$$

$$\therefore \quad I_{xx} = \frac{ma^2}{4}, \quad I_{yy} = \frac{ma^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{ma^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $I_{zz} = \int dm \, \rho^2 = \frac{m}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^2 \rho \, d\rho \, d\alpha = \frac{ma^2}{2}$

Ex:



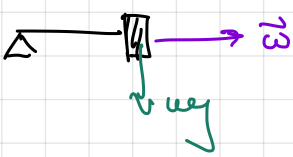
Vi tillför ett impulsmoment:

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 2bp \; \hat{\odot} = -2bp\hat{y} := \vec{\Delta L}$$

Efteråt: $\vec{L}$ förändras.

$$\vec{L} = \vec{L}_{före} + \vec{\Delta L}$$

Efter stöten, $\vec{L}$ behålls.



(gyroskop)

Analytisk mekanik

- Hur beskrivs ett mekaniskt system?
  - genom att införa koordinater (beskriver läget) för tex en partikel.
  - antalet koordinater är #antal frihetsgrader

Ex: partikelmekanik i 3 dim (x, y, z) eller (r, θ, φ)

Vi vill, att oberoende av val av koord-system, ska ge samma resultat.

- En formalism (uppsättning av regler) som är då oberoende av uppsättningen av koordinater.
  Dessa kallas generaliserade koordinater.
- Det som ska komma ut är de diff-ekv. som styr i systemet.

Först: Partikel utan kraft: $\ddot{\vec{r}} = 0$

Ort koord: $\vec{r} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$

Def nya koord: (q^1, q^2, q^3)

$$\cdot \left| \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \right| \neq 0$$

I x^i-systemet: $\frac{d}{dt} p_i = 0$

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{x}^i)^2$

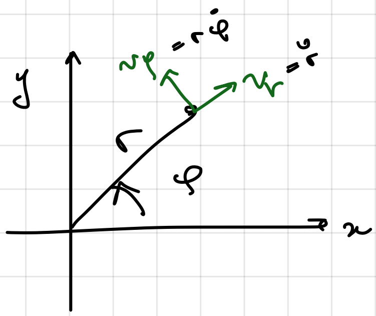
Def: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = m \dot{x}^i = p_i$

I ett godtyckl. koordinatsystem:

Definiera motsv. generaliserad rörelsemängd som:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$$

Ex: polära koordinater. (r, φ)



$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$ (OBS! dimensioner annorlunda, vi deriverar wrp annan variabel)

RMM

Med q^i.

Vi har $\frac{d}{dt}p_i = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = 0$? Nej! Behövs något mer.

RRM = 0. OK! (dvs rätt ekv. för vinkel)
Men $\dot{r} \neq 0$. (fel ekv. för radien).
a_r

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = mr(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$$

Något blev fel! Dvs $\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}$.

Vi saknar $(-r\dot{\varphi}^2)$

OK! Nu har vi den.

$$\underbrace{0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i}}_{\text{Alltid rätt?}} .$$

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = 0 & (r) \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) - 0 = 0 & (\varphi) \end{cases}$$

Bevis: Låt $T(q^i, \dot{q}^i)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^j}{\partial q^i}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial x^j}{\partial q^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}\right) + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^j}{\partial q^i}\right)}_{\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial q^i}}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial q^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q^i}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial q^i}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}\right)}_{=\frac{d}{dt}(m\dot{x}^j) = F^j}$$

Om $F^j = 0$ fås:

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = 0. \quad \blacksquare$$

oavsett val av koordinater.

Kraft $\bar{F} \neq \bar{0}$.

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial q^i} F^i}_{\mathcal{F}^j}$$

Lagranges ekvationer

$\mathcal{F}^j$ - generaliserad kraft

$$\sum_i \mathcal{F}^i dq^i = \sum_j F_j dx^i$$

F_i är def s.a. $\sum_i \mathcal{F}_i dq^i = dW$ betec).

Ex: $F_\varphi = \mathcal{F}_\varphi d\varphi$

vridande moment

Antag att systemet är konservativt. Vi antar att det $\exists$ en potential V som enbart beror på läget.

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$$

$$\mathcal{F}_i = -\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial q^i}\frac{\partial V}{\partial x^j} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$$

- $T(q, \dot{q})$
- $V(q)$; $\frac{dV}{d\dot{q}^i} = 0$

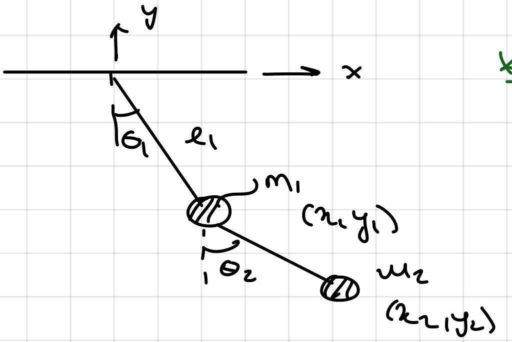
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial q^i}(T-V) = 0$$

def: $\mathcal{L} = T - V$. Då gäller: $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0}$

Lagrangefunktionen

Lagranges ekv. i kons. system

Ex: Dubbelpendulum



$g \downarrow$

Kinematic constraint:

$x_1 = l_1 \sin\theta_1$

$y_1 = -l_1 \cos\theta_1$

$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$

$y_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2$

$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \cdot l_1$ $\qquad$ $\dot{x}_2 = l_1 \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$

$\dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1$ $\qquad$ $\dot{y}_2 = l_1 \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2$

Potentiell energi: $m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1+m_2) g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2$

Kinetisk energi: $\frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \cos^2\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1^2 \sin^2\theta_1 \dot{\theta}_1^2)$

$+ \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \cos^2\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 + 2 l_1 l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2$

$$+ \ell_2^2 \cos^2\theta_2 \cdot \dot\theta_2^2 + \cancel{\ell_1^2 \sin^2\theta_1 \cdot \dot\theta_1^2} + \cancel{2\ell_1\ell_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdot \dot\theta_1 \cdot \dot\theta_2}$$

$$+ \ell_2^2 \sin^2\theta_2 \cdot \dot\theta_2^2 \Big) =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \Big(\ell_1^2 \dot\theta_1^2 + 2\ell_1\ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot\theta_1 \cdot \dot\theta_2$$

$$+ \ell_2^2 \dot\theta_2^2 \Big)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \Big(\ell_1^2 \dot\theta_1^2 + 2\ell_1\ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot\theta_1 \cdot \dot\theta_2 + \ell_2^2 \cdot \dot\theta_2^2 \Big)$$

$$+ (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos\theta_1 + m_2 g \ell_2 \cos\theta_2$$

1) $$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1} = m_1 \ell_1^2 \dot\theta_1 + m_2 \ell_1^2 \dot\theta_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot\theta_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) = m_1 \ell_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 \ell_1^2 \ddot\theta_1 - \cancel{m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot (\dot\theta_1 - \dot\theta_2) \dot\theta_2}$$

$$+ m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \ddot\theta_2$$

2) $$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \cancel{- m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot\theta_1 \cdot \dot\theta_2} - (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin\theta_1$$

$$- \qquad\qquad = 0$$

$$\boxed{(1) \quad (m_1 + m_2) \ell_1 \ddot\theta_1 + m_2 \ell_2 \dot\theta_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \ell_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin\theta_1 = 0}$$

$$\boxed{(2) \quad m_2 \ell_2 \ddot\theta_2 + m_2 \ell_1 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \ell_1 \dot\theta_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin\theta_2 = 0}$$

Lagranges ekvationer

1) Hur många frihetsgrader har systemet?

Inför så många koordinater q^i. $\quad i = 1, \dots, N$

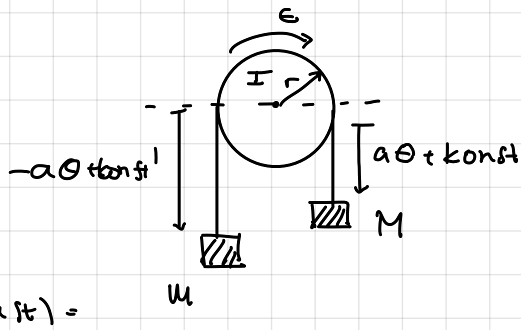
2) Hitta den kinetiska energin $T(q, \dot{q})$

Hitta den potentiella energin $V(q)$.

Bilda $\mathcal{L}(q, \dot{q}) := T(q, \dot{q}) - V(q)$

3) Beräkna $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad \forall q^i$.

Exempel: (38 i kompendiet).



1) En frihetsgrad. (θ)

glöm ej!

2) $T: \frac{1}{2}(m+M)(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

$V: -mg(-a\theta + konst') - Mg(a\theta + konst) =$

$= mga\theta - Mga\theta + konst'' = ga\theta(m-M) + konst''$

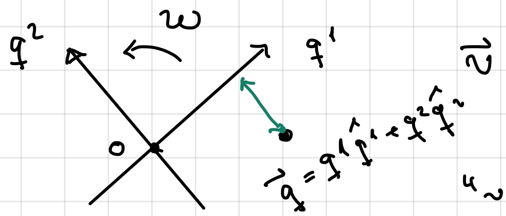
$\mathcal{L} = (m+M)(a\dot{\theta})^2 + ga\theta(m-M) + konst''$ Vi har nu:

3) .. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = (m+M)a^2\ddot{\theta} + I\ddot{\theta} - ga(m-M)$

$= ((m+M)a^2 + I)\ddot{\theta} + ga(m-M) = 0$

$$\ddot{\theta} = \frac{ag(M-m)}{(m+M)a^2 + I} \Leftarrow$$

Om $m = M$ blir $\ddot{\theta} = 0$. Rimligt.



$$\vec v = \dot{\vec q} + \vec\omega \times \vec q$$

$\sim v_{rel}$

Skalär trippelprod.

$$a\cdot(b\times c) = b\cdot(c\times a) = c\cdot(a\times b)$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(|\dot{\vec q}|^2 + 2\dot{\vec q}\cdot(\vec\omega\times\vec q) + |\vec\omega\times\vec q|^2\right) =$$

permutera

$$= \frac{1}{2}m\Big(|\dot{\vec q}|^2 + \underbrace{2\dot{\vec q}\cdot(\vec\omega\times\vec q)}_{=\vec q\cdot(\dot{\vec q}\times\vec\omega)} + \underbrace{(\vec\omega\times\vec q)\cdot(\vec\omega\times\vec q)}_{=\vec q\cdot((\vec\omega\times\vec q)\times\vec\omega)}\Big)$$

- $$\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} = m\left(\dot{\vec q} + (\vec\omega\times\vec q)\right)^i$$

- $$\frac{\partial T}{\partial q^i} = m\left(\dot{\vec q}\times\vec\omega + (\vec\omega\times\vec q)\times\vec\omega\right)^i$$

antisymm.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = m\left(\ddot{\vec q} + \dot{\vec\omega}\times\vec q + \vec\omega\times\dot{\vec q} - \dot{\vec q}\times\vec\omega - (\vec\omega\times\vec q)\times\vec\omega\right)^i =$$

$$= m\Big(\underbrace{\ddot{\vec q}}_{a_{rel}} + \dot{\vec\omega}\times\vec q + \underbrace{2\vec\omega\times\dot{\vec q}}_{a_{cor}} + \underbrace{\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec q)}_{a_{cent.}}\Big)^i$$

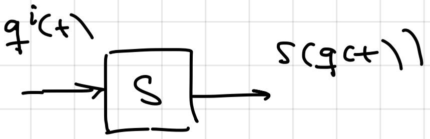
$V = -mgq^2 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial q^2} = -mg$ villket hade gett q_2 enl.

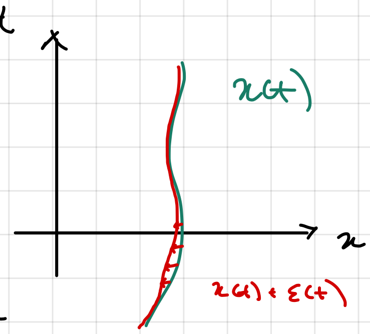
ovan men extra mg term i q_2.

?

Verkansprincipen

Definiera <u>verkan</u>: $S = \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, \mathcal{L}(q, \dot{q})$



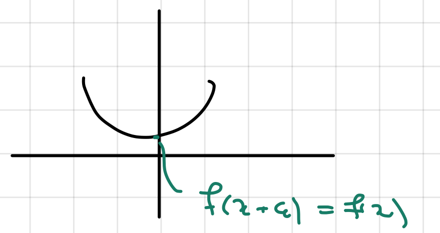


S är funktioner av tid. $\quad$ S: funktion $\to$ tal

S kallas för en funktional

<u>Princip</u>: "Banorna" (lösn.) till Lagranges ekv. är stationära punkter till S

Ole stationär punkt: $S[q+\varepsilon] = S[q]$



$$S[q+\varepsilon] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, \underbrace{L(q+\varepsilon, \dot{q}+\dot{\varepsilon})}_{L(q,\dot{q}) + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}$$

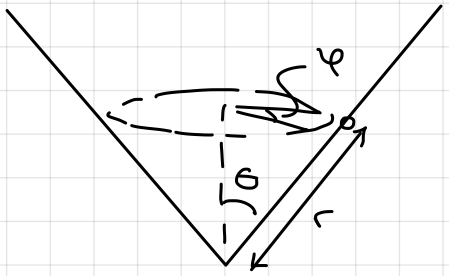
$$\to \quad S[q+\varepsilon] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left(\varepsilon \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

Stationär pkt: partiella derivator längs alla funktioner ska vara 0.

$$\Rightarrow \int d\tau\, \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad \forall \text{ små } \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Ex: (25/26) Partikel rör sig på en kon



2 frihetsgrader (r, φ)

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\sin\theta\,\dot{\varphi})^2\right)$$

$$V = mgr\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\theta$$

$$r: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(mr\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + mg\cos\theta = 0$$

$$\therefore \quad \ddot{r} - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + g\cos\theta = 0 \quad (1)$$

$$\varphi: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(m\underbrace{r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}}\right)$$

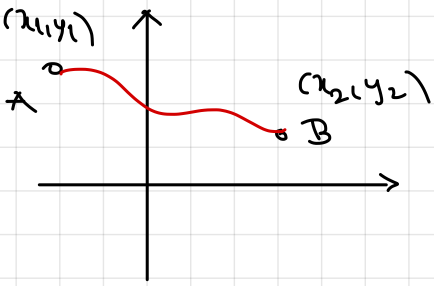
$$\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right) = 0. \quad (2)$$

$$2r\cdot\dot{r}\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + r^2\sin(2\theta)\cdot\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + r^2\sin^2(\theta)\,\ddot{\varphi}$$

Mekanik:

- Testa tidigare rotation utan potentiell energi.
- Calculus of variations (se bevis / härledning).
- Uppgifter i boken.

Derivering av Eulers Lagranges ekvation



Vi vill hitta $y=f(x)$ s.a. funktionalen

$I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$ är stationär.

$y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$

Antag $y(x)$ gör I stationär & uppfyller randvillkoren.

Introducera $\eta(x)$; $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$.

Låt $\bar{y}(x) := y(x)+\varepsilon\eta(x)$

$\bar{y}$ representerar en familj av kurvor, vi vill hitta ett specifikt $\bar{y}(x)$ s.a. $I(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\bar{y},\bar{y}')\,dx$ är stationär

Dvs: $\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=0:\quad \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\int_{x_1}^{x_2} F(x,\bar{y},\bar{y}')\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,\bar{y},\bar{y}')\,dx=0.\quad\Rightarrow\quad \int_{x_1}^{x_2}\left.\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\frac{\partial\bar{y}'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}dx=0.$$

$$\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}\left.\left[\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\cdot\eta'(x)\right]\right|_{\varepsilon=0}dx$$

$$\therefore\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\eta'\,dx \underset{\text{p.i.}}{=} \frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\eta'\,dx}_{=\eta(x_2)-\eta(x_1)=0.}-\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\left(\int\eta'\,dx\right)}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\,dx$$

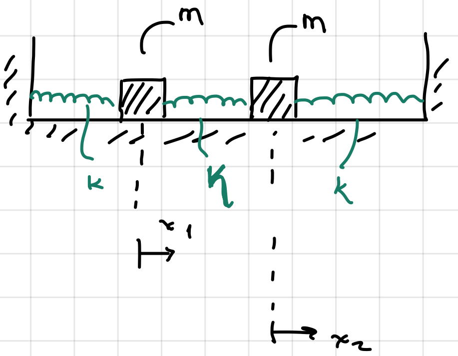
$$\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\right]\eta\,dx=0$$

Lagranges ekvation

Ty η godtycklig, lika m. 0 omm $\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}=0$

Exempel:

(2 frihetsgrader)



$$T = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

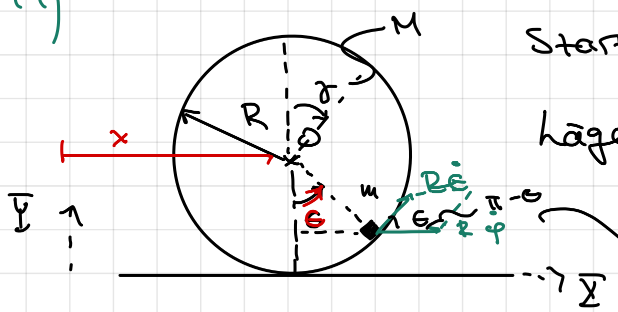
$$V = \tfrac{1}{2} k x_1^2 + \tfrac{1}{2} k x_2^2 + \tfrac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2$$

$$\mathcal{L} = T - V = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2} k x_1^2 - \tfrac{1}{2} k x_2^2 - \tfrac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2$$

$$\begin{cases} \underline{x_1}: \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = m\ddot{x}_1 + k x_1 + K(x_1 - x_2) = 0 \\ \underline{x_2}: \quad m\ddot{x}_2 + k x_2 + K(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

Kopplade linjära ODE'S.

49)



Start från vila s $\theta = \pi/2$.

Läget av O som fkn av θ.

$$v^2 = (R\dot{\theta})^2 + (R\dot{\varphi})^2 - 2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

2 frihetsgrader (x, θ)

$$T = \tfrac{1}{2} M (R\dot{\varphi})^2 + \tfrac{1}{2} \cdot MR^2 \cdot \varphi^2 + \tfrac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)$$

$$V = -mgR\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = MR^2\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) + mgR\cos\theta$$

$$\underline{\varphi} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left(2MR^2\dot{\varphi} + mR^2\dot{\varphi} + mR^2\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0$$

$$= \left(\underline{2MR^2}\ddot{\varphi} + \underline{mR^2}\ddot{\varphi} + mR^2\ddot{\theta}\cos\theta - mR^2\dot{\theta}^2\sin\theta\right) =$$

$$= R^2\left((2M + m)\ddot{\varphi} + m\ddot{\theta}\cos\theta - m\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0.$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{m\dot{\theta}^2\sin\theta - m\ddot{\theta}\cos\theta}{2M + m} \qquad (1)$$

$\underline{\theta}$ $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \frac{d}{dt}\left(\dot\theta + \dot\varphi\cos\theta\right) + mgR\sin\theta$

$+ mR^2 \dot\varphi\dot\theta \sin\theta$

$\therefore \quad \ddot\theta + \ddot\varphi\cos\theta - \cancel{\dot\varphi\sin\theta\,\dot\theta} + gR\sin\theta + \cancel{\dot\varphi\dot\theta\sin\theta} = 0$

$\therefore \quad \ddot\theta + \ddot\varphi\cos\theta + gR\sin\theta = 0.$

$\therefore \quad \dot\varphi + \dot\theta\cos\theta = \text{konst.}$

$\rightarrow (2M+m)\dot\varphi + m\dot\theta\cos\theta = \text{konst.}$

$\theta = \pi/2,\ \dot\theta = 0,\ \dot\varphi = 0 \rightarrow 0.$ ur begynnelsevillkor

(Dvs $(2M+m)\dot\varphi + m\dot\theta\cos\theta = 0$

Då $\dot\theta < 0$ blir $\dot\varphi > 0.$ Rimligt!)

$\therefore \quad (2M+m)\frac{d\varphi}{dt} = -m\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$

$\therefore \quad (2M+m)\,d\varphi = -m\,d\theta\cos\theta$

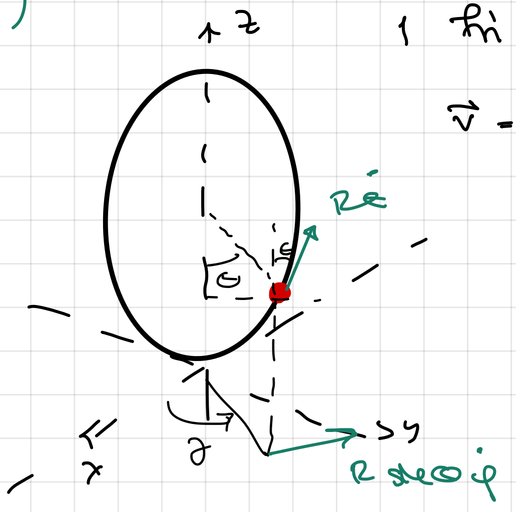
$\therefore \quad (2M+m)\varphi = -m\int_{\pi/2}^{\theta}\cos\theta\,d\theta = -m(\sin\theta - 1) =$

$= m(1-\sin\theta)$

$\rightarrow \quad \varphi = \frac{m(1-\sin\theta)}{2M+m}$

$\therefore$ Då $\theta = 0$ fås $\varphi = \frac{m}{2M+m} = \frac{1}{1+2\frac{M}{m}}$

27)



1 fri koordinat (θ)

$\vec{v} = R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{y} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{z}$

$- R\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{x}$

$\therefore\ |\vec{v}|^2 = R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\,\hat{x} =$

$= (R\dot{\theta})^2 + (R\sin\theta\,\dot{\varphi})^2.$

$\rightarrow T = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\underbrace{\dot{\varphi}^2}_{\Omega})$

& $V = -mgR\cos\theta$

$\therefore\ \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\Omega^2) + mgR\cos\theta$

$\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mR^2(2\dot{\theta})\right) - \frac{1}{2}mR^2(\sin 2\theta)\cdot\Omega^2)$

$- mgR(-\sin\theta) =$

$= mR^2\ddot{\theta} - mR^2\sin\theta\cos\theta\,\Omega^2 + mgR\sin\theta = 0.$

$\Leftrightarrow\ \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta - \sin\theta\cos\theta\,\Omega^2 = 0.$

$\therefore\ \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0.$

För stabila positioner: $\ddot{\theta} = 0.$

$\therefore\ \left(\frac{g}{R} - \Omega^2\cos\theta_0\right)\sin\theta_0 = 0.$

$\cos\theta_0 = \frac{g}{R\Omega^2}$ eller $\sin\theta_0 = 0.$ $\therefore \theta_0 = 0$ eller π.

(1) då $\left|\frac{g}{R\Omega^2}\right| \leq 1$ (2) förutsatt att $\left|\frac{g}{R\Omega^2}\right| \leq 1$

Fall 1 $\exists$ stabila positioner $\cos\theta_0 = \frac{g}{R\Omega^2}$

men omm $\left|\frac{g}{R\Omega^2}\right| \leq 1 \iff \sqrt{\frac{g}{R}} \leq \Omega$

Fall 2 om $\sin\theta_0 = 0$, dvs $\theta_0 = 0, \pi$

Om $\dot\varphi < \Omega$ så finns 0 & π som stabila positioner.

2a 40, 43, 51, 52, 64, 65, 69

37 En trivetsgrad (ϕ).

där $x = a\cos\phi$, $y = b\sin\phi$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}m(a^2\sin^2\phi\cdot\dot\phi^2 + b^2\cos^2\phi\cdot\dot\phi^2)$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}m(a^2\sin^2\phi\cdot\dot\phi^2 + b^2\cos^2\phi\cdot\dot\phi^2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(2a^2\sin^2\phi\cdot\dot\phi + 2b^2\cos^2\phi\cdot\dot\phi)\right]$$

$$- \frac{1}{2}m(a^2\sin(2\phi)\cdot\dot\phi^2 - b^2\cos(2\phi)\cdot\dot\phi^2]$$

$$= \frac{d}{dt}(m\dot\phi(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)) - \frac{1}{2}m\dot\phi^2(a^2\sin(2\phi) - b^2\cos(2\phi)]] = 0$$

$$= m\ddot\phi(a^2\sin^2\dot\phi + b^2\cos^2\phi) +$$

$$+ m\dot\phi^2(a^2\sin(2\phi) - b^2\cos(2\phi)) - \frac{1}{2}m\dot\phi^2(a^2\sin(2\phi) - b^2\cos(2\phi))$$

$$= m\ddot\phi(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi) + m\dot\phi^2(a^2\sin\phi\cos\phi - b^2\sin\phi\cos\phi] = 0$$

$$\iff \ddot\phi + \frac{(a^2 - b^2)\sin\phi\cos\phi}{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi}\dot\phi^2 = 0.$$

Om $a = b$ fås $\ddot\phi = 0$. Rimligt! Konstant $\dot\phi$ pga symmetri!

Vad är tidsutvecklingen av $A(q,p)$?

$$\dot{A} = \dot{q}\frac{\partial A}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial q}\cdot\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial A}{\partial p} = \{A, H\}$$

Poissonparentes

$$\dot{H} = \{H, H\} = 0.$$

kons-system!

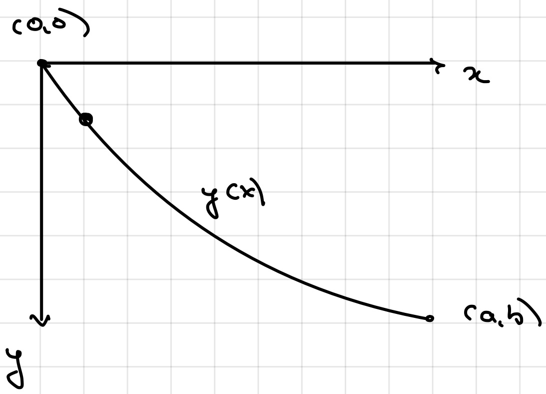
Om vi kan hitta koord. s.a. $\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \Rightarrow \dot{p} = 0.$

- Ex: Translationssymmetri.

Rotationssymmetri $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \text{konst.}$

RMM

Brachistochron – problemet



Partikel glider på kurvan $y = y(x)$ från $(0,0)$ till (a,b)

$S = \int dt$ där $dt = \frac{ds}{v}$

$v = \sqrt{2gy(x)}$ & $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$

$$\rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}\,dx$$

Dvs: $L[x, y(x), y'(x)] := \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}$

Euler Lagrange ger:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)(1+y'(x)^2)}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)^3}}$$

$$= \frac{y''}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{1}{2}\frac{y'^2}{\sqrt{y^3}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y}\sqrt{(1+y'^2)^3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y^3}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = y'' y (1+\cancel{y'^2}) - \frac{1}{2} y'^2 (1+y'^2) - \cancel{y y'^2} y^4$$

$$+ \frac{1}{2}(1+y'^2)^2 =$$

$$= y'' y + \frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 2yy'y'' + y'^3 + y' = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\big(\underbrace{yy'^2 + y}\big) = 0.$$

$$\hookrightarrow \quad yy'^2 + y = C$$

$$y' = \sqrt{\frac{C}{y} - 1} = \sqrt{\frac{C-y}{y}}$$

$$\int dy \sqrt{\frac{y}{C-y}} = \int dx$$

$$x = \int dy \sqrt{\frac{y}{C-y}} + D$$

Substitution: $y = C \sin^2 u$ $\quad = C\left(u - \frac{1}{2}\sin^2(u)\right) + D$

$$\therefore \quad x = C\left(u - \frac{1}{2}\sin^2(u)\right) + D. =$$

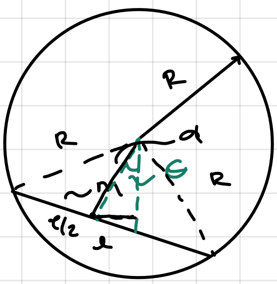
$$\therefore \quad \underbrace{y = \frac{C}{2}\left(1 - \cos(2u)\right)}_{\text{parameterframställning!}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} \tau - \sin\tau \\ 1 - \cos\tau \end{pmatrix}$$

↑ en cykloid

3 juni 2016 2.

$0 \leq \ell \leq 2R$



Bestäm EoM av pinnen.
Små rörelser kring det stabila jämviktsläget.

En frihetsgrad (θ)

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12} + md^2\right)\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12} + m\left(R^2 - \frac{\ell^2}{4}\right)\right)\dot\theta^2$$

↗ rotation kring O

$$= mR^2\left(\frac{\alpha^2}{3} + 1 - \alpha^2\right)\dot\theta^2 =$$

Låt $\alpha := \frac{\ell}{2R} \in [0,1]$

$$= mR^2\left(1 - \frac{2}{3}\alpha^2\right)\dot\theta^2$$

$$V = -mgd\cos\theta = -mg\sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}}\cos\theta = -mgR\sqrt{1-\alpha^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = mR^2\left(1-\tfrac{2}{3}\alpha^2\right)\dot\theta^2 + mgR\sqrt{1-\alpha^2}\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\left(2mR^2\left(1-\tfrac{2}{3}\alpha^2\right)\dot\theta\right) + mgR\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 2mR^2\left(1-\tfrac{2}{3}\alpha^2\right)\ddot\theta + mgR\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta = 0,$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot\theta + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\,g}{1-\frac{2}{3}\alpha^2 R}\sin\theta = 0. \quad (*)$$

små sv. kring jv-vägen $\sin\theta \approx \theta$.

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\frac{2}{3}\alpha^2}}. \quad \left\{\alpha = \frac{\ell}{2R}\right\}$$ Kom ihåg!!

om $\alpha = 0$, dvs $\ell = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{g/R}$ Rimligt. Ratbart oscillera.

om $\alpha = 1$, $\omega = 0$. Rimligt! kan ej rotera kring jv-läge ty inget moment verkar. $\Rightarrow$ vila!

<u>eller:</u> $\ddot\theta = \dot\theta\frac{d\dot\theta}{d\theta}$

$$\Rightarrow \quad \dot\theta\, d\dot\theta = -\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\,g}{1-\frac{2}{3}\alpha^2 R}\sin\theta\, d\theta \Big\}$$ lös med begynnelsevillkor!!

För vilket värde på α är ω störst?

$$f(\alpha) := \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\frac{2}{3}\alpha^2} \quad \therefore \quad f'(\alpha) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-\alpha^2}}(-2\alpha)\left(1-\frac{2}{3}\alpha^2\right) - \left(-\frac{4}{3}\alpha\right)\sqrt{1-\alpha^2}}{\cdots}$$

$$\therefore \quad -\alpha\left(1-\tfrac{2}{3}\alpha^2\right) + \tfrac{4}{3}\alpha\left(1-\alpha^2\right) = 0.$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{2}{3}\alpha^3 = 0 \quad \therefore \quad \tfrac{\alpha}{3}\left(1-2\alpha^2\right) = 0.$$

$\alpha = 0$ (min)

$\alpha = 1/\sqrt{2}$ (max).

$$\Rightarrow \quad \max_{\alpha\in[0,1]} \omega(\alpha) = \frac{1/\sqrt2}{1-1/3} = \frac{1/\sqrt2}{2/3} = \frac{3}{2\sqrt2} \gtrsim 1$$ lite större än 1.

Linjära ordinära diff-ekvationer

dvs ekvationer av en viss typ

$$\frac{d^p x}{dt^p} + a_{p-1}\frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} + \dots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = F(t)$$

variabel: t

funktion: $x(t)$

$F := 0$: homogen

$F \neq 0$: inhomogen

Om ordning p : p koefficienter $a_0, \dots, a_{p-1}$

I mekaniken är de oftast linjära då vi kan betrakta små rörelser kring jämviktsläget.

<u>Linjära ekv:</u> Om $x(t)$ & $\tilde{x}(t)$ är lösningar så är $x(t) + \tilde{x}(t)$ en lösning enl. lineariteten. (homogent fall).

Vi har ett linjärt rum av lösn. som (om linjärt oberoende) $x^{(1)}, \dots, x^{(q)}$

& då kan $x^{(1)}, \dots, x^{(q)}$ betraktas som en bas för rummet

& där $x(t) = \sum_{i=1}^{q} c_i x^{(i)} t.$

Basen har dimension $q = p$.

<u>Homogen:</u> Gissa lösning av formen $x(t) = e^{\lambda t}$.

<u>Exempel:</u> $p=0$: för trivial.

$p=1$: $\dot{x} + a_0 x = 0$.

$$\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \;\therefore\; e^{\lambda x}(\lambda + a_0) = 0 \Rightarrow \lambda = -a_0.$$

$x(t) = A e^{-a_0 t}$ (linjär komb. av lösningen).

Allmänt: Skriv ekv som $P(\frac{d}{dt})x = 0$.

- $P(\frac{d}{dt}) = (\frac{d}{dt})^p + a_{p-1}(\frac{d}{dt})^{p-1} + \dots + a_0$

Ansatt: $x(t) = e^{\lambda t}$

karakteristisk ekv.

$\rightarrow \quad P(\lambda) = \lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$

Lös polynomet för λ. Alltid p lösningar.

I Mekanik: $m\ddot{x} = F \Rightarrow$ 2a gradsekv.

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad \therefore \quad x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sum_{i=1}^{p} C_i e^{\lambda_i t}$$

Om n st värden lika μ: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{grad } n-1}}{Q(t)} e^{\mu t}$

Exempel: $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$

$\downarrow$

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad \lambda = \pm i\omega_0$

$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$

$= C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t$

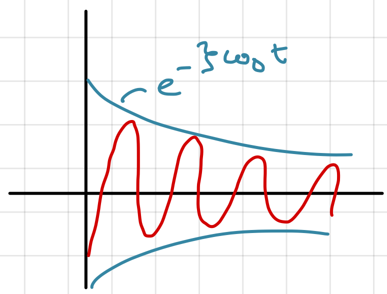
betrakta som en kraft

Om $\dot{x}$ ingår, flytta till högerledet, saknas potential ty beror endast på läge → ej konservativt.

dimlös

$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$

svag dämpning



$\lambda = -\zeta\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2(\zeta^2-1)} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2-1} =$

$= \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1})$

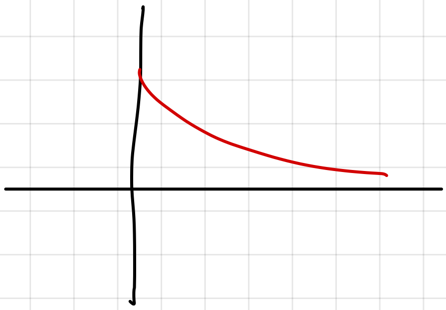
- $0 \le \zeta < 1$: $\lambda = \omega_0(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})$

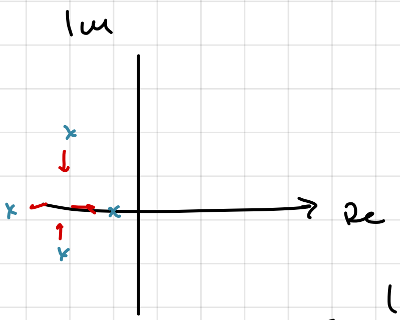
$x_\pm(t) = e^{\omega_0(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})t} = e^{-\zeta\omega_0 t} e^{\pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t}$

$= e^{-\zeta\omega_0 t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ där $\omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

• $\zeta > 1$: $x_{\pm}(t) = e^{(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t}$

stark dämpning





I fysiken har vi inte exakt noggrannhet hos parametrar för kritiskt dämpat fall.

• $\zeta = 1$: $x(t) = (A + Bt)\, e^{-\omega_0 t}$

kritiskt dämpat

Inhomogen: $F(t)$

hitta en lösning (partikulärlösn) $x_p(t)$.

Allmän lösning: $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$.

System av linjära diff-ekv

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = X(t) \quad ; \quad \ddot{X} + KX = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix}}_{\text{symmetrisk (varför?)}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Ansats: $X(t) = A e^{\lambda t}$

A: amplitudvektor

$\Rightarrow \lambda^2 A + KA = 0.$

A är en egenvektor till K m. egenvärde $-\lambda^2$.

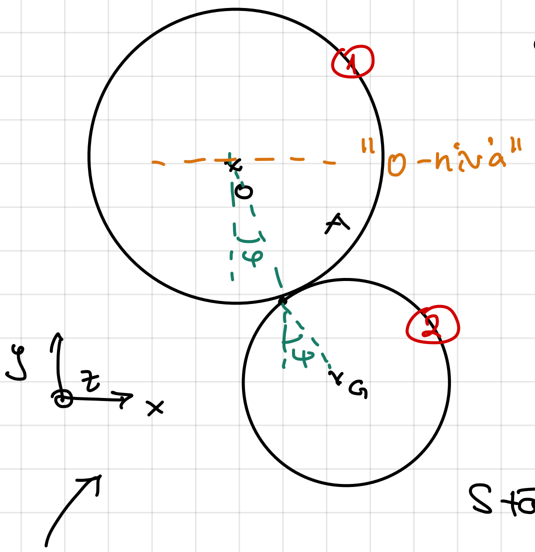
$\therefore$ $\det(K + \lambda^2 I) = 0$ ger egenvärden $-\lambda_i^2$

$\Downarrow$

egenvektor A

---

58 En dubbelpendel består av två identiska homogena diskar.



Sökt: Lagrangianen för systemet

Rörelseekvationerna för små svängningar

Lösn: Analytisk mekanik

φ, ψ är våra generaliserade koordinater.

Ställ upp T & V.

2 frihetsgrader (antag massa m, radie R)

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} I_\alpha \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} I_\alpha \dot{\psi}^2$$

$$I_\alpha = \int x^2 + y^2 \, dm = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \, dr \, d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

$$\vec{v}_G = R(\sin\varphi + \sin\psi)\dot{\hat{x}} - R(\cos\varphi + \cos\psi)\dot{\hat{y}} =$$

$$= R(\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + \cos\psi \cdot \dot{\psi})\hat{x} + R(\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + \sin\psi \cdot \dot{\psi})\hat{y}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_G|^2 = R^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \cos(\varphi - \psi) \cdot \dot{\varphi}\dot{\psi})$$

$$\Rightarrow T = \frac{mR^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mR^2 \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\cos(\varphi - \psi) \cdot \dot{\varphi}\dot{\psi}\right)$$

$$+ \frac{mR^2}{4}\dot{\psi}^2 = \frac{mR^2}{4}\left(3\dot{\varphi}^2 + 3\dot{\psi}^2 + 4\cos(\varphi - \psi) \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi}\right)$$

$$V = -mgR(\cos\varphi + \cos\psi)$$

Dvs: $$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{4}\left(3\dot\varphi^2 + 3\dot\psi^2 + 4\cos(\varphi-\psi)\cdot\dot\varphi\cdot\dot\psi\right) + mgR(\cos\varphi + \cos\psi)$$

• $\underline{\underline{\varphi}}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{mR^2}{4}\frac{d}{dt}\left(6\dot\varphi + 4\cos(\varphi-\psi)\cdot\dot\psi\right)$$
$$- \frac{mR^2}{4}\left(-4\sin(\varphi-\psi)\cdot\dot\varphi\dot\psi\right) + mgR\sin\varphi =$$

$$\boxed{\frac{mR^2}{4}\left(6\ddot\varphi + 4\sin(\varphi-\psi)\cdot\dot\psi^2 + 4\cos(\varphi-\psi)\cdot\ddot\psi\right) + mgR\sin\varphi = 0}$$

• $\underline{\underline{\psi}}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = \frac{mR^2}{4}\frac{d}{dt}\left(6\dot\psi + 4\cos(\varphi-\psi)\cdot\dot\varphi\right)$$
$$- \frac{mR^2}{4}\left(4\sin(\varphi-\psi)\cdot\dot\varphi\cdot\dot\psi + 4\cdot\cos(\varphi-\psi)\dot\varphi\right) + mgR\sin\psi =$$

$$\boxed{\frac{mR^2}{4}\left(6\ddot\psi - 4\sin(\varphi-\psi)\cdot\dot\varphi^2 + 4\cos(\varphi-\psi)\cdot\ddot\varphi\right)) + mgR\sin\psi = 0.}$$

För små svängningar kring $\varphi = \psi = 0$.

$\sin(\varphi-\psi) \approx \varphi - \psi$

$\cos(\varphi-\psi) \approx 1.$

$\dot\varphi^2 \approx 0.$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\ddot\varphi + 1\ddot\psi + \frac{g}{R}\varphi = 0 \\ \frac{3}{2}\ddot\psi + 1\cdot\ddot\varphi + \frac{g}{R}\psi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot\varphi \\ \ddot\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2g/R & 0 \\ 0 & -2g/R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot\varphi \\ \ddot\psi \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2g/R & 0 \\ 0 & -2g/R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \frac{2g}{5R} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0.$$

repetera diagonalisering (plocka i openTA, kompendiet (läs + uppgift))

Vi ansätter $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = A e^{\lambda t}$

$$\therefore \quad \lambda^2 A + \frac{2g}{5R} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} A = 0.$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 3c + \lambda^2 & -2c \\ -2c & 3c + \lambda^2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\therefore \quad (\lambda^2 + 3c)^2 = 4c^2$$

$$\therefore \quad \lambda^2 = -3c \pm 2c$$

$\lambda_1^2 : -5c \quad \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2c & -2c & 0 \\ -2c & -2c & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}, \; A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda_2 : -c \quad \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2c & -2c & 0 \\ -2c & 2c & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2c & -2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \mathrm{Re} \left\{ A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\sqrt{\frac{2g}{R}} t} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\sqrt{\frac{2g}{5R}} t} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{5R}} t\right) \\ -A \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{R}} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{5R}} t\right) \end{bmatrix}$$

Med begynnelsevillkor för φ & ψ

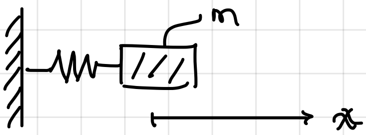
samt $\dot{\varphi}$ & $\dot{\psi}$ kan unik lösning fås.

Vidare: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{\sqrt{\frac{2g}{R}}}{\sqrt{\frac{2g}{5R}}} = \sqrt{5}.$ //.

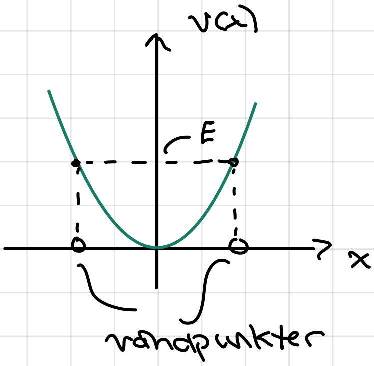
Svängningsrörelse

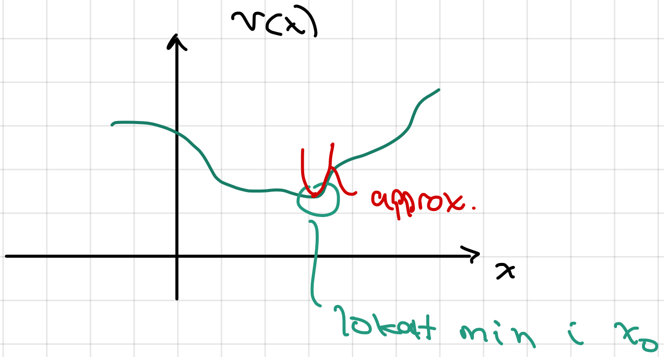
- Det måste finnas en återförande kraft.

  • $F = -kx$



Svarar mot en potential $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$





- kan approximeras med Taylorutveckling:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{=0}(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$= V(x_0) + \frac{V''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

k

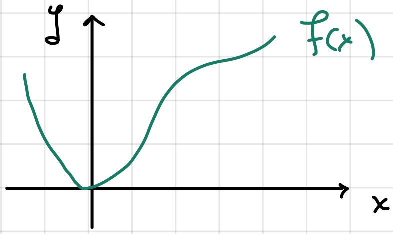
• "Alla" potentialer beter sig som en ideal fjäder för små rörelser kring stabilt jämviktsläge.

"Linjärisering" av rörelseekvationer:

$$m\ddot{x} + F(x) = 0. \rightsquigarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Exempel: En partikel rör sig på kurvan $y = f(x)$

↳ m. ett lokalt min.



$$v^2 = \dot{x}^2 + \left(f'(x)\,\dot{x}\right)^2 = \dot{x}^2\left(1 + f'(x)^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2\left(1 + f'(x)^2\right) - mg f(x).$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\left(1 + f'(x)^2\right)\right) - \frac{1}{2} m \dot{x}^2\left(2 f'(x) f''(x)\right) + mg f'(x) = 0.$$

$$\ddot{x}\left(1 + f'(x)^2\right) + \dot{x}^2 f'(x) f''(x) + g f'(x) = 0.$$

Leta kvadratiska termer i förväg! (i x & $\dot{x}$ ok!)

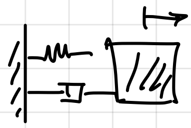
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad V = \frac{1}{2} mg f''(0)\, x^2$$

$$\therefore \quad m\ddot{x} + mg f''(0)\, x = 0.$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + g f''(0)\, x = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{g f''(0)}$$

Lägg till 2 saker:

- Dissipativ kraft $\propto$ hastighet
- Yttre kraft $F(t)$



$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

↳ $m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + F(t)$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\zeta\omega_0}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = \underbrace{\frac{F(t)}{m}}_{= C\cos\omega t \,=\, Ce^{i\omega t}}$$

dim-lös

Lösningen till $\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Ansätt $x(t) = Ae^{\lambda t}$

$$\therefore \lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

$$\therefore \lambda = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2-1} = \underbrace{\omega_0\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)}_{\omega_\pm}$$

- $\zeta = 1 \therefore \quad x(t) = (A+Bt)e^{-\zeta\omega_0 t}$ ~ kritisk dämpn.
- $\zeta > 1 \therefore \quad x(t) = Ae^{\omega_+ t} + Be^{\omega_- t}$ – stark dämpn.
- $\zeta < 1 \therefore \quad x(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t}\, e^{i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t} =$

~ svag dämpning

$$= Ae^{-\zeta\omega_0 t}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

Svängdörr – kritiskt dämpat

Rörelse avtar långsammare ju större ζ är.

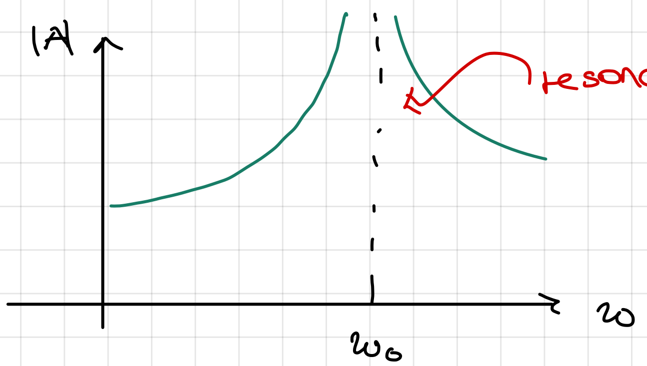
Yttre krafter, resonans

→ Först med $\zeta = 0$. $\quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = C\cos\omega t$

- $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
- $x_p(t) = A\cos(\omega t) \therefore \ddot{x}_p = -A\omega^2\cos\omega t.$

$$\therefore A\cos(\omega t)(\omega_0^2 - \omega^2) = C\cos\omega t$$

$$\rightarrow A = \frac{C}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{F_0}{\omega_0^2-\omega^2}$$



Om $\omega = \omega_0$;
ansatsen var fel.
Ansätt $x_p(t) \propto t\sin\omega t$

Om $\omega > \omega_0$, motför kraft ty tecken i A.

→ Med $\zeta \neq 0$:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = Ce^{i\omega t}$$

Sök $x_p(t)$: $\quad x_p = Ae^{i\omega t} = |A|e^{i(\omega t + \delta)}$

Låt $A = |A|e^{i\delta}$

$$\Leftrightarrow (-\omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2)A = C$$

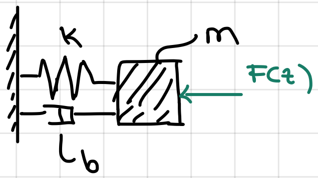
$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{C}{-\omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2} =$$

$$= C\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\zeta\omega_0\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}$$

$$|A| = \frac{C}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}} \quad \text{där } \tan\delta = \frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

om $C = \frac{F_0}{m}$: $\quad |A| = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}}$

$$= \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$



$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F(t)$$

Låt $\frac{k}{m} := \omega_0^2$ & $\frac{b}{m} = 2\zeta\omega_0$

$$\therefore \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t). = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

- $\zeta < 1$: svag dämpning
- $\zeta = 1$: kritiskt dämpat
- $\zeta > 1$: stark dämpning

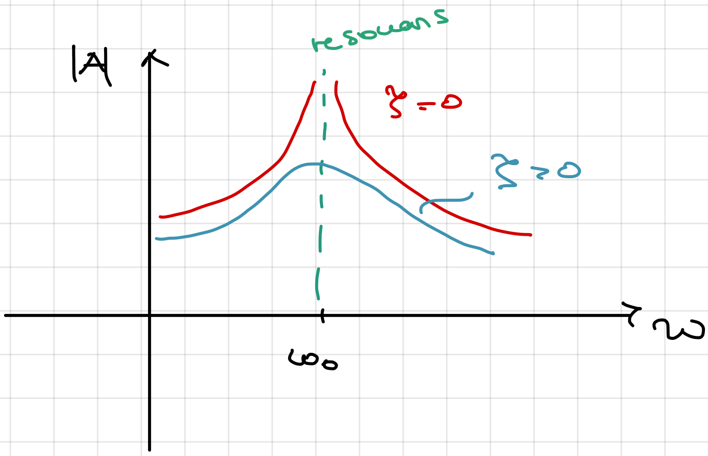
I alla fallen kommer homogen lösningen att dämpas med tiden.

- $x_h(t) \to 0$ då $t \to \infty$

transient

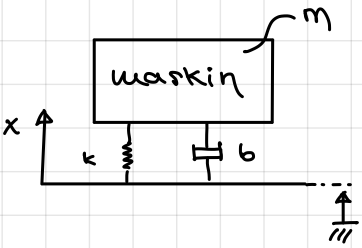
$$x_p(t) = Ae^{i\omega t} = |A|e^{i(\omega t + \delta)}$$

$$|A| = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_0)^2}} \; ; \quad \tan\delta = \frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$$



Exempel:

Vi har en kritisk dämpning.



$\ddot{x} = a_{rel} + \ddot{y} \quad \therefore \quad a_{rel} = \ddot{x} - \ddot{y}$

$y(t) = a\cos\omega t$

↳ $\ddot{y}(t) = -a\omega^2\cos\omega t$

↳ inför en **fiktiv kraft**

$ma\omega^2\cos\omega t$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + ma\omega^2\cos\omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = a\omega^2\cos\omega t$$

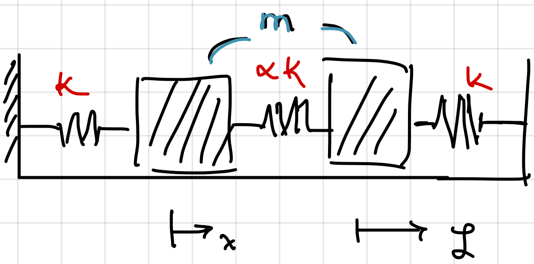
$$x_p = |A|\cos(\omega t + \delta) \quad \text{där} \quad |A| = \frac{a\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} =$$

$$= \frac{a\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2+\omega^2)^2}} = \frac{a\omega^2}{\omega_0^2+\omega^2} = \frac{a}{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$\zeta = 1$

$$\& \quad \tan\delta = \frac{2\omega_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$$

Kopplade svängningar



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}\alpha k(x-y)^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}ky^2 - \frac{1}{2}\alpha k(x-y)^2$$

$\underline{\underline{x}}$ $\quad m\ddot{x} + kx + \alpha k(x-y) = 0.$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{k}{m}(1+\alpha)x - \alpha y = 0. \\ &\ddot{y} + \frac{k}{m}(1+\alpha)y - \alpha x = 0. \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=C}\begin{pmatrix}1+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1+\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0.$$

$\underline{\underline{y}}$

↳ $\alpha = 0$ reduceras ned till känt fall.

Ansatz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ae^{\lambda t}$, A en vektor. Lös egenvärdesproblem:

$$\therefore \begin{vmatrix} C(1+\alpha)+\lambda^2 & -C\alpha \\ -C\alpha & C(1+\alpha)+\lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore (C(1+\alpha)+\lambda^2)^2 = C^2\alpha^2 \quad \therefore \quad C(1+\alpha)+\lambda^2 = \pm C\alpha$$

$$\therefore \lambda^2 = -C(1+\alpha) \pm C\alpha.$$

$\lambda_1^2 = -C$

$\lambda_2^2 = -C(1+2\alpha)$

$$\therefore \left(\begin{matrix} C\alpha & -C\alpha \\ -C\alpha & C\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left(\begin{matrix} -C\alpha & -C\alpha \\ -C\alpha & -C\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right) + B\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}(1+2\alpha)}\,t\right)$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right) - B\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}(1+2\alpha)}\,t\right) \\ y(t) = A\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}(1+2\alpha)}\,t\right) \end{cases}$$

- $\alpha = 0$ ger $x(t) = C\cos\sqrt{\tfrac{k}{m}}t$; $y(t) = D\cos\sqrt{\tfrac{k}{m}}t$. ok!

Tag $C=D$: $\begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_0\sqrt{1+2\alpha}\,t} \\ e^{i\omega_0 t} - e^{i\omega_0\sqrt{1+2\alpha}\,t} \end{pmatrix}$

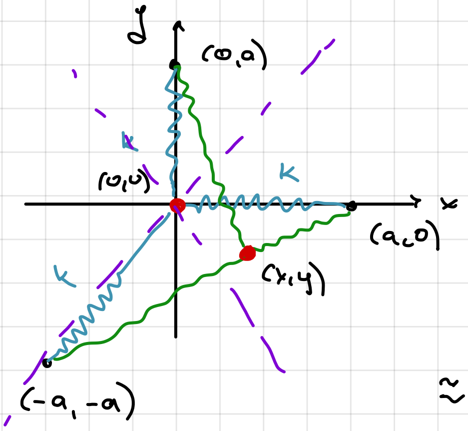
För små α, vad händer? Energin transporteras långsamt över mell en frekvens som är

$$x(t) = \cos\omega_0 t + \cos\omega_0\sqrt{1+2\alpha}\,t = 2\cos\left(\omega_0\frac{1+\sqrt{1+2\alpha}}{2}t\right)\cos\left(\omega_0\frac{1-\sqrt{1+2\alpha}}{2}t\right)$$

för små α; $\sqrt{1+2\alpha} = 1+\alpha+\mathcal{O}(\alpha^2)$

$$\Rightarrow x(t) \approx 2\cos\left(2\omega_0\left(1+\tfrac{\alpha}{2}\right)t\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\omega_0\alpha t}{2}\right)}_{\approx 1} \approx 2\cos(2\omega_0 t)$$

3 juni 2021. 5)



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x-a)^2+y^2} - a\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+(y-a)^2} - a\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2} - \sqrt{2}a\right)^2$$

kolla detta steg sen

$$\approx \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}k\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2+xy\right)$$

$$\overset{x}{=} \quad m\ddot{x} + \frac{3}{2}kx + \frac{1}{2}ky = 0.$$

$$\overset{y}{=} \quad m\ddot{y} + \frac{3}{2}ky + \frac{1}{2}kx = 0.$$

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{k}{2m}}_{=C}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \bar{0}.$$

$$\begin{pmatrix}3-\lambda^2 & 1\\ 1 & 3-\lambda^2\end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda^2)^2 = 1 \quad \therefore \quad \lambda^2 = 3 \pm 1$$

$$\lambda_1^2 = 2C; \quad \lambda_2^2 = 4C$$

$$\lambda_1^2: \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

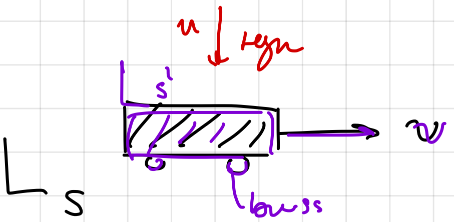
$$\lambda_2^2 \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}(t) = A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t$$

16 aug 2021 1)

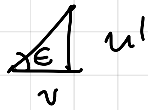
I bussens vilosys: S'

vilken vinkel faller regnet i?



Vi vill hitta u i S'.

$u' = (u'_x, u'_y)$ givet $(u_x, u_y) = (0, -u)$



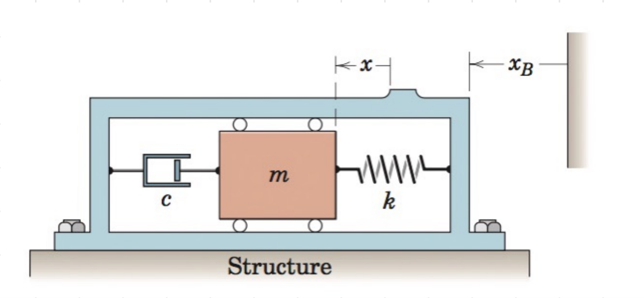
$$\begin{cases} dt' = \gamma(dt - v\,dx) \\ dx' = \gamma(dx - v\,dt) \\ dy' = dy \end{cases}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma(dt - v\,dx)} = \frac{u_x - v}{1 - v u_x} = \frac{-v}{1} = -v$$

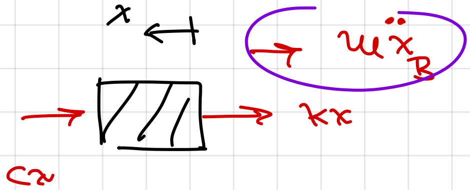
$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - v\,dx)} = \frac{-u}{\gamma(v)(1 - v u_x)} = \frac{-u}{\gamma(v)}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v\gamma(v)}{u}$$

Försumå? v, $\gamma(v) \approx 1 \quad \therefore \tan\theta = \frac{v}{u}$. Ok!



Vi har ett acc-koordinatsystem. Vi inför en fiktiv kraft!



Dvs: $m\ddot{x} = -kx \quad - c\dot{x} \quad - m\ddot{x}_B$

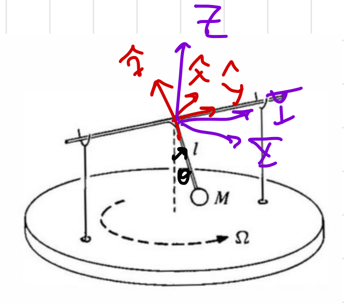
$$\therefore \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{c}{m}\dot{x} = -\ddot{x}_B = b\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

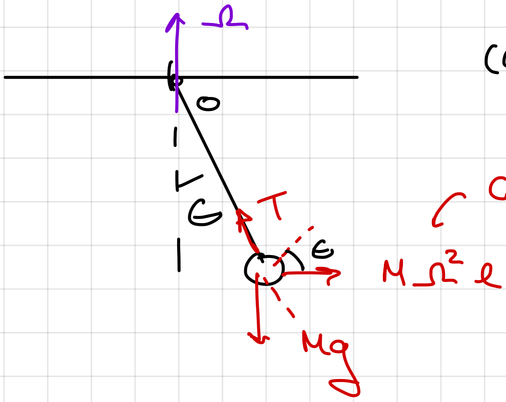
Vi ansätter $x(t) = a e^{i\Omega t}$

$$\therefore \quad a\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right)\cos\Omega t - \underbrace{\frac{c}{m} a\Omega i}\sin\Omega t = \underbrace{b\Omega^2}\sin\Omega t$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-\Omega^2}{\frac{c}{m}\, i\Omega} = \frac{i\Omega m}{c}$$

Rotating pendulum





Corioliskraft försumbar för små oscillationer

Centrifugalkraft

$$I_{xx}\ddot{\theta} = -Mgl\sin\theta + M\Omega^2 l^2 \sin\theta$$

$$I_{xx} = Ml^2 \quad \therefore \quad Ml^2\ddot{\theta} + M(gl - \Omega^2 l^2)\sin\theta = 0.$$

$$\approx \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right)\theta = 0.$$

Vi har att $\vec{M}_o = \frac{d}{dt}(\vec{L}_o)$

Vilken rotationsvektor styr $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$?

Jo, $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \Omega\cos\theta \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad I_O = ml^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \vec{h}_o = ml^2\begin{pmatrix} \Omega\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{h}_o}{dt} = \dot{\vec{h}}_o + \vec{\omega}\times\vec{h}_o =$$

$$= ml^2\begin{pmatrix} \Omega\cos\theta\cdot\dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + ml^2\begin{pmatrix} \Omega\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \Omega\cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Omega\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= ml^2\begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\theta} + \Omega^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$