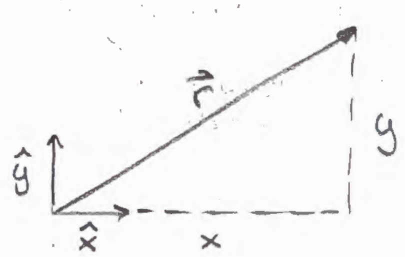
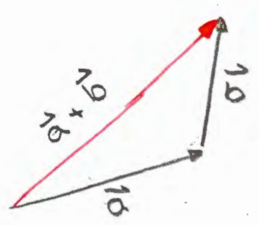
Mekanik II 200324

Vektorer - Linjär algebra



$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$

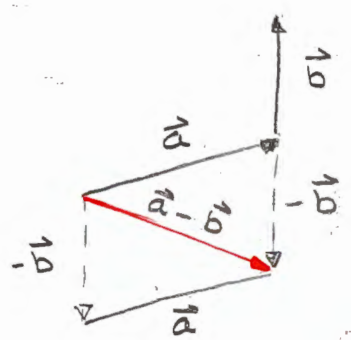


Vektorsumma:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} =$

$= a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + b_x\hat{x} + b_y\hat{y} =$

$= (a_x + b_x)\hat{x} + (a_y + b_y)\hat{y}$



Vektordifferens:

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Detta är korrekt oavsett koordinatsystem.

Koordinatinvariant förhållande.

Koordinatinvariant skalärprodukt

$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} \qquad \vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y}$

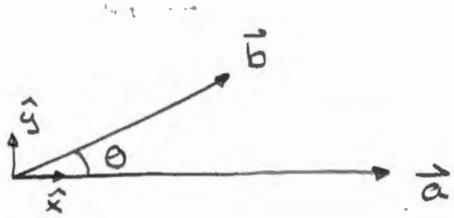
$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \gamma$ i ett koordinatsystem

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \gamma$ i alla koordinatsystem

Övning: visa detta.



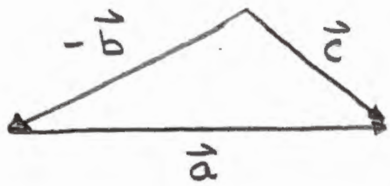
$\vec{a} = a\hat{x}$

$\vec{b} = b\cos\theta\,\hat{x} + b\sin\theta\,\hat{y}$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta}$$

Beviset gäller i alla koordinatsystem ty skalärprodukt är oberoende av koordinat.

Viktig strategi !!



Bevis av cosinussatsen

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) =$$

$$= |a|^2 + |b|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta_{ab})$$

Kryssprodukt

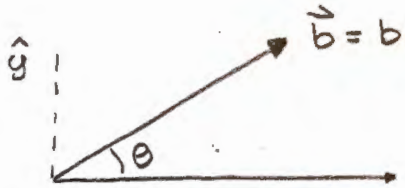
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = ($$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\hat{x} + (b_x a_z - a_x b_z)\hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{z}$$

Kryssprodukt är invariant.

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$ i ett system $\Rightarrow$ $\vec{a}'\times\vec{b}' = \vec{c}'$ i alla system

$\vec{b} = b\hat{x}\cos\theta + b\hat{y}\sin\theta$

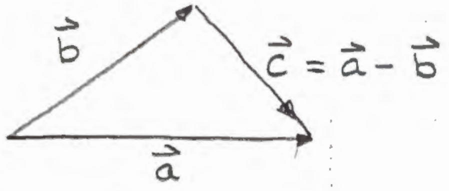


$\vec{a} = a\hat{x}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a}\times\vec{b} = \ldots \\ &= ab\sin\theta\,\hat{z}\end{aligned}}$$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta$ är koordinatinvariant.

Bevis av sinussatsen



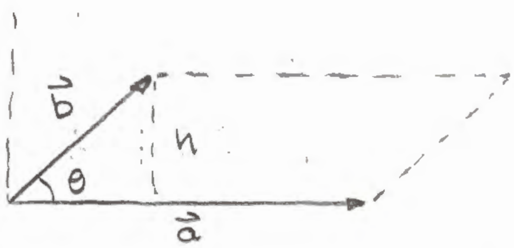
$\vec{c} \times \vec{a} =$

$= (\vec{a}-\vec{b}) \times \vec{a} =$

$= \cancel{|\vec{a}|}\,|\vec{c}|\sin\theta_{ac} = |\vec{b}|\,\cancel{|\vec{a}|}\sin\theta_{ab}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta_{ac}}{|\vec{b}|} = \frac{\sin\theta_{ab}}{|\vec{c}|} \qquad ∎$$

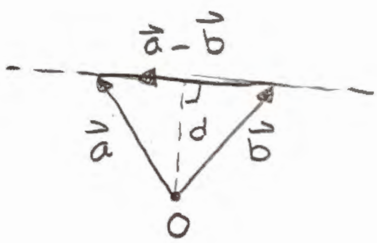
Fler tolkningar



area av parallellogram =

$= ha = b\sin\theta \cdot a = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Fråga: En linje passerar genom $\vec{a}$ o $\vec{b}$. hur nära origo är linjen?



Triangelarea: $d \cdot |\vec{a} - \vec{b}| \cdot \frac{1}{2}$

Men vi har även

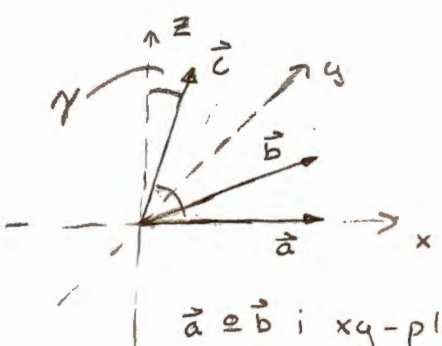
2 · area av triangel $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = d\,|\vec{a} - \vec{b}|$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a} - \vec{b}|}}$$

Kryssprodukt i 3D

Volymen av den uppspända parallellepipeden.



$\vec{a}$ o $\vec{b}$ i xy-plan

γ är mellan $\vec{c}$ o xy-plan

Basen: $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

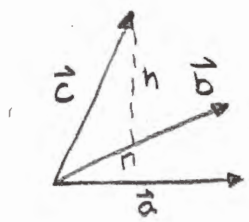
höjd

Volym: $|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|\cos\gamma =$

$= \underline{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$

Allmänt

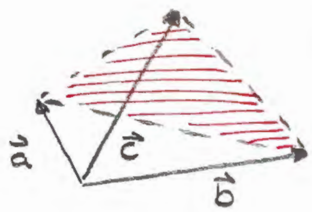
$$\text{area}_{ab} \cdot h$$



$$\text{area} \cdot \hat{z} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\text{volym} = \hat{z} \cdot \vec{c} \Rightarrow \boxed{\text{Volym} \quad \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}$$

Exempel Area av triangel i rymden



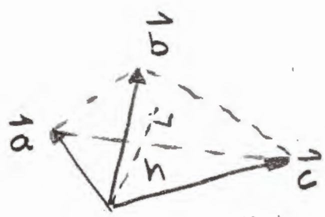
Sidor: $\vec{c} - \vec{a}$ o $\vec{b} - \vec{a}$

$$\text{Area} = |(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})| \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= |\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \overset{0}{\cancel{\vec{a} \times \vec{a}}}| \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}|}$$

Exempel Avstånd mellan plan och origo



$$\text{Volym} = \frac{1}{3} \text{Area}\, \Delta_{abc} \cdot h$$

$$|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \frac{1}{3} |(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{c})| \cdot h \cdot \frac{1}{2}$$

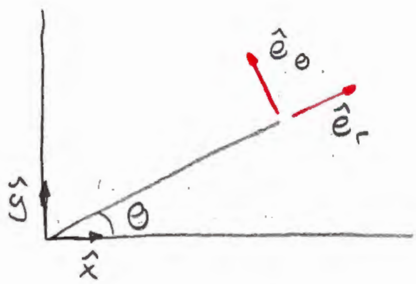
$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|}}$$

Identiteter

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\qquad$ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

Mekanik 200325



def

$$\hat{e}_r = \cos\theta_t\,\hat{x} + \sin\theta_t\,\hat{y}$$

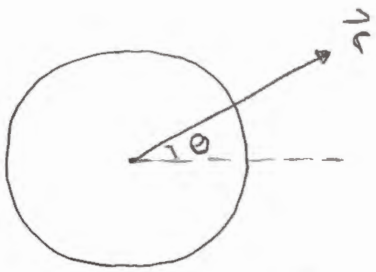
$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta_t\,\hat{x} + \cos\theta_t\,\hat{y}$$

Tidsberoende!

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\cos\theta_t}{dt}\hat{x} + \frac{d\sin\theta_t}{dt}\hat{y} =$$

$$= -\dot{\theta}\sin\theta_t\,\hat{x} + \dot{\theta}\cos\theta_t\,\hat{y} = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

P.s.s. $\dfrac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r$



Koordinat i "sitt eget" polära koordinatsystem:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

OBS: "absolut" $\vec{v}$ & $\vec{a}$, uppleus annorlunda för någon som rör sig med systemet.

Termerna:

$\ddot{r}\hat{e}_r$: acceleration man uppfattar i systemet, p.g.a acceleration av radie

$-\dot{\theta}^2 r\hat{e}_r$: centripetalacceleration – krävs för att behålla cirkelbana. Fiktiv kraft "utåt" som upplevs i systemet är centrifugalkraft

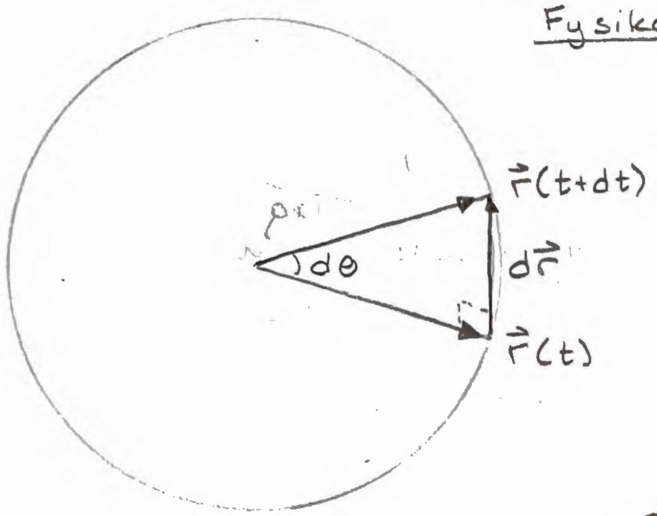
$\ddot{\theta} r\hat{e}_\theta$: acceleration p.g.a. acceleration av vinkel.

$2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta$: Coriolis (nästa sida)

Riktningsändring av hastighet medför acceleration

Riktningsändring av ortsvektor medför hastighet.

<u>Fysikalisk tolkning</u>



$$d\vec{r} = \hat{e}_\theta \, r \, d\theta$$

Geometriskt

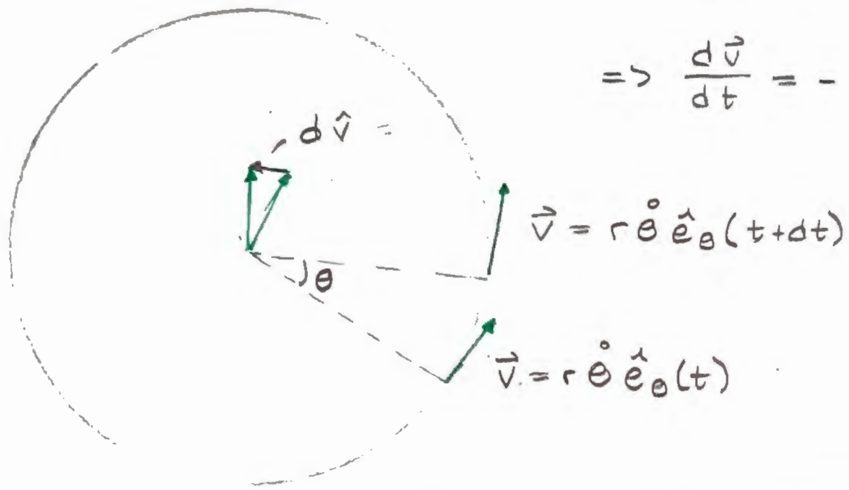
$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{e}_\theta \, r \, \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \, r \, \hat{e}_\theta$$

Geometriskt

$$d\vec{v} = r\dot{\theta} \, d\theta \cdot \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\dot{\theta}^2 \hat{e}_r$$

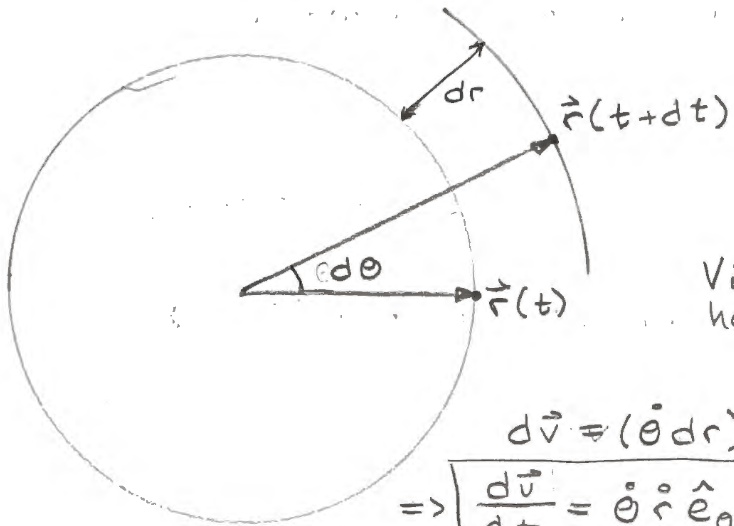
Centripetal-acceleration



Centripetalacceleration beror av att hastigheten har en riktningsändring

Centripetalkraften är motriktad centripetalaccelerationen

Coriolis acceleration



Vi har två bidrag till hastighetsändringen!

$d\vec v = (\dot\theta\, dr)\hat e_\theta$ eftersom radien ändrats och kroppen rör sig snabbare vid ökad radie

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec v}{dt} = \dot\theta \dot r \hat e_\theta}$$

$d\vec v = \dot r \hat e_\theta\, d\theta$ p.g.a ändring i riktning

$$\boxed{\frac{d\vec v}{dt} = \dot r \frac{d\theta}{dt} \hat e_\theta = \dot r \dot\theta \hat e_\theta}$$

Ett bidrag från ändring av fart, ett av ändring av riktningen.

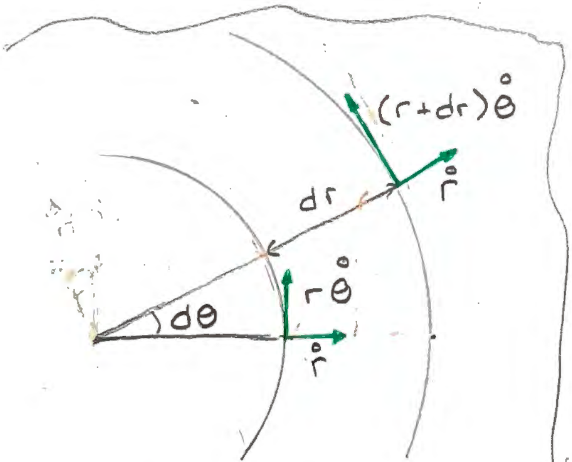
Repetition

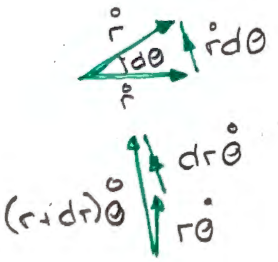
$$\vec a = (\ddot r - \dot\theta^2 r)\hat e_r + (\ddot\theta r + 2\dot r\dot\theta)\hat e_\theta$$

$\ddot r$: radiell-acc; $\dot\theta^2 r$: Centripetal; $\ddot\theta r$: vinkel-acc; $2\dot r\dot\theta$: Coriolis

Alla utom radiell acceleration ger upphov till en fiktiv kraft!

Coriolis och centripetalacceleration är den acceleration som krävs för att ett föremål ska bibehålla en cirkulär rörelse.





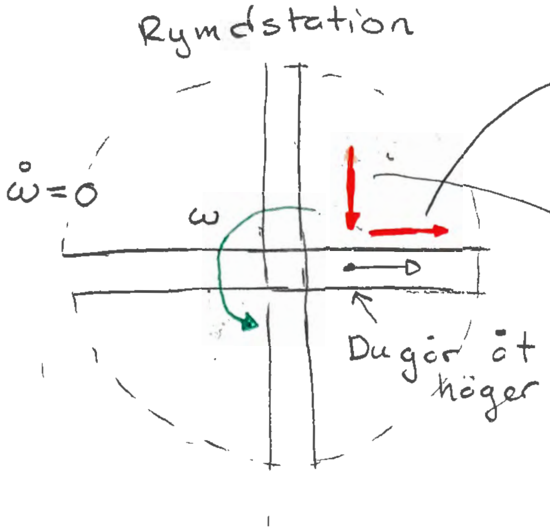
Bidrag 1:

$\dot r\, d\theta$

Bidrag 2:

$dr\,\dot\theta$

$$\Rightarrow dv_\theta = \dot r\, d\theta + dr\,\dot\theta$$



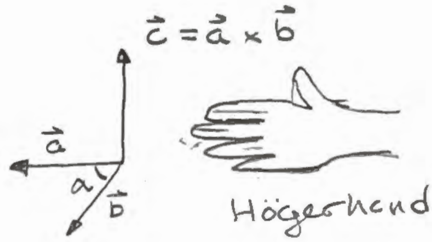
Centrifugal "kraften" kastar oss utåt

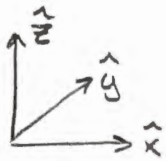
Coriolisaccelerationen är ↑.

Corioliskraften blir ↓

Mekanik 200327

Kryssprodukt





$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$

$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$

$\hat{A} = a\hat{x} + b\hat{y}$

$\hat{z} \times \hat{A} = a\,\hat{z} \times \hat{x} + b\,\hat{z} \times \hat{y} = a\hat{y} - b\hat{x}$

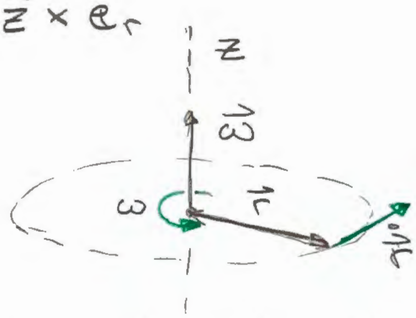
Tidsderivata

$\vec{r} = r\hat{e}_r$ r konstant

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = r\,\frac{d\hat{e}_r}{dt} = r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = r\,\dot{\theta}\,\hat{z} \times e_r$

Def: $\omega = \dot{\theta}$, $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$

$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \omega\hat{z} \times r\hat{e}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}$



Alltså:

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

inget speciellt med vektor $\vec{r}$

Gäller godt. vektor $\vec{A}$.

$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$

Antag att en kropp rör sig i ett roterande koordinatsystem. T. ex. någon vandrar på en snurrande karusell.

Låt $\vec{R}$ vara kroppens läge i rymden.

$\vec{R} = x(t)\hat{x}(t) + y(t)\hat{y}(t)$. koordinataxlarna roterar.

(På karusellen mäter jag $x(t)\hat{x}$, $y(t)\hat{y}$, utanför karusellen mäts $x(t)\hat{x}(t)$, $y(t)\hat{y}(t)$)

$$\vec{R} = x(t)\hat{x}(t) + y(t)\hat{y}(t)$$

Hastigheten av kroppen i rymden:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \underbrace{\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}} + \underbrace{x\frac{d\hat{x}}{dt} + y\frac{d\hat{y}}{dt}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y})}_{\text{Ingen partialderivata på } \hat{x} \text{ \& } \hat{y} \text{ här}} + \underbrace{x(t)\vec{\omega}\times\hat{x} + y(t)\vec{\omega}\times\hat{y}}_{\text{kompensera för det här.}}$$

"Vi delar upp det i ett implicit beroende av tiden i axlarna och ett explicit beroende i koordinaterna."

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y})}_{\text{Hur jag på karusellen mäter } (\hat{x},\hat{y} \text{ konst})} + x(t)\vec{\omega}\times\hat{x} + y(t)\vec{\omega}\times\hat{y}}_{\text{Hur jag faktiskt rör mig relativt marken}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(t) + \vec{\omega}\times(x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

$\vec{R}$ är absolut läge

$\vec{r}$ är läge i det roterande koord. sys.

faktiska hastigheten i rymden

hastigheten relativt karusellen

hastigheten som rotationen bidrar med

$\vec{\omega}$ är en vektor som pekar längs axeln som definierar rotationen.

Argumentet gäller vilken vektor som helst med rotation längs godtycklig axel:

i rymdkoordinat $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{A}$

explicit tidsderivata

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \underset{\uparrow \text{ explicit}}{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} + \underbrace{\omega \times \vec{A}}_{\text{implicit}}$$

$\vec{A}$ är vilken vektor som helst.
Detta gäller alltså även hastighet!

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(t) + \vec{\omega}\times\vec{v} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\omega}\times\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}_{=\dot{\vec{r}}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) :$$

$$= \vec{a}_{rel} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Notera att $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} + \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) - \omega^2\vec{r}}$$

alla r relativa

Förhållande till polära koordinat!

$\vec{r} = r\hat{e}_r$, $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z}$, $\hat{z}\times\hat{e}_r = \hat{e}_\theta$, $\hat{z}\times\hat{e}_\theta = -\hat{e}_r$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\ddot{\vec{r}}}_{=\ddot{r}\hat{e}_r} + \ddot{\theta}r\hat{e}_\theta + 2\dot{\theta}\hat{z}\times\underbrace{\dot{\vec{r}}}_{=\dot{r}\hat{e}_r} + 0 - \omega^2 r\hat{e}_r =$$

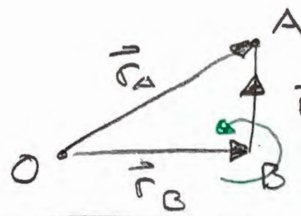
$$= (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\hat{e}_r + (2\dot{\theta}\dot{r} + \ddot{\theta}r)\hat{e}_\theta$$

Som väntat!

OBS: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(r\hat{e}_r) = \dot{r}\hat{e}_r$ ← Betrakta ej som tidsberoende

Relativ absolut rörelse



$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

Antag att rotationen sker runt B.

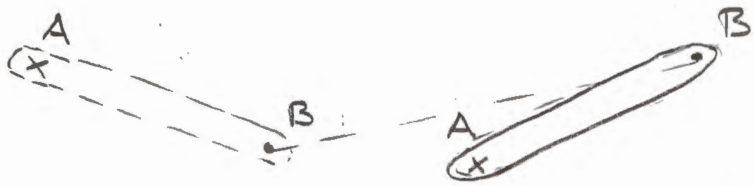
$$\boxed{\dot{\vec{r}}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}_{A/B}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_A - \dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_{A/B}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

Tolkning



Punkt B rör sig och kroppen roterar,

Trots komplex rörelse återges relativa hastighet av två punkter på kroppen av $\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

betrakta både koordinat och axlar som tidsberoende

betrakta koordinataxlar som konstanta

deriverar ej. behöver ej bry sig om tidsberoende

Om $\vec{A}$ är läge: $\vec{A} = A\hat{e}_r$

Alla är overens om $\vec{A}$. Man är dock inte överens om huruvida $\hat{e}_r$ rör sig.

$$\underbrace{\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}\hat{e}_r + A\dot{\theta}\hat{e}_\theta}_{\text{Faktisk hastighet}} \qquad \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \dot{A}\hat{e}_r}_{\text{Upplevs i systemet}}$$

Mekanik 200331

Repetition

$$\vec{G} = RM = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{G}} = \text{totala kraften} =$$

$$= \frac{d}{dt}\vec{G} = \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \overset{N\,II}{=} \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = \dot{\vec{G}} = \sum_i \vec{F}_i$$

kraft vid pkt i

$$\vec{H} = RMM = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \qquad m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \left(\cancel{\underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{v}_i}_{\text{lika}}} + \vec{r}_i \times \dot{\vec{v}}_i \right) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

(olika angreppspkter i olika termer)

$$\Rightarrow \vec{M}_{tot} = \dot{\vec{H}} = \sum_i \vec{M}_i$$

Sammanfattning

Linjär rörelse	Rotation
• Tröghet (m)	• Tröghetsmoment
• Rörelsemängd	• Rörelsemängdsmoment
• Kraft	• Kraftmoment / moment / vridmoment
$\vec{F} = \dot{\vec{G}}$	$\vec{M} = \dot{\vec{H}}$

Red ut förhållande till masscentrum $\vec{R}_{CM}$

$$\underline{\vec{G}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} m_{tot}\cdot \underbrace{\frac{1}{m_{tot}}\sum_i m_i \vec{r}_i}_{\vec{R}_{MC}}$$

$$= m_{tot}\frac{d}{dt}\vec{R}_{CM} = \underline{m_{tot}\vec{v}_{CM}}$$

$$\underline{\vec{F}_{Tot}} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec{r}_i = \dots = \underline{m_{tot}\ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

Alltså: Vi kan för linjär rörelse ersätta en stel kropp med en punktmassa i masscentrum.

En kropp som inte påverkas av yttre krafter har två bevarade storheter.

$\vec{G}, \vec{H}$ = konstant

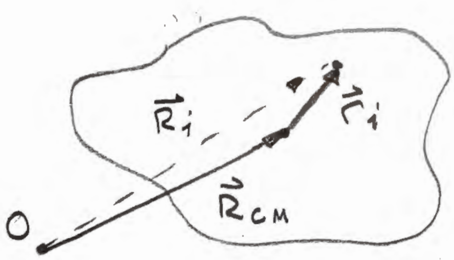
Om vi har yttre krafter:

$$\dot{\vec{G}} = \vec{F}_{TOT} \qquad \dot{\vec{H}} = \vec{M}_{TOT} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i$$

Förhållandet mellan $\vec{R}_{CM}$ o $\vec{H}$:

Slutsats: $RMM_{Tot} = RMM_{MC} + RMM_{runt\ MG}$

Härledning:



$$\vec{R}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i$$

$$H_0 = \sum_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i)\times(\underbrace{\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i}_{\dot{\vec{R}}_i})\, m_i$$

$$= \{\text{utveckla}\} =$$

$$= \sum_i m_i(\vec{R}_{cm}\times\vec{v}_{CM}) + \sum_i m_i(\vec{R}_{cm}\times\vec{v}_i) +$$

$$+ \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_{CM}) + \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)\, m_i =$$

$$= (\vec{R}_{CM}\times\vec{v}_{CM})\sum_i m_i + \cancel{\vec{R}_{CM}\times\overbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}^{0}} +$$

← masscentrums läge relativt masscentrum

$$+ \cancel{\underbrace{\left(\sum_i \vec{r}_i m_i\right)}_{0}\times\vec{v}_{CM}} + \sum_i m_i(\vec{r}_i\times\vec{v}_i) = \dots$$

$$\vec{H}_o \overset{\text{förra sida}}{=} \ldots =$$

$$= \underbrace{m_{TOT}\, \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}}_{\text{RMM för masscentrum kring O}} + \sum_i \underbrace{m_i\, \vec{r}_i \times \vec{v}_i}_{\text{RMM för partiklar kring CM}}$$

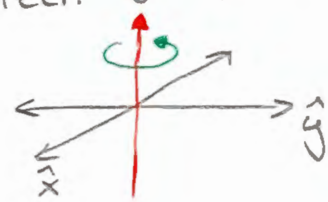
$$\boxed{\vec{H}_o = \vec{R}_{CM} \times \vec{G} + \vec{H}_G}$$

OBS! Unikt för masscentrum!

Tröghetsmoment & Rörelsemängdsmoment (2D)

Vi börjar med: rörelse i xy-plan & rot. kring $\hat{z}$

Antag att kroppen roterar kring en fix axel genom origo i $\hat{z}$-led.



$$\vec{H}_o = \sum_i m_i\, \vec{r}_i \times \vec{v}_i =$$

$$= \sum_i m_i\, \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \cdot r_i^2 - \vec{r}_i \overbrace{(\cancel{\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i})}^{0} \right) =$$

ortagonala

$$= \sum_i \vec{\omega}\, m_i r_i^2 =$$

$$= \vec{\omega} \sum_i m_i r_i^2 := \vec{\omega}\, I_o$$

Tröghetsmoment (skalär i detta specialfall)

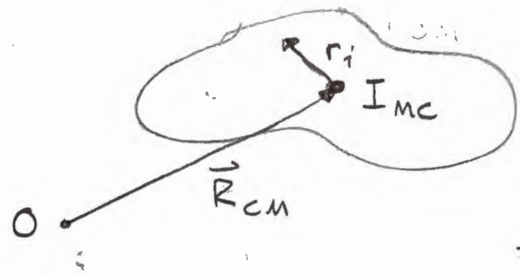
$$\boxed{I_o = \sum_i m_i r_i^2 = \iint_{\text{kropp}} \rho\, (x^2 + y^2)\, dx\, dy}$$

$$\boxed{\vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o = \dot{\vec{\omega}}\, I_o}$$

Jämför med:

$\vec{F} = \dot{\vec{G}} = \dot{\vec{v}}\, m$ (I_o analog med m)

Tröghetsmoment m.a.p. (godt.) O



$$I_o = \sum_i m_i R_i^2 =$$

$$= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i)^2 =$$

$$= \sum_i m_i (R_{CM}^2 + 2\vec{R}_{CM} \cdot \vec{r}_i + r_i^2)$$

$$= \sum_i m_i R_{CM}^2 + \sum_i m_i r_i^2 + 2\vec{R}_{CM} \underbrace{\cancel{\sum_i m_i r_i}}_{} {}^{0} =$$

$$= m_{TOT} R_{CM}^2 + I_{CM} \quad \text{där } I_{CM} = \sum_i m_i r_i^2$$

och $\vec{r}_i$ är koord. rel. CM

$$\boxed{I_o = m_{TOT} R_{CM}^2 + I_{CM}}$$

Parallell förflyttningsteoremet / Steiners sats /

Parallel axis theorem

OBS: O godt. med CM måste vara masscentrum

Hur förflyttning av O påverkar momentberäkning:

$$\vec{M}_o = \frac{d}{dt}\vec{H}_o = \frac{d}{dt}(m_{TOT} \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{H}_{CM}) =$$

$$= m_{TOT} \cancel{\dot{\vec{R}}_{CM} \times \vec{V}_{CM}}^{\,0} + m_{TOT} \vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}}_{CM} + \dot{\vec{H}}_{CM}$$

$$= m_{TOT} \vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{V}}_{CM} + I_{CM} \dot{\vec{\omega}} =$$

$$= \vec{R}_{CM} \times \vec{F}_{TOT} + I_{CM} \dot{\vec{\omega}}$$

Totalt tillfört moment m.a.p. O

$$\boxed{\vec{M}_o = \vec{R}_{CM} \times \vec{F}_{TOT} + I_{CM} \dot{\vec{\omega}}}$$

Acceleration av rotation kring masscentrum

Tyngdpunktens $\vec{H}$ förändras

Mekanik 200401

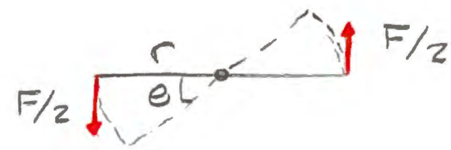
Arbete och Effekt

Arbete: $U := \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Effekt: Från ex:

$$\frac{dU}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}$$

Ex:



$$U = \frac{F}{2} r\theta + \frac{F}{2} r\theta = Fr\theta$$

$$dU = |F||r|d\theta =$$

$$= |r \times F| d\theta =$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \vec{\omega} \cdot \vec{M} = \text{effekt}$$

Kinetisk energi:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \Big(m_i v_{cm}^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 m_i$$

$$+ \cancel{2 v_{cm} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) m_i}^{\,0} \Big) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_{Tot} v_{cm}^2 + \sum_i m_i (\vec{\omega} \times r_i)^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m_{TOT} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times r_i)^2}$$

Med $\vec{r}_i = x\hat{x} + y\hat{y}$ $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ blir

$$T = \frac{1}{2} m_{Tot} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m r_i^2 =$$

I 2D:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m_{TOT} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2}$$

OBS! Fungerar endast för masscentrum!

Sönderläggning av KE till bidrag av masscentrums rörelse och rotation kring denna.

Linjär rörelse	Rotation
∘ Hastighet $\vec{v}$	∘ Vinkelhastighet $\vec{\omega}$
∘ Tröghet m	∘ Tröghetsmoment I_{CM}
∘ Rörelsemängd: $\vec{G} = m\vec{v}$	∘ Rörelsemängdsmoment $\vec{H} = I_{CM}\vec{\omega}$
∘ Kraft $\vec{F}$; $\dot{\vec{G}} = \vec{F}$	∘ Moment $\vec{M}$; $\mathring{\vec{H}} = \vec{M}$

Kinetisk energi:

$$\frac{1}{2}mv^2 \quad + \quad \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Effekt:

$$\vec{F}\cdot\vec{v} \quad + \quad \vec{M}\cdot\vec{\omega}$$

Arbete dU

$$\vec{F}\cdot d\vec{x} \quad + \quad \vec{M}\cdot d\vec{\theta}$$

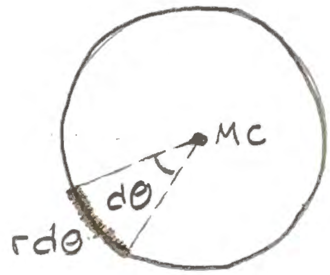
Vid kollision

ΣF för <u>båda kroppar</u> kring kontaktpkt blir 0

$\Rightarrow$ $\vec{G}$ och $\vec{H}$ bevaras.

Tröghetsmoment / Några exempel

Enklaste exemplet: En ring

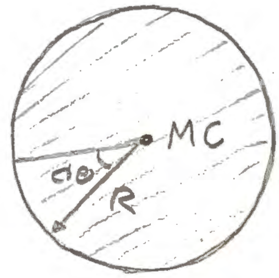


$$\underline{\underline{I_{MC}}} = \int \rho (r\,d\theta) r^2 =$$

$$= \rho r^3 \int d\theta = 2\pi r \rho r^2 =$$

$$= \underline{\underline{mr^2}}$$

En cirkelskiva



$dA = r\,dr\,d\theta$

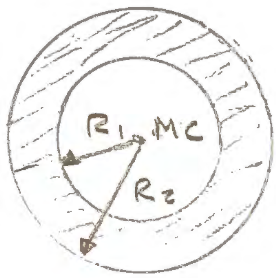
$$\underline{\underline{I_{MC}}} = \int_0^R \rho r^2 dA =$$

$$= \frac{m \int_0^R \cancel{\rho} r^2 dA}{\int_0^R \cancel{\rho} dA} = \frac{m \int_0^R dr \cancel{\int_0^{2\pi} d\theta} r^2 r}{\int_0^R dr \cancel{\int_0^{2\pi} d\theta} r} =$$

$$= m \frac{\int_0^R r^3 dr}{\int_0^R r\,dr} = m \frac{\frac{1}{4} R^4}{\frac{1}{2} R^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} mR^2}}$$

Lägg märke till knepet för att slippa beräkna m.

Ihålig Cirkelskiva

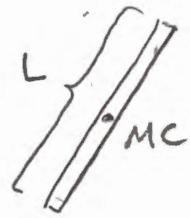


$$\underline{\underline{I_{MC}}} = M \frac{\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr}{\int_{R_1}^{R_2} r\,dr} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4)}{\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2)} M = \underline{\underline{\frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)}}$$

Pinne, runt MC

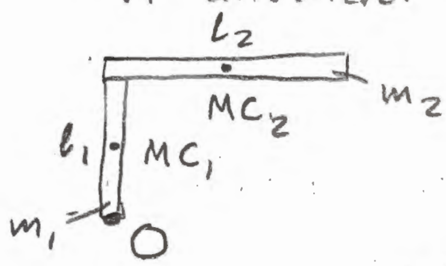
$$\underline{\underline{I_{MC}}} = \frac{M\int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} \cancel{\rho}\, x^2\, dx}{\int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} \cancel{\rho}\, dx} = $$



$$= \frac{\frac{1}{3} M \left(\frac{L}{2}\right)^3 \cdot 2}{L} = \underline{\underline{\frac{1}{12} M L^2}}$$

Tröghetsmoment av en sammansatt kropp

Vi använder Steiners sats.



$$I_0^{(1)} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 l_1^2}_{I_{MC_1}} + \underbrace{m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2}_{m R_{MC}^2}$$

$$I_0^{(2)} = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 + m_2 \left(l_1^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I_0}} = I_0^{(1)} + I_0^{(2)} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2$$

Tröghetsmoment för kropp i 3D som roterar kring z-axeln

Minns: $\vec{H} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) =$

$$= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) =$$

$$= \sum_i m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) =$$

$= \{$Antag rotation kring z-axeln$\} =$

$$= \sum_i \big(m_i \vec{\omega}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - m_i((x_i, y_i, z_i)\,\omega\hat{z} \cdot (x_i, y_i, z_i))\big)$$

$$= \sum_i \big(m_i \omega\hat{z}(x_i^2 + y_i^2 + \cancel{z_i^2}) - m_i(x_i, y_i, \cancel{z_i})\,\omega z_i\big)$$

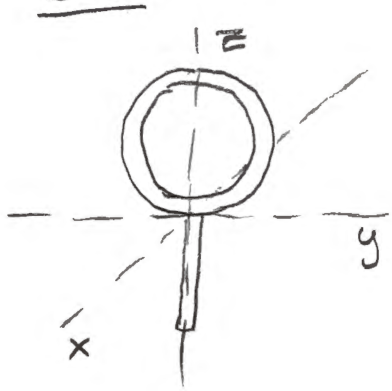
$$= \sum_i \omega\hat{z}(x_i^2 + y_i^2) - \sum_i \omega m_i (x_i z_i \hat{x} + y_i z_i \hat{y})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_z = \omega \int dm\,(x^2 + y^2) \\ H_x = -\omega \int dm\; xz \\ H_y = -\omega \int dm\; yz \end{cases}$$

OBS: H_x & H_y ej nödvändigtvis 0 även om rotationen är i z-led.

Av symmetriskäl blir ofta H_x & H_y 0.

Ex:



Symmetri: $y \to -y$

$x \to -x$

$$\Rightarrow \int x\, dm = \int y\, dm = 0$$

$$\Rightarrow H_x = H_y = 0$$

Om vi har spegelsymmetrier i x-planet och y-planet, samt rotation i z-led gäller:

$$\boxed{I_{MC} = \int (x^2+y^2)\,dm}$$

$$\left(\vec{H} = H_z \hat{z} = \omega \hat{z} \int (x^2+y^2)\,dm = \vec{\omega} I_{MC} \right)$$

Generellt (Tror detta stämmer)

Tröghetsmoment är det man ska multiplicera $\vec{\omega}$ med för att få $\vec{H}_{MC}$.

Det är generellt en matris ty $\vec{H}$ är ej generellt parallell med $\vec{\omega}$.

För vissa specialfall är det $I_{MC} \cdot I$

skalär Identitets-matris

Mekanik 200403

$H_z = I_0 \omega$

$H_x = -\omega \int xz\,dm$

$H_y = -\omega \int yz\,dm$

$$\boxed{I_0 = \int (x^2+y^2)\,dm}$$

$$I_{sfär} = M \frac{\int (x^2+y^2)\,dA}{\int dA} =$$

$\int x^2 dA = \int y^2 dA =$
$= \int z^2 dA$

$$= M \frac{\frac{2}{3}\int (x^2+y^2+z^2)\,dA}{\int dA} =$$

$$= \frac{2}{3} M R^2$$

$$I_{KLOT} = M \frac{\int (x^2+y^2)\,d^3r}{\int d^3r} =$$

$$= \frac{2}{3} M \frac{\int_0^R r^2\, \cancel{4\pi} r^2\,dr}{\int_0^R \cancel{4\pi} r^2\,dr} =$$

$$= \frac{2}{3} M \frac{\int_0^R r^4\,dr}{\int_0^R r^2\,dr} = \frac{2}{3} M \frac{1/5\, R^5}{1/3\, R^3} = \frac{2}{5} M R^2$$

$I_{ring} = mr^2$

$I_{disk} = \frac{1}{2} mr^2$

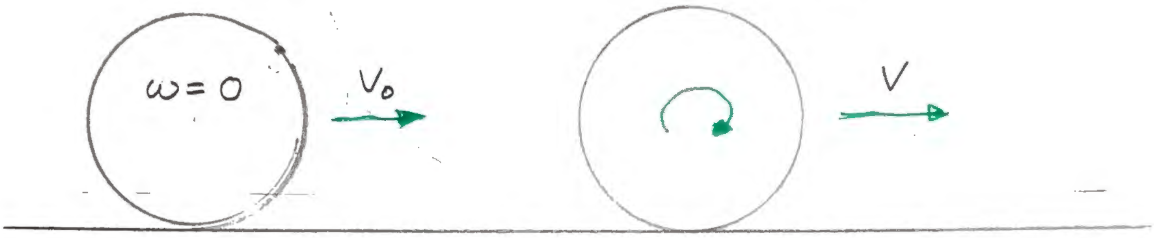
$I_{stav} = \frac{1}{12} m\ell^2$

$I_{klot} = \frac{2}{5} mr^2$

$I_{sfär} = \frac{2}{3} mr^2$

Exempel från 2D dynamik

Bowlingklot rullar mot käglor



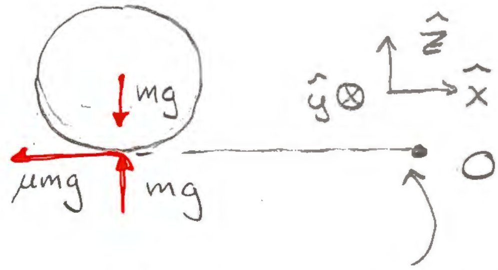
Antag att klotet börjar utan att rulla.
Efter en tid rullar det utan att glida.
Vad blir v i termer av v_0?

Vad är bevarat?

- RM? Nej, ty yttre friktionskraft
- Energi? Nej, ty vi har friktion som utövar arbete.
- RMM?

Frilägg i mellanläge:

OBS: Måste räkna ut RMM kring en fix punkt.



Om vi väljer O smart är RMM bevarat!

Låt O vara pkten på banan klotet ligger på i start.

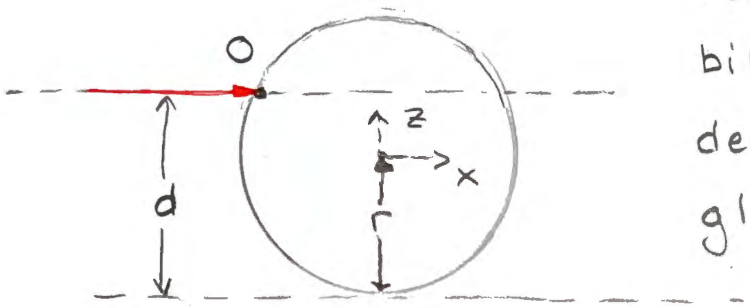
$$H_o = \text{konstant} = H_o^{start} = m\vec{r}_{start} \times \vec{v}_{start} = $$
$$= mrv_0\hat{y}$$

utan att glida $\Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$

$$H_o = H_o^{slut} = mrv\hat{y} + \underbrace{\frac{2}{5}mr^2}_{I_{klot}}\omega\hat{y} =$$
$$= \left(1 + \frac{2}{5}\right)mrv\hat{y} = \frac{7}{5}mrv\hat{y}$$

$$\Rightarrow \cancel{mr}v_0 = \frac{7}{5}\cancel{mr}v \Rightarrow v = \frac{5}{7}v_0 \quad //$$

Exempel



Var ska man stöta biljardkulan så att den rullar utan att glida?

Plan: Under stötintervallet bevaras RMM kring pkter på kraftens verkningslinje (alla andra krafter kan försummas).

$H_O^{\text{före}} = 0$

RMM kring CM

RMM av CM runt O

rullar utan att glida

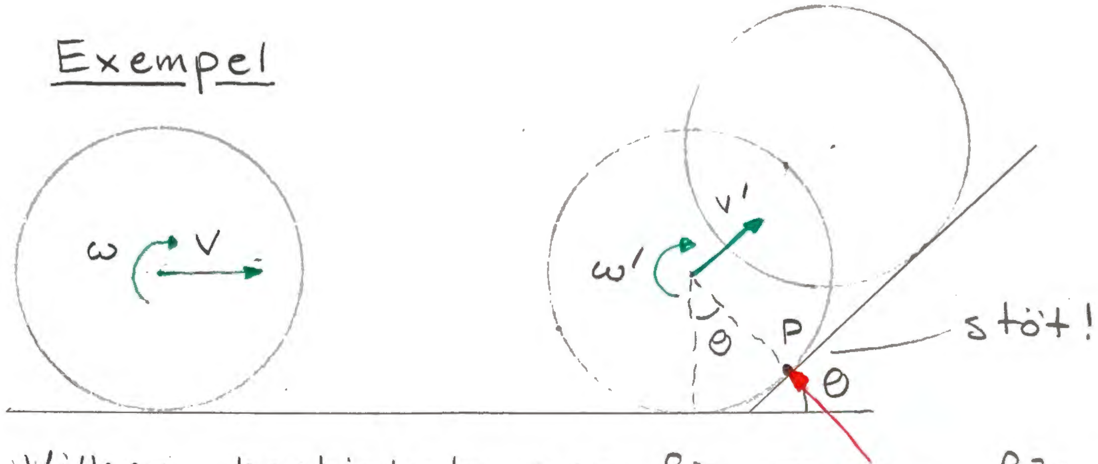
$$H_O^{\text{efter}} = \vec{H}_G + \vec{H}_O = I_{CM}\,\omega\hat{y} - (d-r)mv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{5}\cancel{m}r^{\cancel{2}}\cancel{\omega} = (d-r)\cancel{m}\cancel{v} \qquad \boxed{v=\omega r}$$

$$\frac{2}{5}r = (d-r)$$

$$d = \frac{7}{5}r$$

<u>Exempel</u>



Vilken hastighet upp för rampen får bollen?
OBS: energi bevaras ej p.g.a. friktion och stöt.
Under stötförloppet bevaras RMM m.a.p. kontaktpkt

$$H_P = I_{cm}\omega + mrv\cos\theta$$
$$= I_{cm}\omega' + mrv'$$

$$I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\cancel{m}r^{\cancel{2}}\omega + \cancel{m}v\cancel{r}\cos\theta = \frac{2}{5}\cancel{m}r^{\cancel{2}}\omega' + \cancel{m}v'\cancel{r}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}v + v\cos\theta = \frac{2}{5}v' + v'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{2/5 + \cos\theta}{7/5}v = \frac{2 + 5\cos\theta}{7}v \quad //$$

Mekanik 200415

Repetition - Matrismultiplikation

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

Kan skrivas komponentvis

$$y_i = \sum_j A_{ij} x_j$$

Matrismultiplikation

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & \cdots \\ a_{21} b_{11} & a_{22} b_{21} \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ab)_{11} & (ab)_{12} \\ (ab)_{21} & (ab)_{22} \end{bmatrix}$$

Ny notation:

$$(ab)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

Kan skrivas enklare med Einsteins summerings-konvention:

$$(ab)_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

Om ett index förekommer två ggr ska det summeras över. (slipper skriva $\sum$).

Viktiga exempel m. ny notation

Identitetsmatrisen I

$$\vec{y} = I\vec{y} \iff y_i = I_{ij} y_j = \delta_{ij} y_j$$

där $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ (Kroneckerdelta)

Skalärprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_i$$

Kryssprodukt

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j y_k = \epsilon_{ijk} x_j y_k$$

där ϵ_{ijk} är:

3D-matris typ

Levi-Civita tensorn

$$1 = \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312}$$

$$-1 = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132}$$

Annars $\epsilon_{ijk} = 0$

Med andra ord:

- Lika index $\Rightarrow 0$ ex ϵ_{112}
- jämn permutation $\Rightarrow 1$ ex. ϵ_{123}
- udda permutation $= -1$ ex. ϵ_{321}

Cyklade index ändrar ej värdet!

Identiteter

- $AB = I \iff A_{ij} B_{jk} = \delta_{ik}$
- $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_i = x_i \delta_{ij} y_j$

Om vi har δ_{ij} i summering kan vi sätta $i = j$

- $\epsilon_{\boxed{i}jk} \epsilon_{\boxed{i}mn} = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km})$

sida-sida yttre-inre

Första index måste vara lika

Trippel kryssprodukt

$$(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))_i =$$ utveckla kryssprodukt

$$= \epsilon_{ijk}\, a_j\, (\vec{b}\times\vec{c})_k =$$

obs: allt annat än i är summeringsindex!

$$= \epsilon_{ijk}\, a_j\, \epsilon_{kln}\, b_l\, c_n =$$

$$= a_j b_l c_n\, \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{kln} =$$ cykla index

$$= a_j b_l c_n\, \epsilon_{kij}\, \epsilon_{kln} =$$ identitet

$$= a_j b_l c_n\, (\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl}) =$$ multiplicera in

$$= a_j b_l c_n \delta_{il}\delta_{jn} - a_j b_l c_n \delta_{in}\delta_{jl} =$$ Använd δ för att eliminera index!

$$= a_n b_i c_n - a_l b_l c_i =$$ $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_i y_i$

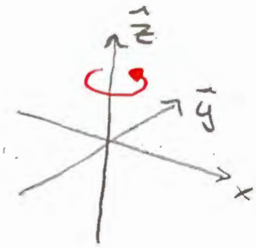
$$= b_i\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_i\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Så, med alla komponenter:

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})}$$

Rotationsmatriser

Runt z-axeln m. vinkel θ:



$$R_{\hat z}(\theta)\,\hat x = \cos\theta\,\hat x + \sin\theta\,\hat y$$

matris

$$R_{\hat z}(\theta)\,\hat y = -\sin\theta\,\hat x + \cos\theta\,\hat y$$

$$R_{\hat z}(\theta)\,\hat z = \hat z$$

$$R_{\hat z}(\theta)(x\hat x + y\hat y + z\hat z) = R_{\hat z}(\theta)\,\vec r =$$

$\vec r$

$$= \cos\theta\,(x\hat x + y\hat y + \underline{z\hat z}) +$$

$$+ \sin\theta\,(x\hat y - y\hat x) +$$

$$+ (z - \underline{z\cos\theta})\,\hat z =$$

Cancellerar, lades till

$$= \cos\theta\,\vec r + \sin\theta\,(\hat z \times \vec r) + (1-\cos\theta)(\hat z\cdot\vec r)\,\hat z$$

$\vec r$ valdes fritt, så resultatet kan generaliseras till rotation kring godt. axel längs $\hat\Omega$:

$$R_{\hat\Omega}(\theta) = \cos\theta\,\vec r + \sin\theta(\hat\Omega \times \vec r) + (1-\cos\theta)(\hat\Omega\cdot\vec r)\,\hat\Omega$$

Komponentvis:

permutera ⇒ byt tecken

$$[R_{\hat\Omega}(\theta)]_{ij}\,\underline{r_j}$$

$$= \cos\theta\,\delta_{ij}\,\underline{r_j} + (1-\cos\theta)\,\hat\Omega_i\hat\Omega_j\,\underline{r_j} + \sin\theta\,\epsilon_{ikj}\,\hat\Omega_k\,\underline{r_j} =$$

Vi får rotationsmatrisen:

$$\boxed{\begin{gathered}[R_{\hat\Omega}(\theta)]_{ij} = \\ = \cos\theta\,\delta_{ij} + (1-\cos\theta)\,\hat\Omega_i\,\hat R_j - \sin\theta\,\epsilon_{ijk}\,\hat\Omega_k\end{gathered}}$$

Användning av rotationsmatrisen

$$[R_{\hat{\Omega}}(\theta)]_{ij} = \cos\theta\,\delta_{ij} + (1-\cos\theta)\hat{\Omega}_i\hat{\Omega}_j - \sin\theta\,\epsilon_{ijk}\hat{\Omega}_k$$

Antag att R är given. Vad är θ o $\hat{\Omega}$?

Spåret för matrisen: (Σ diagonalelement)

$$\underline{\underline{\mathrm{Tr}\,R}} = \sum_i R_{ii} =$$

$$= \cos\theta \sum_i \delta_{ii} + (1-\cos\theta)\hat{\Omega}_i\hat{\Omega}_i - \sin\theta\,\underbrace{\cancel{\epsilon_{iik}}}_{}{}^{0}\,\hat{\Omega}_k =$$

$$= 3\cos\theta + (1-\cos\theta) = \underline{\underline{1+2\cos\theta}}$$

Detta samband ger θ givet R.

OBS: $R_{12} - R_{21} =$

$$= -\sin\theta\,\hat{\Omega}_3\,\epsilon_{123} + \sin\theta\,\hat{\Omega}_3\,\epsilon_{213} =$$

$$= -2\sin\theta\,\hat{\Omega}_3$$

Vi kan få fram $\hat{\Omega}$ genom:

$$\begin{cases} R_{32} - R_{23} = 2\sin\theta\,\hat{\Omega}_1 \\ R_{13} - R_{31} = 2\sin\theta\,\hat{\Omega}_2 \\ R_{21} - R_{12} = 2\sin\theta\,\hat{\Omega}_3 \end{cases}$$

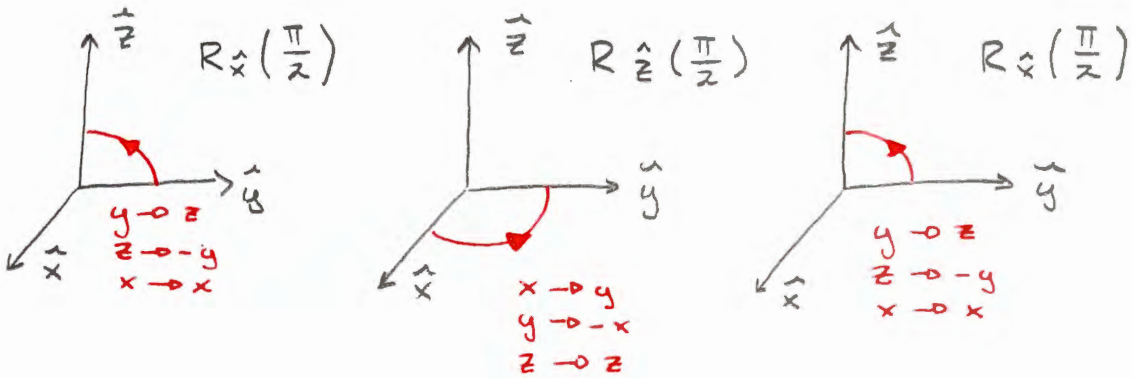
Alltså: Givet R

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\,R = 1+2\cos\theta \\ &\hat{\Omega} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Mekanik 200417

Exempel på rotationer & Tillämpa resultat

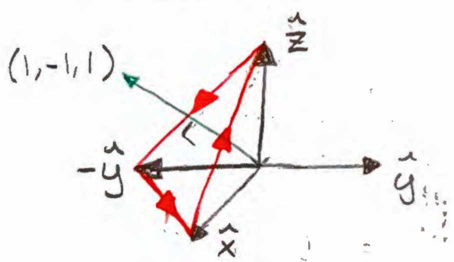
$$[R_{\hat{\omega}}(\theta)]_{ij} = \cos\theta\,\delta_{ij} + (1-\cos\theta)\hat{\omega}_i\hat{\omega}_j - \sin\theta\,\hat{\omega}_k\,\epsilon_{ijk}$$



$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

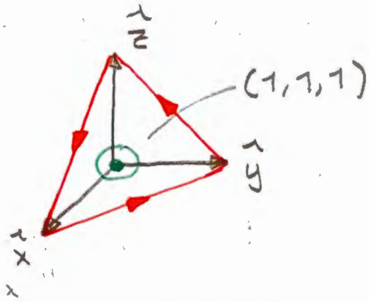
$$R_{\hat{x}} R_{\hat{z}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_{\hat{z}} R_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_x R_z$:



$R_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$R_z R_x$:

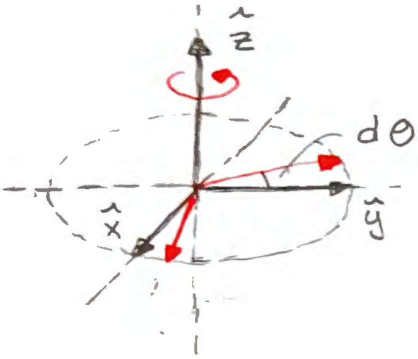


$R_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Kombination av två vinkelräta rotationer blir en annan 120°-rotation!

Rotationsmatriser ej kommutativa!

Infinitesimala rotationer



$$\hat{x} \longmapsto \hat{x} + d\theta\,\hat{y} = \hat{x} + d\theta\,\hat{z}\times\hat{x}$$
$$\hat{y} \longmapsto \hat{y} - d\theta\,\hat{x} = \hat{y} + d\theta\,\hat{z}\times\hat{y}$$
$$\hat{z} \longmapsto \hat{z}$$

Ej koordinatberoende!

$$R_{\hat{z}}(d\theta)\vec{r} = \vec{r} + d\theta\,\hat{z}\times\vec{r}$$

$\vec{r}$ godt. så vi kan välja rotationsaxeln fritt:

$$R_{\hat{\Omega}}(d\theta)\vec{r} = \vec{r} + d\theta\,\hat{\Omega}\times\vec{r}$$

Två infinitesimala rotationer:

$$R_{\hat{\Omega}_2}(d\theta_2)\,R_{\hat{\Omega}_1}(d\theta_1)\vec{r} =$$

$$= R_{\hat{\Omega}_2}(d\theta_2)(\vec{r} + d\theta_1\,\hat{\Omega}_1\times\vec{r}) =$$

Andra ordning $d\theta$

$$= (\vec{r} + d\theta_1\,\hat{\Omega}_1\times\vec{r}) + d\theta_2\,\hat{\Omega}_2\times\vec{r} + \cancel{d\theta_2\,\hat{\Omega}_2\,(d\theta_1\times\vec{r})} =$$

$$= \vec{r} + (d\theta_1\,\hat{\Omega}_1 + d\theta_2\,\hat{\Omega}_2)\times\vec{r}$$

Så vi får tidsderivatan! $\vec{r}$ efter rot. $-\ \vec{r}$ före

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\cancel{\vec{r}} + (d\theta_1\,\hat{\Omega}_1 + d\theta_2\,\hat{\Omega}_2)\times\vec{r} - \cancel{\vec{r}}}{dt} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\times\vec{r}$$

där $\vec{\omega}_1 = \dfrac{d\theta_1}{dt}\hat{\Omega}_1$ och $\vec{\omega}_2 = \dfrac{d\theta_2}{dt}\hat{\Omega}_2$

Vinkelhastighet av en kombinerad rotation blir summan av vinkelhastigheterna.

<u>Vinkelhastighet utgör ett linjärt rum</u>

$$\vec{\omega}_{TOT} = \sum_i \vec{\omega}_i$$

Vinklar gör <u>ej</u>.

Tröghetsmoment som matris

Den korrekta härledningen av trög.mom.

$$\vec{H} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha =$$

Vill skriva
$\vec{H} = I\vec{\omega}$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) =$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha (\vec{\omega} r_\alpha^2 - \vec{r}_\alpha (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha))$$

Den i:te komponenten av $\vec{H}$:

$$H_i = \sum_\alpha m_\alpha (\omega_i r_\alpha^2 - (\vec{r}_\alpha)_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha)) =$$

$$= \sum_{\alpha j} m_\alpha (\omega_j \delta_{ij} r_\alpha^2 - (\vec{r}_\alpha)_i (\vec{r}_\alpha)_j \omega_j) =$$

$$= \sum_{\alpha j} m_\alpha (\delta_{ij} r_\alpha^2 - (\vec{r}_\alpha)_i (\vec{r}_\alpha)_j) \omega_j =$$

$$= \sum_j \bar{I}_{ij} \omega_j$$

där $\bar{I}_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} r_\alpha^2 - (\vec{r}_\alpha)_i (\vec{r}_\alpha)_j)$

På matrisform: $\vec{H} = \bar{I}\vec{\omega}$

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{xx} & \bar{I}_{xy} & \bar{I}_{xz} \\ \bar{I}_{yx} & \bar{I}_{yy} & \bar{I}_{yz} \\ \bar{I}_{zx} & \bar{I}_{zy} & \bar{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

OBS: Meriam-Kraige har annan definition, därav bar på I (för att skilja de två versionerna åt).

Skillnad på tecken för element som inte ligger på diagonalen.

Steiners sats mer allmänt

$$(\bar{I}_0)_{ij} = \sum_\alpha \left(\delta_{ij} R_\alpha^2 - (\vec{R}_\alpha)_i (\vec{R}_\alpha)_j\right) m_\alpha$$

Antag $\vec{R}_\alpha = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_\alpha$

$$(\bar{I}_0)_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_\alpha)\cdot(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_\alpha)\delta_{ij} - \right.$$
$$\left. - \left((\vec{R}_{CM} + \vec{r}_\alpha)_i (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_\alpha)_j\right)\right] =$$

korstermer försvinner

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left[(\vec{R}_{CM}\cdot\vec{R}_{CM})\delta_{ij} - (\vec{R}_{CM})_i (\vec{R}_{CM})_j \right] +$$

$$+ \sum_\alpha m_\alpha \left[(\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha)\delta_{ij} - (\vec{r}_\alpha)_i (\vec{r}_\alpha)_j \right] =$$

$$= m_{TOT}\left(R_{CM}^2 \delta_{ij} - (R_{CM})_i (R_{CM})_j \right) + I_G$$

där I_B är tröghetsmoment runt masscentrum.
Vi har alltså Steiners sats för 3D-kropp:

$$\bar{I}_0 = \begin{pmatrix} \text{tröghet för} \\ \text{masscentrum} \\ \text{kring } 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{tröghet för} \\ \text{kropp kring} \\ \text{masscentrum} \end{pmatrix}$$

Intressanta saker:

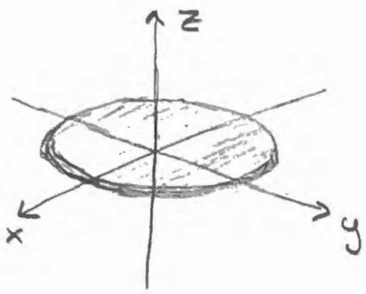
$$\bar{I}_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\underbrace{r_\alpha^2 \delta_{ij}}_{1} + \underbrace{(\vec{r}_\alpha)_i (\vec{r}_\alpha)_j}_{2} \right]$$

1 Förekommer bara på diagonalen.

$$\Rightarrow \bar{I}_{xy} = \int xy \, dm$$

2 Blir lätt 0 efter integrering på grund av symmetrier!

Exempel: Tröghet för en disk i xy-planet



radie: r

$$\bar{I}_{zz} = \sum_\alpha m_\alpha [\delta_{zz}(x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + \cancel{z_\alpha^2}) - \cancel{z_\alpha^2}]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) =$$ har gjort tidigare

$$= \int dm\,(x^2+y^2) = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} m r^2$$ Motsvarar tröghet runt z-axeln

Rotera istället runt x-axeln:

$$\vec{H} = \bar{I}(\omega \hat{x}) \Rightarrow$$

$$H_x = \bar{I}_{xx}\,\omega \qquad H_y = \bar{I}_{yx}\,\omega \qquad H_z = \bar{I}_{zx}\,\omega$$

$$I_{xx} = \sum_\alpha m_\alpha (r_\alpha^2 - x_\alpha^2) = \sum_\alpha m_\alpha (\cancel{x_\alpha^2} + y_\alpha^2 - \cancel{x_\alpha^2}) =$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha y^2 = \int dm\, y^2 = \ldots = \frac{1}{4} m r^2$$

Av symmetriskäl $I_{xx} = I_{yy}$ & resterande 0.

$$\bar{I}_{disk} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mr^2 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} m r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

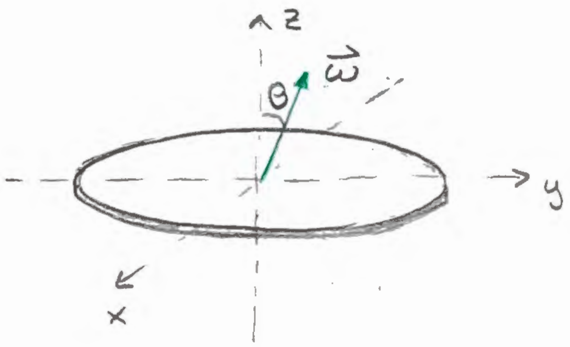
Notera att om $z \equiv 0$ (plan kropp) så

$$\bar{I}_{zz} = \bar{I}_{xx} + \bar{I}_{yy}$$

integral över x   integral över y

Mekanik 200421

Exempel (Fortsättning från 200417)



Vi vet att

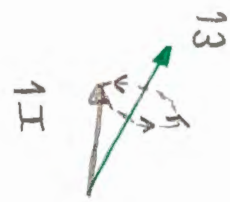
$$I = \frac{1}{4} m r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sned rotationsaxel:

$$\vec{\omega} = \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{H} = I\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{4} m r^2 \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} m r^2 \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 2\cos\theta \end{bmatrix}$$



$\vec{H}$ är inte parallell med $\vec{\omega}$!

$\vec{H}$ roterar kring $\vec{\omega}$.

$\vec{H}$ är "ur balans"

Eftersom $\vec{H}$ ej är konstant finns $\vec{M} = \dot{\vec{H}}$.

Kinetisk energi:

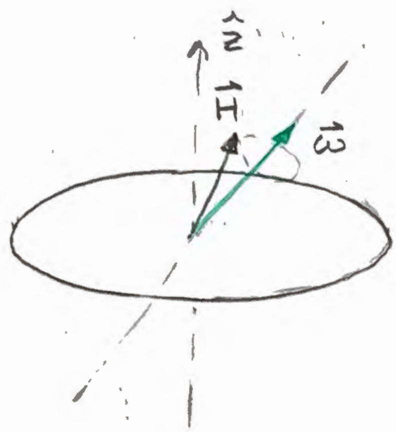
Sidospår p.g.a. klippt föreläsning

$$KE = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (I\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} = \ldots$$

Eftersom I är symmetrisk!

$$\ldots = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4\, m r^2 \sin\theta \\ 1/4\, m r^2 \cos\theta \end{bmatrix} \omega^2$$

$$\Rightarrow \quad KE = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{1}{4} m r^2 (\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)$$



$\vec{H}$ snurrar kring $\vec{\omega}$ eftersom disken snurrar kring $\vec{\omega}$. ($\vec{H}$ i figur hör till läge i figur)

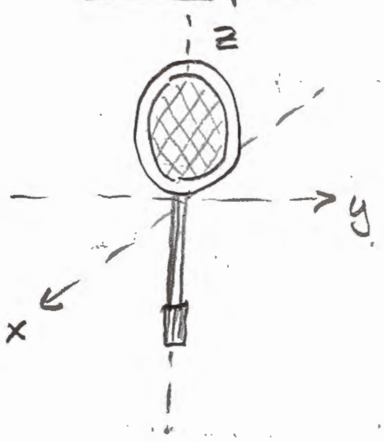
$\vec{H}$ ej konstant $\Rightarrow \vec{M} = 0$

Om $\vec{H}$ ej är parallell med $\vec{\omega}$ "skakar" konstruktionen. I tillämpningarna dåligt.

<u>Hur får vi $\vec{H} \parallel \vec{\omega}$?</u>

Om $I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$ och $\vec{\omega}$ ligger längs x, y eller z är $\vec{H} = \text{konst} \Rightarrow \vec{M} = 0$

<u>Exempel</u>

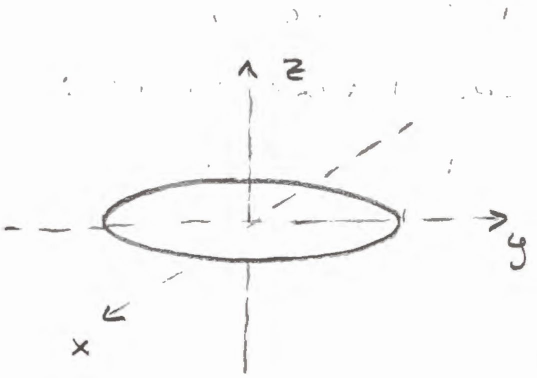


Tennisracket ligger i yz-plan skaft // z-axel

Kan snurra "stabilt" runt sina 3 huvudaxlar, som här sammanfaller med x, y & z.-axlarna.

Av symmetriskäl I diagonal.

En disk har ytterligare en symmetri.



$$I = \frac{1}{4} m r_z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notera $I_{xx} = I_{yy}$

$$\Rightarrow I \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} m r_z \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Projektionen av I till xy-planet är identitetsmatr.

"Alla axlar i xy-planet är huvudaxlar"

Alla kroppar har tre huvudaxlar, men för en disk har vi frihet vid valet av två av dem.

Finns det någon kropp med $\vec{H}$ alltid // med $\vec{\omega}$?

Ja, En kropp där $I \propto$ identitetsmatrisen.

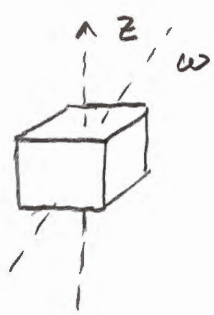
<u>Exempel</u>

$$I_{klot} = \frac{2}{5} m r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(uppenbart av symmetri)}$$

<u>KUB:</u>

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \rho \, dV = \{\text{kan byta } x \leftrightarrow y \leftrightarrow z\} =$$
$$= I_{yy} = I_{zz}$$

$$I_{xy} = -\int xy \rho \, dV = 0 \quad \text{p.g.a. spegelsymmetri,}$$

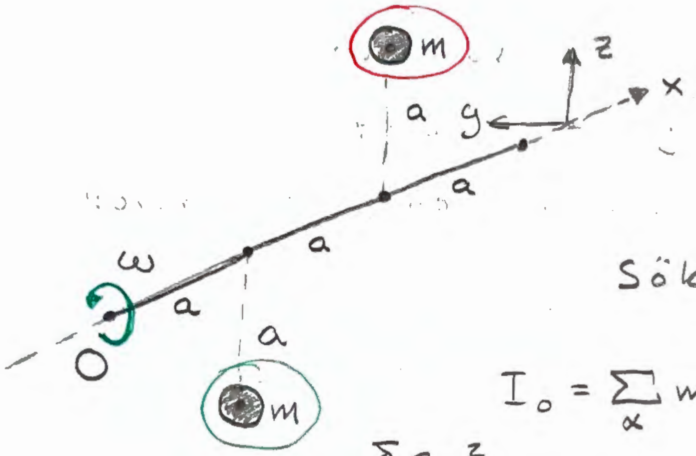


Trots att kuben inte har symmetri m.a.p. godtycklig axel är

$$\vec{H} \parallel \vec{\omega}$$

ty $I \propto$ identitetsmatris

(Gäller även andra platonska kroppar)



(Teckenfel i föreläsning, ska vara fixat här)

Söker I_o, och $\vec{H}$

$$I_o = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} r_\alpha^2 - (\vec{r}_\alpha)_i (\vec{r}_\alpha)_j\right)$$

$$I_o = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m\left(\underline{2a^2} + \underline{5a^2}\right)}^{\delta r_\alpha^2} -$$

$$- \underbrace{\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \end{array}}_{m\begin{bmatrix} | \\ \vec{r} \\ | \end{bmatrix}[-\vec{r}-]} ma^2 - \underbrace{\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} ma^2}_{m\begin{bmatrix} | \\ \vec{r} \\ | \end{bmatrix}[-\vec{r}-]} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) ma^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} ma^2$$

$$\vec{H} = I\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} ma^2 \begin{bmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = ma^2\omega \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll: $\vec{H} = \sum_\alpha m \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha =$

$$= \underline{(1,0,-1)a \times (0,-1,0)a\omega m} +$$

$$+ \underline{(2,0,1)a \times (0,-1,0)a\omega m} = \ldots$$

$$\ldots = ma^2\omega \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{OK!}$$

Fortsättning: Ta fram yttre moment.

Axeln snurrar ej kring huvudaxel

$\Rightarrow$ yttre moment måste hålla den kvar.

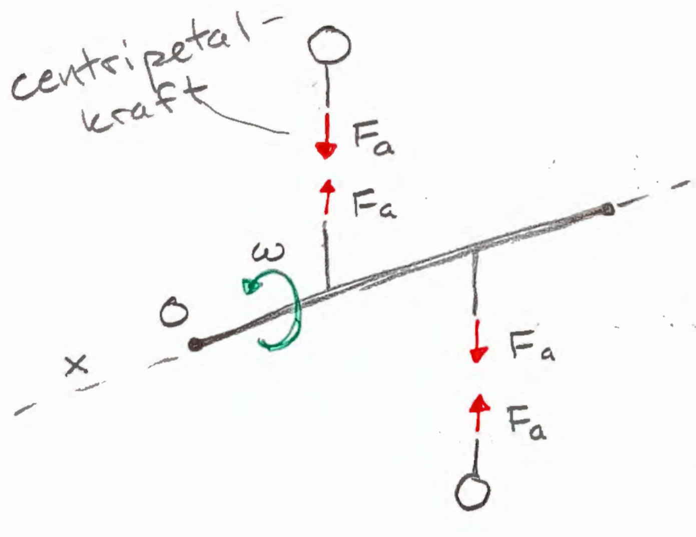
Kropparna har centripetalkraft:

$F_a = m\omega^2 a$ i pos/neg $\hat{z}$-led.

$$\vec{M}_o = a\hat{x} \times m\omega^2 a\hat{z} + (-2a)\hat{x} \times m\omega^2 a\hat{z} =$$
$$= ma^2\omega^2\hat{y} \quad //$$

"Staven vill vrida sig kring y-axeln."

För kroppar med punktmassa behövs ej tröghetsmoment / vi kan verifiera tröghetsmomentberäkningar med partikel-kinematik.



kulorna ger staven ett vridmoment m.a.p. O.

Ett yttre vridmoment $\vec{M}_o$ tillförs för att bibehålla rotation kring x-axeln

Mekanik 200422

Eulers ekvationer

Rotationer i ett roterande koordinatsystem.

Tröghetsmatrisen är koordinatberoende. Kroppen "roterar ur" fixt koordinatsystem

$\Rightarrow$ Vi behöver fixera koordinatsystemet på kroppen.

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{A}}$$

Användbart då koordinatvektorer roterar.

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{H}$$

koordinat roterar med $\vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \frac{\partial}{\partial t}(I\vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega})$$

Välj det koordinatsystem som ger I som diagonal matris. (Längs huvudaxlar)

$\Rightarrow$ I fixerad och koordinat roterar som kroppen.

$$\vec{M} = I\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} + \vec{\omega} \times I\vec{\omega}$$

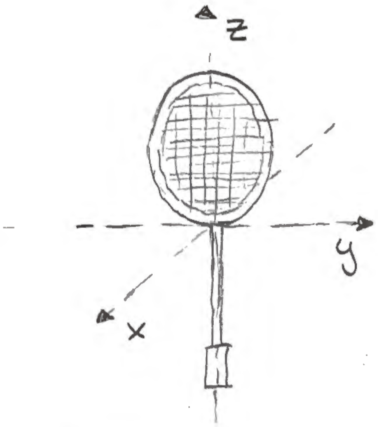
OBS: Vi slipper derivera I!!

Antag $I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} M_x = I_{xx}\mathring{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z \\ M_y = I_{yy}\mathring{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x \\ M_z = I_{zz}\mathring{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y \end{cases}}$$

Eulers ekvationer

Allt uttryckt i kroppens system.



"Tennis racket theorem" / Intermediate axis theorem:

För ett tennisracket gäller

$$\boxed{I_{zz} < I_{yy} < I_{xx}}$$

Teoremet säger:

Om du kastar upp ett snurrande racket ($\vec{M} = 0$) kommer rotationen vara stabil kring I_{zz} & I_{xx} men instabil kring I_{yy}.

Förklaring

Kastar upp racket $\Rightarrow$ $\vec{M} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{H}$ konstant

Nästan all rotation kring t.ex. axel I_{xx}

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \qquad \delta_y, \delta_z << \omega_x$$

Eulers ekvationer:

$$\begin{cases} 0 = I_{xx}\dot{\omega}_x + \delta_y \delta_z (I_{zz} - I_{yy}) \\ 0 = I_{yy}\dot{\delta}_y + \delta_z \omega_x (I_{xx} - I_{zz}) \\ 0 = I_{zz}\dot{\delta}_z + \omega_x \delta_y (I_{yy} - I_{xx}) \end{cases}$$

Utveckla till lägsta ordning i δ_y & δ_z

$$\Rightarrow \text{"}\delta^2 = 0\text{"} \ \& \ \dot{\omega}_x = 0 \text{ ty } \omega_x \text{ konstant}$$

deriverad

$$\begin{cases} 0 = I_{yy}\dot{\delta}_y + \delta_z \omega_x (I_{xx} - I_{zz}) \\ 0 = I_{zz}\ddot{\delta}_z + \omega_x \dot{\delta}_y (I_{yy} - I_{xx}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{zz}\ddot{\delta}_z = \omega_x (I_{xx} - I_{yy})\dot{\delta}_y$$

$$\Rightarrow \dot{\delta}_y = \delta_z \omega_x (I_{zz} - I_{xx}) / I_{yy}$$

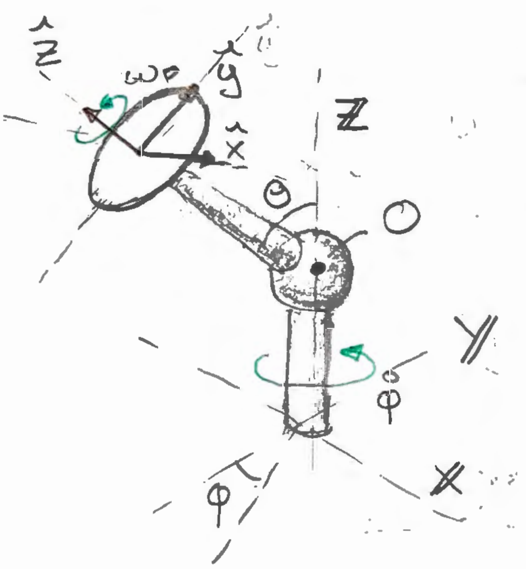
$$\ddot{\delta}_z = \frac{\omega_x^2 (I_{xx} - I_{yy})(I_{zz} - I_{xx})}{I_{zz} I_{yy}} \delta_z$$

$$\ddot{\delta}_z = k\, \delta_z$$

Alltså är δ_z stabil om $k<0$ och instabil om $k>0$

Instabil $\Leftrightarrow$ $k>0$ $\Leftrightarrow$ $(I_{xx} - I_{yy})(I_{zz} - I_{xx}) > 0$

vilket gäller om I_{xx} ligger mellan I_{zz} och I_{yy}



Symmetriska snurran

Rymdkoordinat $X\,Y\,Z$

Kroppskoordinat $\hat{x}\,\hat{y}\,\hat{z}$

θ & φ beskriver rörelse av symmetriaxel.

$\vec{\Omega}$ beskriver roterande koordinat

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} X + \dot{\varphi} Z$$

$\vec{\Omega}$ är koordinatsystemets rörelse

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} X + \dot{\varphi} Z = \dot{\theta}\hat{x} + \dot{\varphi}(\hat{z}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta)$$

Vinkelhastigheten för skivan blir

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \omega_p \hat{z}$$

OBS; m.a.p. O

För skivan är $I = \begin{bmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\parallel \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{H} = I\vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\parallel \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ \omega_p + \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_\perp \dot{\theta} \\ I_\perp \dot{\varphi}\sin\theta \\ I_\parallel(\omega_p + \dot{\varphi}\cos\theta) \end{bmatrix}$$

OBS: koordsys. rotation

$$\vec{M} = \frac{\partial}{\partial t} I\vec{\omega} + \vec{\Omega} \times \vec{H} \quad \text{ger}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\perp \,\partial/\partial t\, \dot{\theta} \\ I_\perp \,\partial/\partial t\, (\dot{\varphi}\sin\theta) \\ I_\parallel \,\partial/\partial t\, (\omega_p + \dot{\varphi}\cos\theta) \end{bmatrix} +$$

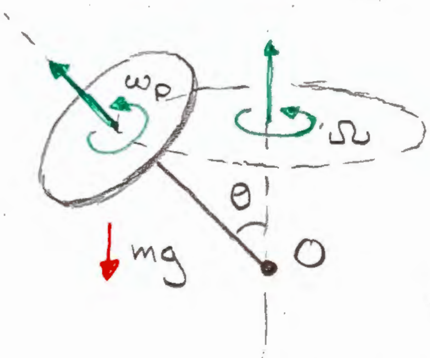
$$+ \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_\perp \dot{\theta} \\ I_\perp \dot{\varphi}\sin\theta \\ I_\parallel (\omega_p \dot{\varphi}\cos\theta) \end{bmatrix}$$

För specialfallet θ konstant, $\dot{\varphi} = \Omega =$ konstant, konstant precession

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega\sin\theta \\ \Omega\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ I_\perp \Omega \sin\theta \\ I_\parallel (\omega_p + \Omega\cos\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \sin\theta\left((I_\parallel - I_\perp)\Omega\cos\theta + I_\parallel \omega_p\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alltså: symmetriaxel precesserar om vi har ett moment i x-led.



Tolkning: giroskop med inverkande gravitation.

$$\vec{M} = Rmg \sin\theta\, \hat{x}$$

$$\Rightarrow Rmg \cancel{\sin\theta} = \Omega \cancel{\sin\theta}((I_\parallel - \ldots$$

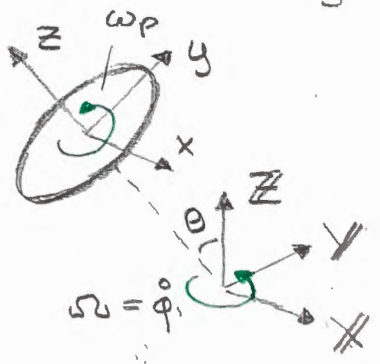
$$\Rightarrow \boxed{mgR = \Omega\left((I_\parallel - I_\perp)\Omega\cos\theta + I_\parallel \omega_p\right)}$$

Ekvation för precession Ω i termer av θ och R. För snabb rotation $\omega_p \gg \Omega$

$$\Rightarrow \boxed{mgR \simeq \Omega I_\parallel \omega_p}$$

Mekanik 200424

Fortsättning på föregående exempel



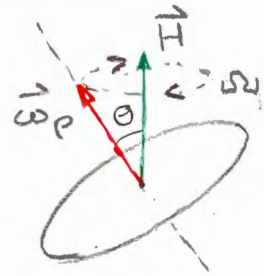
Tidigare resultat:

$$\begin{cases} M_x = \Omega \sin\theta\left((I_{\parallel} - I_{\perp})\Omega\cos\theta + I_{\parallel}\omega_p\right) \\ M_y = M_Z = 0 \end{cases}$$

Om θ, ω_p och $\dot{\varphi}$ konstanta

Anm: att φ ej förekommer i resultatet gör att vi kan utöka resultatet till att gälla även om $\hat{x} \neq \hat{X}$

Tolkning: Momentfri precession



Vi kastar upp skivan i luften. Kastet är imperfekt så $\vec{H}$ är ej parallell med symmetriaxeln.

Precessionshastigheten av symmetriaxeln kring $\vec{H}$ är Ω. Den är ej lika med hastigheten av skivan kring sin symmetriaxel ω_p

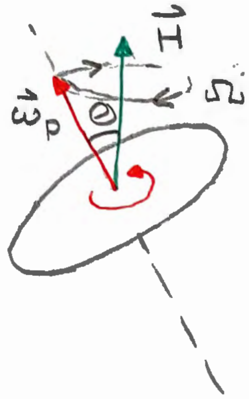
$M_x = 0$, $\sin\theta \neq 0$

$$\Rightarrow (I_{\perp} - I_{\parallel})\Omega\cos\theta = I_{\parallel}\omega_p$$

$$\Rightarrow \Omega = \left(\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp} - I_{\parallel}}\right)\frac{\omega_p}{\cos\theta}$$ OBS: $I_{\parallel} > I_{\perp}$

Skiva snurrar medsols

$\Rightarrow$ Symmetriaxel precesserar med proportionell hastighet motsols.



$$\Omega = \left(\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp} - I_{\parallel}}\right)\frac{\omega_p}{\cos\Theta}$$

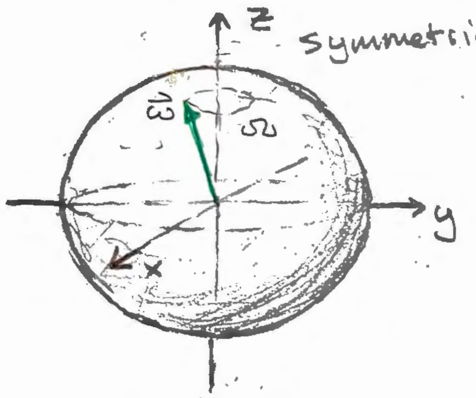
Speciellt för en skiva är $I_{\parallel} = 2 I_{\perp}$

$$\Rightarrow \Omega = -2\,\frac{\omega_p}{\cos\Theta}$$

Disken wobblar (symmetriaxeln precesserar) åt motsatt rotations riktning

För kroppar där $I_{\parallel} < I_{\perp}$ blir wobbel och rotation åt samma håll.

Precession av momentfri snurra i kroppens egna koordinatsystem:



Jorden

Jorden roterar i huvudsak runt z, men har en liten vinkel.

Jorden är nästan symmetrisk:

$$I_{\perp} = I_{xx} = I_{yy} \lessapprox I_{zz} = I_{\parallel}$$

Eulers ekvationer:

$$\begin{cases} 0 = I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{\parallel} - I_{\perp})\,\omega_y\omega_z \\ 0 = I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{\perp} - I_{\parallel})\,\omega_z\omega_x \\ 0 = I_{zz}\dot{\omega}_z + (\cancel{I_{\perp}} - \cancel{I_{\perp}})\,\omega_x\omega_y \end{cases} \Rightarrow \dot{\omega}_z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_x = -\dfrac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}}\,\omega_z\omega_y \\ \dot{\omega}_y = \dfrac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}}\,\omega_z\omega_x \end{cases}$$

Låt $\Omega = \dfrac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}}\,\omega_z$ (precession av ω kring nordpolen)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_x = -\Omega\,\omega_y \\ \dot{\omega}_y = \Omega\,\omega_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_x = \delta\cos\Omega t \\ \omega_y = \delta\sin\Omega t \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$ tolkning:

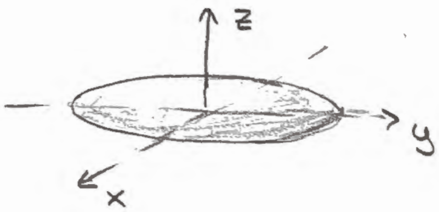
$(\omega_x, \omega_y, 0)$ roterar kring $\hat{z}$ med vinkelhastighet Ω. Vi vet att

$$\Omega = \frac{2\pi}{308} \text{ per dag medsols}$$

Kallas Chandler wobble.

Tillämpningar

Exempel: ett rymdskepp



Antag $I_{xx} \neq I_{yy} \neq I_{zz} \neq I_{xx}$

Kinetisk energi:

$$KE = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{H} = $$
$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I\vec{\omega}$$

Antag att I är inverterbar (inget $I_{ij} = 0$)

$$KE = \frac{1}{2}\vec{\omega}\, I I^{-1} I\vec{\omega}$$

Notera att I är symmetrisk $\Rightarrow$ $\vec{\omega} I = I\vec{\omega} = \vec{H}$

$$KE = \frac{1}{2}\vec{H} I^{-1}\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{H}\begin{bmatrix} 1/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix}\vec{H}$$

Analog till $E = \frac{p^2}{2m}$

Stabilitet av en kropp i rymden som ej är stel

Exempel: Jorden med flytande innehåll.
För en stel kropp bevaras E, $\vec{G}$ och $\vec{H}$.
För en elastisk kropp bevaras $\vec{G}$ och $\vec{H}$ men inte E. Detta för att intern friktion omvandar kinetisk energi till värme.

Det gäller alltid $E = \frac{1}{2}\vec{H}\,I^{-1}\vec{H}$ för rot. energi.
$\vec{H}$ är konstant ty inga yttre moment.
När E ändras måste alltså I ändras.
Kroppskoordinaten ändras.

Låt oss välja en riktning i rymden där $\vec{H} = \begin{bmatrix} H_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$E = \vec{H}\,I^{-1}\vec{H} = \ldots = \frac{1}{2} H_x^2 (I^{-1})_{xx}$$

Energi måste antingen vara konstant eller avta med tiden.

När kroppen slutar dissipera energi är den stabil. När sker detta?

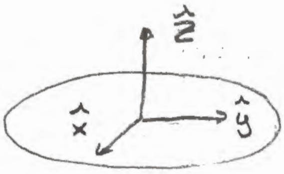
$$I^{-1} = \begin{bmatrix} 1/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix}$$

Det sker när I_{xx} är största tröghetsmomentet.

Elastiska kroppar snurrar till slut alltid runt axeln med störst tröghetsmoment.

Mekanik 200428

Repetition av sista delen av förra föreläsningen



Sföroid roterar fritt i rymden

Den förlorar energi av inre krafter.

$$E = \frac{1}{2}\omega I \omega \quad \text{(implicita vektorer)}$$

Vi har $H = I\omega$ konstant

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} H I^{-1} H$ med fixerat H.

Vi vill minimera $E = \frac{1}{2} H I^{-1} H$.

Gör ett basbyte så att I blir diagonal $I = \begin{bmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{bmatrix}$

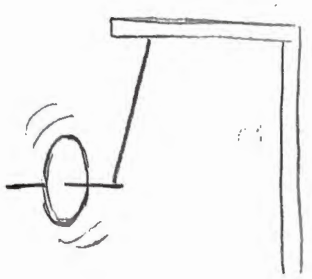
$\Rightarrow I^{-1}$ blir också diagonal.

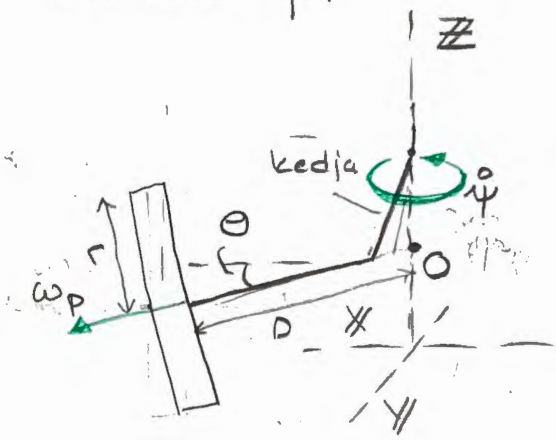
Eftersom I^{-1} symmetrisk gäller

$$E_{min} = \frac{1}{2}|H|^2 \left(1/I_{ii} \right)_{min\ i} = \frac{1}{2}|H|^2 \frac{1}{(I_{ii})_{max\ i}}$$

<u>Alltså är lägsta energitillståndet rotation kring axeln med störst tröghetsmoment</u>

Exempel: Snurrande hjul





Rymdkoordinat överensstämmer med kroppskordinat i början ($\theta = 0$)

(Kedjan ej vertikal p.g.a. centripetal-acceleration av CM)

$$\vec\Omega = \dot\psi \hat{Z} + \dot\theta \hat{Y}$$
$$\vec\omega = \vec\Omega + \omega_p \hat{X}$$

$$I_o = \begin{bmatrix} I_\parallel & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} \qquad I_\parallel = \frac{1}{2} m r^2 \qquad I_\perp = \frac{1}{4} m r^2 + m D^2$$

$$\boxed{\vec M = I \dot{\vec\omega} + \vec\Omega \times I \vec\omega} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\parallel \dot\omega_p \\ I_\perp \ddot\theta \\ I_\perp \ddot\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_\parallel \omega_p \\ I_\perp \dot\theta \\ I_\perp \dot\psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} M_x = I_\parallel \dot\omega_p + \dot\theta \dot\psi (I_\perp - I_\perp) = I_\parallel \dot\omega_p \\ M_y = \cancel{I_\perp \ddot\theta} + \dot\psi I_\parallel \omega_p = \dot\psi I_\parallel \omega_p \\ M_z = \cancel{I_\perp \ddot\psi} - \dot\theta I_\parallel \omega_p = \dot\theta I_\parallel \omega_p \end{cases}$$

Antag $\ddot\theta, \ddot\psi = 0$
Ok om $\omega_p \gg \dot\theta, \dot\psi$

För hjulet är $M_x = 0$ ty inga krafter i Z-X-planet.

$\Rightarrow \dot\omega_p = 0 \Rightarrow \omega_p$ konstant

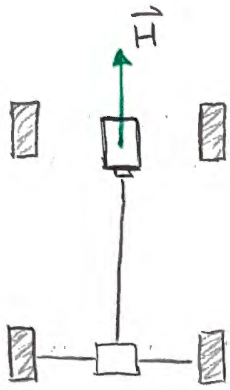
$$M_y = \dot\psi I_\parallel \omega_p \qquad M_z = -\dot\theta I_\parallel \omega_p$$
$$\Downarrow$$
$$\dot\psi = \frac{M_y}{I_\parallel \omega_p} = \frac{2 g D}{r^2 \omega_p} \qquad \dot\theta = -\frac{M_z}{I_\parallel \omega_p}$$

roterar ut

Om friktion från upphängningen verkar på hjulet är $M_z < 0$

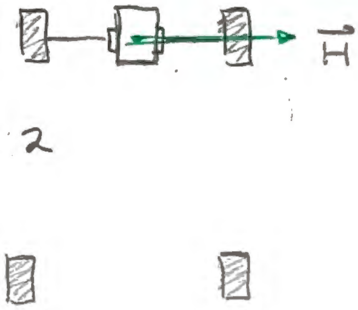
$\Rightarrow \dot\theta > 0 \Rightarrow$ Hjulet börjar luta nedåt.

Exempel Hur man bör montera motorn i en bil:



Alt. 1

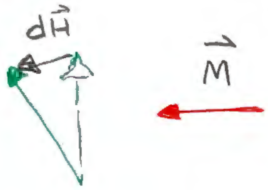
"Tvärmonterad"

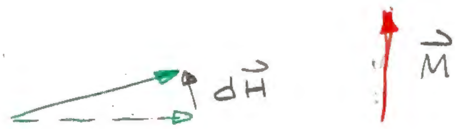


Alt. 2

Svänghjulet i motorn har RMM $\vec{H}$.

Ponera att vi gör en vänstersväng:





Momentet måste komma av att bakhjul trycks upp

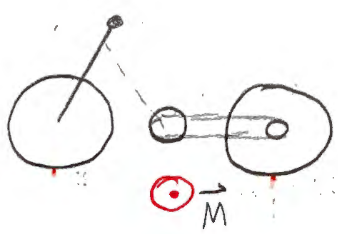
=> Bilen lutar bakåt.

Momentet måste komma av att vänstersida trycks upp

=> Bilen lutar inåt

En tvärmonterad motor är alltså mest fördelaktigt för att motverka krängning.

Problematiskt att motorn snurrar fel håll i förhållande till hjul → Används ej i praktiken. Dock viktigt på motorcyklar.



kontrarotation av motorn motverkar stegring och ger mindre lutning.

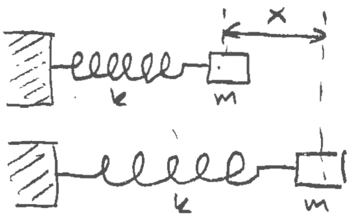
Vid acceleration måste $\vec{M}$ tillföras, annars stegrar cykeln.

=>

Fördelaktigt med kontrarotation s.a. $-\vec{M}$ på svänghjul accelererat cykeln.

Mekanik 200504

Svängningar [Kapitel 8]



Exempel: sträckt fjäder

N II:

$-kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \quad (*)$

där $\omega^2 := k/m$

(*) linjär andra ordningens diffekv.

$\Rightarrow x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

OBS: Två fria parametrar A, B

$\Leftrightarrow$ begynnelsevillkor är läge och hastighet.

Begynnelsevillkor: $x(t=0) = x_0 \quad \dot{x}(t=0) = v_0$

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = B\omega = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$

Annan representation: Amplitud och fas

$x(t) = A\sin(\omega t + \psi)$

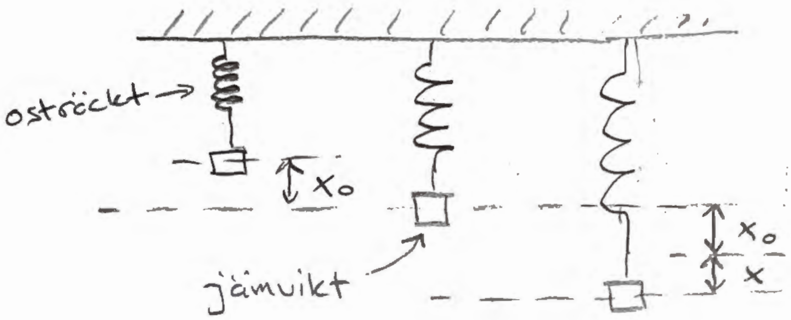
löser också (*) och har två randvärden.

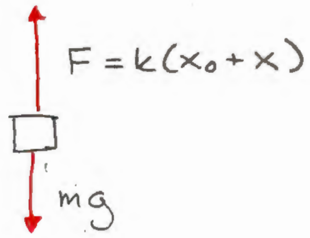
$$\begin{cases} x(0) = A\sin(\psi) = x_0 \\ \dot{x}(0) = A\omega\cos(\psi) = v_0 \end{cases}$$

$\frac{1}{\omega}\tan\psi = \frac{x_0}{v_0} \Rightarrow \psi = \arctan\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$

$A^2\sin^2\psi + A^2\cos^2\psi = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\,\sin\left(\omega t + \arctan\frac{\omega x_0}{v_0}\right)}$$





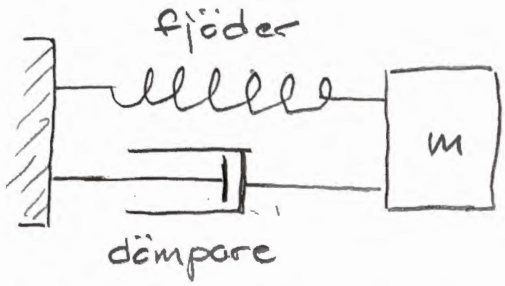
NII: $\quad -k(\cancel{x_0} + x) + \cancel{mg} = m\ddot{x}$

Men för jämvikt är $-k(x_0 + 0) + mg = 0 \Rightarrow kx_0 = mg$

$$\Rightarrow \boxed{-kx = m\ddot{x}}$$

Vi får alltså samma resultat med och utan gravitationskraft på massan.

Dämpad rörelse



Antag att vi har en dämpning proportionell mot hastigheten.

Newtons andra:

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \qquad (*)$$

(*) homogen andra ordnings diffekv.

Ansats: $\boxed{x(t) = Ae^{\omega t}}$ där ω konstant $[1/s]$

$$\Rightarrow \quad (m\omega^2 + c\omega + k)\cancel{Ae^{\omega t}} = 0$$

$$\omega^2 + \left(\frac{c}{m}\right)\omega + \left(\frac{k}{m}\right) = 0$$

karaktäristisk ekvation

Låt $\omega_0^2 = k/m$ och ξ s.a.

standard sättet att skriva

$$\omega^2 + 2\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2 = 0$$

d.v.s. $2\xi\omega_0 = c/m \Rightarrow \xi = \frac{c}{2\omega_0 m} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

ξ kallas "dämpningskonstant". Låt nu $\lambda = \omega$

Vi har alltså ω_0 och ξ givna och

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \qquad x = Ae^{\lambda t} \text{ där } \lambda = \omega$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2\xi\lambda\omega_0 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2} = \omega_0\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

Vi får tre olika fall:

$\boxed{\xi > 1}$ $\boxed{\xi = 1}$ $\boxed{\xi < 1}$

(Vi definierade $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ för att få dessa enkla olikheter)

$\boxed{\xi > 1}$

Vi får två lösningar:

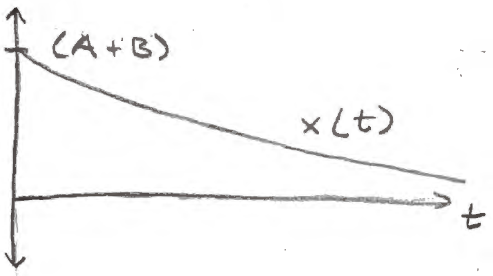
$$\lambda_+ = \omega_0\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right), \quad \lambda_- = \omega_0\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \; x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \qquad ((*) \text{ linjär})$$

$$= e^{-\omega_0 \xi t}\left(Ae^{\omega_0\sqrt{\xi^2-1}\,t} + Be^{-\omega_0\sqrt{\xi^2-1}\,t}\right)$$

Obs: λ_+ och λ_- båda negativa.

$\xi > 0$ ger alltså:



"Överdämpad rörelse"

$\boxed{\xi < 1}$

Vi får två lösningar: positiv diskriminant

$$\lambda_\pm = \omega_0\left(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$\Rightarrow \; x(t) = e^{-\xi\omega_0}\left(Ae^{i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t} + Be^{-i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}\right) =$$

$$= e^{-\xi\omega_0}\left(Ae^{i\omega_D t} + Be^{-i\omega_D t}\right) \quad \text{där } \omega_D = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

Vi behöver välja A & B s.a. x blir reell.

(Fyra parametrar, två bestämmer realdelen, två gör imaginärdelen till noll)

Låt $A = a_1 + a_2 i \qquad B = b_1 + b_2 i$

$$x(t) = \ldots = e^{-\omega_0 \xi t}\left(\cos(\omega_D t)(a_1 + b_1 + i a_2 + i b_2) + \sin(\omega_D t)(i a_1 - i b_1 - a_2 + b_2)\right)$$

$$\operatorname{Im} x(t) = 0 \;\Rightarrow\; b_2 = -a_2 \;\&\; a_1 = b_1$$

d.v.s. $B = \bar{A} = A^*$

$\boxed{\xi < 1}$ fortsättning

$$x(t) = e^{-\omega_0 \xi t}(Ae^{i\omega_D t} + A^* e^{-i\omega_D t}) =$$

$$= e^{-\omega_0 \xi t}(Ae^{i\omega_D t} + (Ae^{i\omega_D t})^*) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}(e^{-\omega_0 \xi t} \cdot Ae^{i\omega_D t}) =$$

$$= \mathrm{Re}(2Ae^{-\omega_0 \xi t + i\omega_D t})$$

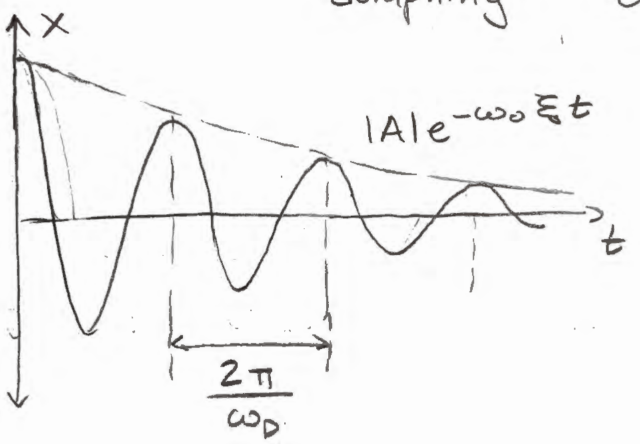
Så vi får

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}(2Ae^{\lambda t}) \quad \text{om} \quad \lambda = -\omega_0 \xi + i\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0}$$

De två parametrarna är realdelen och imaginärdelen av A.

$\lambda = -\omega_0 \xi \qquad \omega_D = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0$ ger

$$x(t) = \underbrace{e^{-\omega_0 \xi t}}_{\text{dämpning}} \underbrace{\mathrm{Re}(Ae^{i\omega_D t})}_{\text{oscillation}}$$



"Underdämpad"

$\boxed{\xi \approx 1}$

Vi får lösning(ar):

$\lambda = -\omega_0 \xi + \delta$ där $\delta = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$

$\Rightarrow x(t) = e^{-\omega_0 \xi}(A e^{\delta t} + B e^{-\delta t})$

Om $\xi = 1$ ekakt:

$x(t) = (A+B) e^{-\omega_0 t}$

Vi får bara en parameter!

Sätt istället

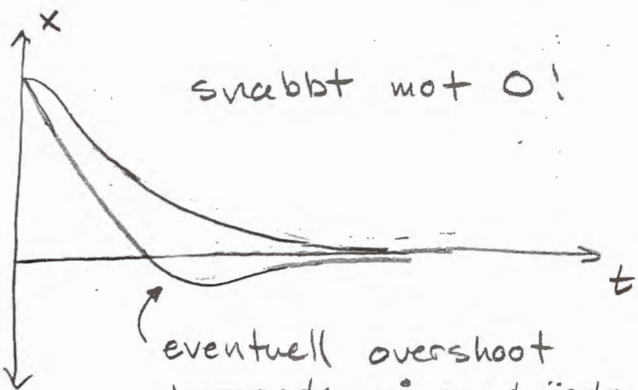
$x(t) = e^{-\omega_0 t}(a e^{\delta t} + b(e^{\delta t} - e^{-\delta t})/2\delta)$

Två parametrar $A = a + b/2\delta$ $B = b/2\delta$

Undersök gränsvärdet $\delta \to 0$ d.v.s. $\xi \to 1$:

$$x(t) = e^{-\omega_0 \xi t}\left(a + \frac{b(\cancel{1}+\cancel{\delta}t - (\cancel{1}-\cancel{\delta}t))}{2\delta}\right) \xrightarrow{\delta \to 0}$$

$$\xrightarrow{\delta \to 0} \underbrace{(a + bt)}_{\text{linjär}} \underbrace{e^{-\omega_0 t}}_{\text{dämpning}}$$ speciell lösning!



"Kritisk dämpning"

$$\boxed{x(t) = (a+bt)e^{-\omega_0 t}}$$

Villkor: ska finnas en rot för kar. ekv. för λ.

$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ har en rot

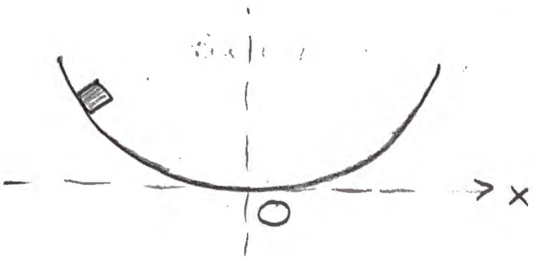
$\Updownarrow$

$$\boxed{c = \sqrt{4mk}}$$

Ger kritisk dämpning

Mekanik 200505

Harmonisk oscillator runt potentialminimum



Lägesenergi / potential: $V(x)$

Taylorutveckla kring botten:

$$V(x) = V(0) + xV'(0) + \ldots$$

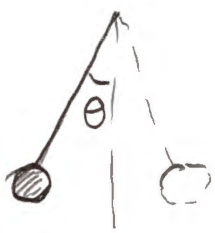
Jämvikt vid $x=0$ ger $V'(0)=0$

$$\Rightarrow V(x) \approx V(0) + \frac{1}{2}x^2 V''(0) = \text{konstant} + \frac{1}{2}x^2 k$$

där $k = V''(x)\Big|_{x=0}$

$$F = -\frac{dV}{dx}\Big|_{x=0} = -kx$$

återställande kraft som för små oscillationer beskrivs av en harmonisk oscillator.



Exempel

$$I\ddot{\theta} = M$$

$$mR^2\ddot{\theta} = Rmg\sin\theta$$

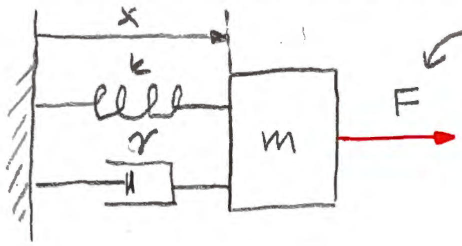
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \approx \frac{g\theta}{R}$$

diffekv

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R}$$ (ω svängningsfrekvens)

$$\boxed{\text{Massa på fjäder är en modell som beskriver all oscillation kring potentialbrunn}}$$

Drivna oscillatorer



drivande kraft

$$F = F_0 \cos(\Omega t)$$

NII!

$$ma = -\gamma \dot{x} - kx + F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)}$$

där $c = \gamma/m$ och $\omega_0^2 = k/m$ och $f = \frac{F_0}{m}$

I komplexa termer!

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = \mathrm{Re}(f e^{i\Omega t}) \quad (*)$$

Allmän lösning är summa av partikulärlösning och lösning till homogen ekvation:

Partikulärlösning

Ansats: $x(t) = \mathrm{Re}(Ae^{i\Omega t})$

$$(-\Omega^2 + ci\Omega + \omega_0^2)A \cancel{e^{i\Omega t}} = f \cancel{e^{i\Omega t}}$$

(Kan strunta i Re, får automatiskt Re-del rätt)

$$\Rightarrow A = \frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + ic\Omega}$$

Partikulärlösning blir

$$x(t) = \mathrm{Re}(Ae^{i\Omega t}) = \mathrm{Re}\left(\frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - ic\Omega} e^{i\Omega t}\right) =$$

$$= \frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2} \mathrm{Re}\Big(\underbrace{((\omega_0^2 - \Omega^2) - ic\Omega)}_{\text{konstant imaginärt tal, kan skrivas som fas}} e^{i\Omega t}\Big)$$

$\longrightarrow$

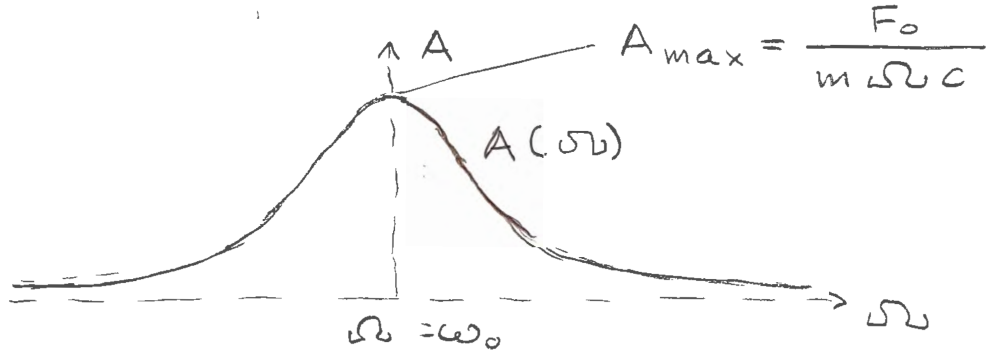
$$x(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - c^2\Omega^2}} \, e^{i(\Omega t - \phi)} \right)$$

där $\tan\phi = \dfrac{\Omega c}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

Så $x(t)$ är svängning med vinkelhastighet Ω, fas ϕ och amplitud

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}}$$

Hur beror A av Ω?



Bredden på toppen är proportionell mot c.
Vi får resonans vid $\Omega = \omega_0$!

Vid A_{max} har vi nämnare

$$2\Omega^2 c^2 = (\omega_0^2 - \Omega^2 + \Omega^2 c^2) \qquad \approx (2\Omega)^2$$

$$\Omega^2 c^2 = (\omega_0 - \Omega)^2 (\omega_0 + \Omega)^2$$

$$\cancel{\Omega} c \approx (\omega_0 - \Omega)\, 2\cancel{\Omega}$$

$(\omega_0 - \Omega) \approx c/2$ => bredare topp med större c.

(Bredd mäts vid $1/\sqrt{2}$ av maxamplituden)

Mekanik 200506

Repetition av komplexa tal

Eulers formel:

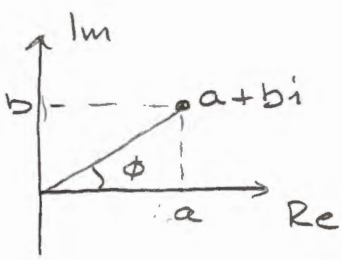
$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Kan även addera vinklar:

$$e^{i\kappa}e^{i\phi} = e^{i(\kappa+\phi)} = \cos(\kappa+\phi) + i\sin(\kappa+\phi)$$

För $z = \lambda + \phi i$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$e^{z} = e^{\lambda+\phi i} = e^{\lambda}e^{\phi i} = e^{\lambda}\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right)$$



Från rektangulär till polär form:

$$\boxed{a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{i\phi}}$$

där $\phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

Division med komplext tal görs enklast på polär form:

$$\boxed{\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e^{-i\phi} \quad \text{där } \phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}}$$

Repetition / sammanfattning av lösning av differentialekvation:

$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = a e^{i\Omega t}$ ska lösas

Ansats: $\boxed{x = b e^{i\Omega t}}$

Ger karaktäristisk ekvation

$(-\Omega^2 + ic\Omega + \omega_0^2) b = a$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{a}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + ic\Omega}$$

$$|b| = \frac{|a|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} = \text{amplitud}$$

$$\Rightarrow \quad b = |b| e^{-i\phi} \quad \text{där} \quad \phi = \frac{c\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$x(t) = \operatorname{Re}\left(b e^{i\Omega t}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} e^{i\Omega t - i\phi}\right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \phi) \quad //$$

Kritisk dämpning i homogena fallet

$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

ger kar ekv $(-\omega^2 + ic\omega + \omega_0^2) = 0$

$\Rightarrow (\omega_0 + i\omega)^2 = \omega_0^2 + ic\omega - \omega^2$

$\Rightarrow 2\omega_0\cancel{\omega} = c\cancel{\omega}$

$\Rightarrow c = 2\omega_0 \quad //$

Beskriv drivet system vid resonans:

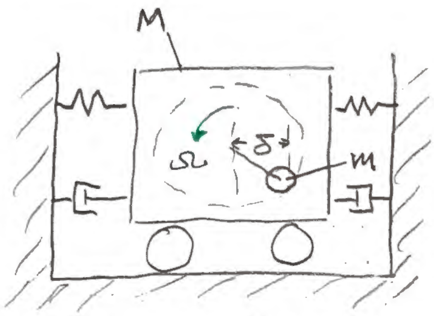
$\Omega = \omega_0$

$$\ddot{x} + ic\dot{x} + x\omega_0^2 = a e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow (\cancel{-\Omega^2} + ic\Omega + \cancel{\omega_0^2})\, b = a \quad \text{ty } \Omega = \omega_0$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{a}{ic\omega_0}} \quad |b| = \frac{a}{\omega_0 c}$$

Exempel: Tvättmaskinen



$m_{TOT} = M + m$

$$F = m_{Tot}\, \ddot{x}_{cm} =$$

$$= \cancel{m_{Tot}} \frac{d^2}{dt^2}\left(Mx + m(x+\delta)\right)\frac{1}{\cancel{m_{Tot}}}$$

$$= (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\delta}$$

Newton II:

$$-2kx - 2c\dot{x} = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\delta}$$

rotation av trumman

$$\Leftrightarrow m_{TOT}\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -\delta\Omega^2\cos(\Omega t)m$$

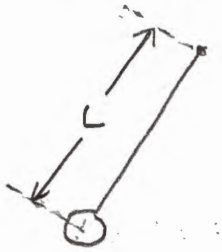
Ansats: $x = A e^{i\Omega t}$

$$\Rightarrow A(-m_{TOT}\Omega^2 + 2k + 2ci\Omega) = -\delta\Omega^2 m$$

Detta ger A i termer av m, M, Ω, c, k.

Katers pendel:

Vill bestäma g m.h.a. pendel

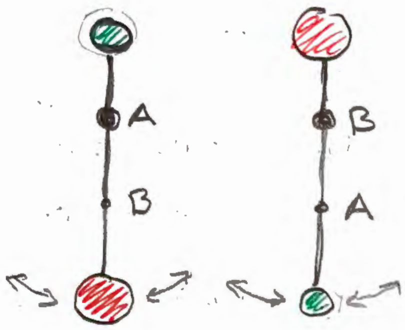


Använder $\omega^2 = \frac{g}{L}$

för vanlig pendel. men vad är L?

(svårt att finna masscentrum)

Använd istället Katers pendel!



Två upphängningspunkter A, B vars läge kan justeras

Punkterna justeras för att ge lika ω på båda hållen.

CM ligger någon stans i mitten.

x_A, x_B är avstånd till CM från A resp. B

$$\begin{cases} I_A = I_0 + m x_A^2 \\ I_B = I_0 + m x_B^2 \end{cases}$$ Enligt steiners

$$\begin{cases} I_A \ddot{\theta} = -\sin\theta\, m g x_A \\ I_B \ddot{\theta} = -\sin\theta\, m g x_B \end{cases}$$ (Se Ex. 200505)

$$\Rightarrow \begin{cases} I_A \omega^2 = m g x_A \\ I_B \omega^2 = m g x_B \end{cases} \qquad \omega^2 (I_A - I_B) = m g (x_A - x_B)$$

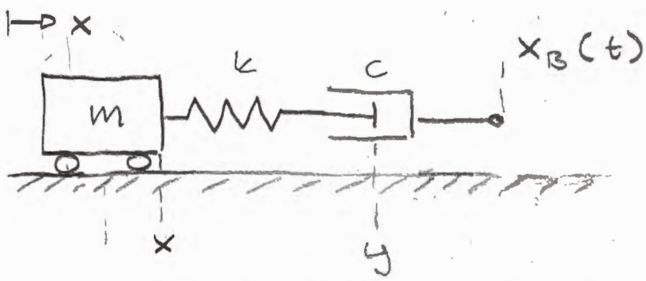
$$I_A - I_B = \cancel{m} x_A^2 - \cancel{m} x_B^2 = \cancel{m} g (x_A - x_B) \frac{1}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{g = \omega^2 (x_A + x_B)}$$

g kunde mätas med precision $10^{-5}\, m/s^2$

Användes för definitionen av yard.

Driven oscillator med dämpare



Givet:

$x_B(t) = \gamma \cos(\omega t)$

Ansatser:

$x(t) = a e^{i\Omega t}$

$y(t) = b e^{i\Omega t}$

Det intressanta fallet är när vi har resonans

homogenlösningar dämpas => dör ut

Frilägg kloss   Frilägg fjöder

N II:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = k(y-x) \\ m\ddot{x} = -c(\dot{y} - \dot{x}_B) \end{array} \right. \\ \mathrm{II} & \end{array}$$

I ger $\quad -\frac{m\Omega^2 a}{k} = (b-a)$

II ger $\quad \frac{\cancel{-}m\Omega^{\cancel{2}}a}{\cancel{-}ci\cancel{\Omega}} = (b-\gamma)$

I − II ger $\quad -a\left(\frac{m\Omega^2}{k} - \frac{m\Omega}{ic}\right) = -a + \gamma$

$$\Rightarrow a(ick - icm\Omega^2 - km\Omega) = ick\gamma$$

$$\Rightarrow a = \frac{ick\gamma}{i(ck - m\Omega^2 c) - mk\Omega}$$

Amplitud: $\quad |a| = \frac{ck\gamma}{\sqrt{(ck - m\Omega^2 c)^2 + (mk\Omega)^2}}$

Gränsfall:

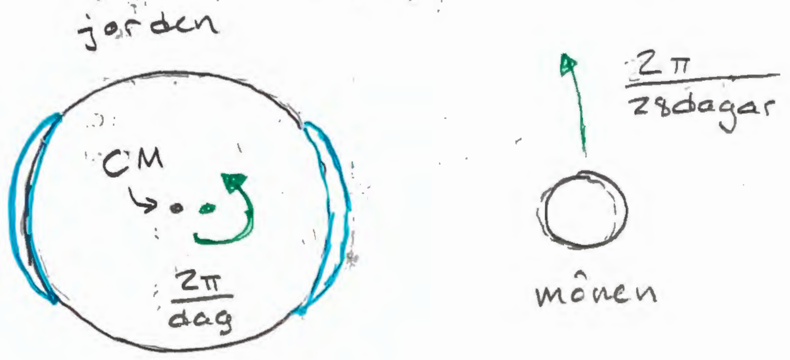
$\Omega \to 0 \Rightarrow |a| = \frac{ck\gamma}{\sqrt{(ck)^2}} = \gamma$

$x(t) = \mathrm{Re}(\gamma e^{i\Omega t}) = x_B(t)$

$\Omega \to \infty \Rightarrow |a| = \frac{k\gamma}{m\omega^2}$

Mekanik 200508

Intressant mekanik med koppling till vår planet (ej på tenta)



Varför blir det högvatten 2ggr per dag om det beror på månen?

På sidan mot månen har vi gravitation + centrifugal. På andra sidan har vi centrifugal p.g.a. förskjutet masscentrum.

Matematiken blir sådan att effekten är samma på båda sidor!

På större skala:

Solen har också denna effekt på tidvattnet. Om himlakropparna ligger i rad förstärks effekten.

=> Större tidvatten vid fullmåne och nymåne!

Vid halvmåne är tidvattnet minst.

Ca 65% p.g.a. måne, 35% p.g.a. sol vid halvmåne.

Tidvattnet ger friktion mot jorden

=> Jordens rotation saktar ner.

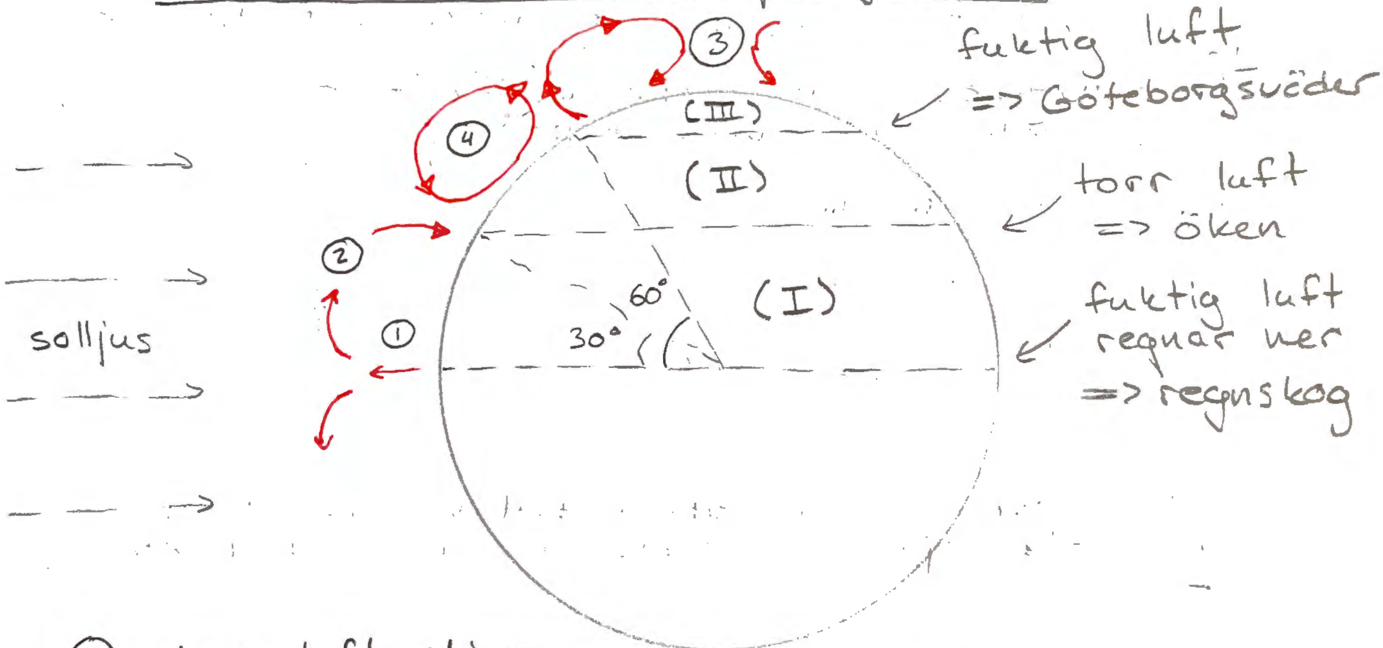
Kommer pågå tills jorden och månen är synkroniserade. (dock är solen också med i spelet)

Jorden hade i början av planetsystemets historia på den smälta månen samma effekt (fast kraftigare p.g.a. storleks-förhållande)

=> Månens rotation synkroniserad med dess rotation kring jorden.

Tidvattenkrafter (tidal forces) leder till synkronisering i rotation av plastiska kroppar.

Corioliskrafters effekt på jorden

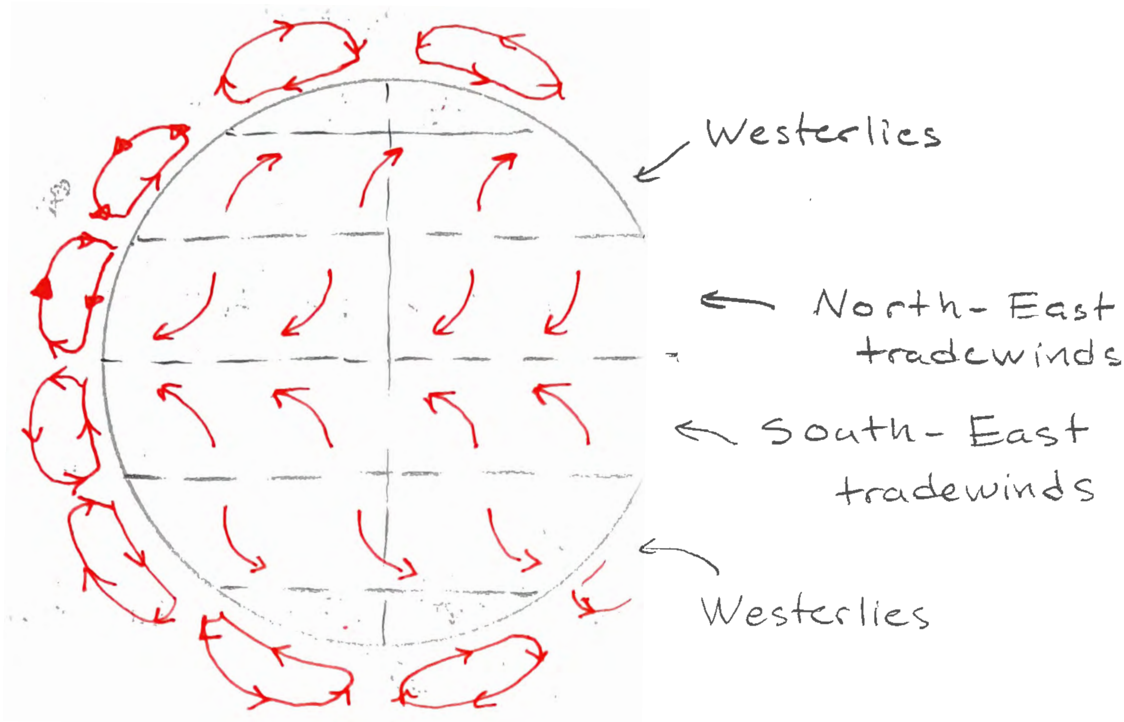


1. Varm luft stiger vid ekvatorn
2. Luft kyls av och faller vid ca 30°
3. Luft faller vid nordpolen
4. En ström bildas i mitten (Tänk kugghjul)

(I) Halley cell

(II) Mid-latitude cell

(III) Polar cell.

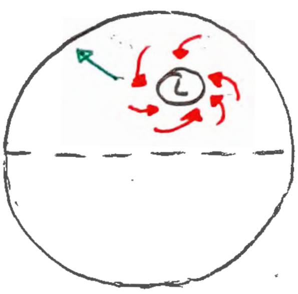


Corioliskraft får luftströmmar att böja av

Vissa områden, där cellerna möter varandra, är det ofta vindstilla.

Handelsresande utnyttjade vindarna (triangelhandeln till exempel)

Lågtryck, Högtryck och orkaner



Corioliskrafter ger moturs rotation till vinden kring lågtryck på norra halvklotet.

Virvelströmmens centrum följer dessutom luftströmmar.

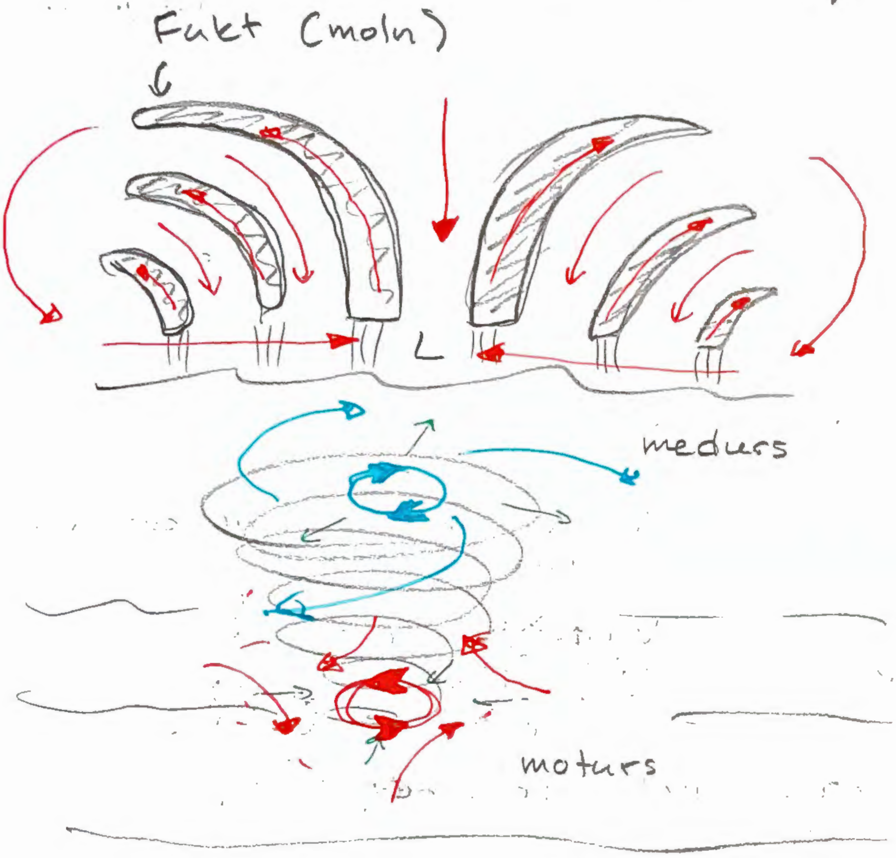
Orkanens högra sida får extra stor fart (överlagras westerlies)

Luft som gör in i orkan svänger höger

=> moturs rotation nedtill

Luft som gör ut ur orkan svänger höger

=> medurs rotation upptill



Genomskärning av orkan

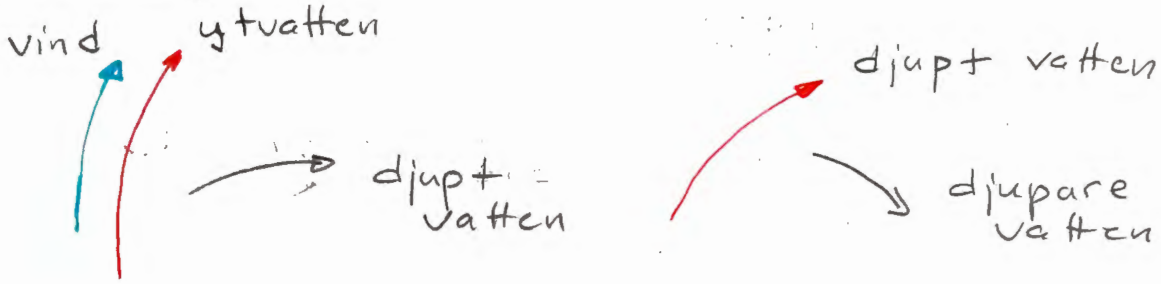
Luftceller bildas

Havsströmmar följer ej samma mönster. "Det finns bara en cell", vatten flödar ner vid nordpolen och upp vid ekvatorn. Dessutom mycket liten effekt.

Havsströmmar drivs istället genom friktion av luftströmarna.

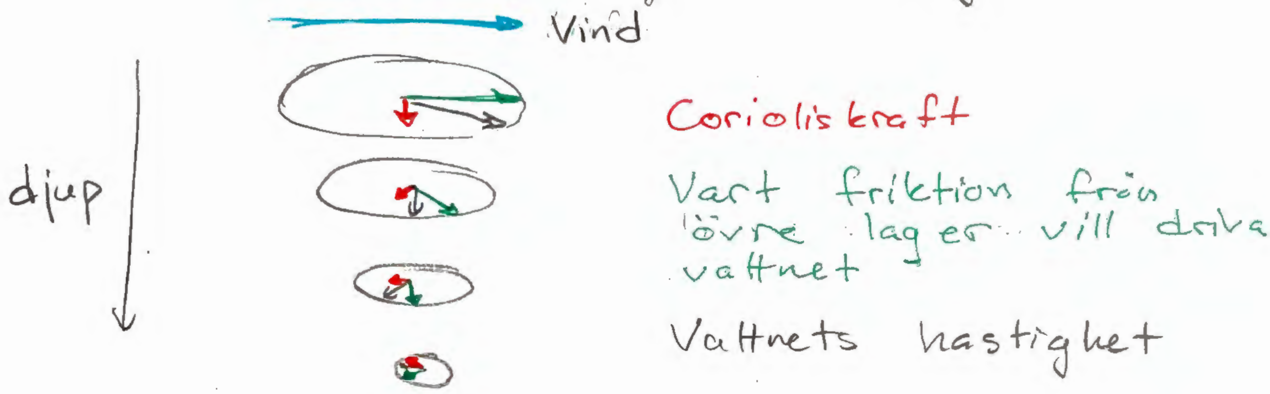
Corioliskraftens inverkan på havsströmmarna

Ekmanspiral



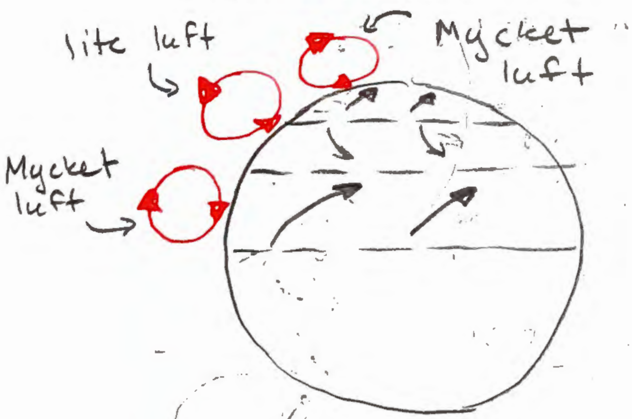
osv. osv.

Vattnets hastighet bildar spiral, men vattnet på varje lager rör sig rakt



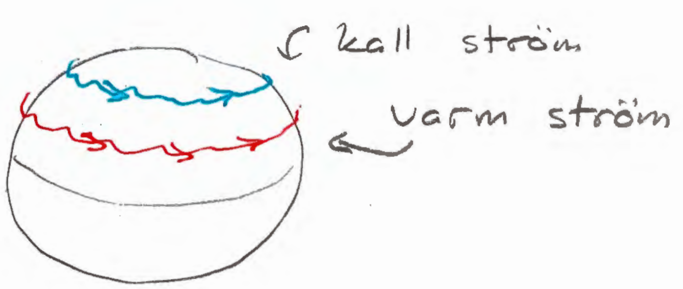
Leder till att isberg inte följer ytvattnet!

Jetströmmar



Går snabbt att flyga öst!

På hög höjd får vi starka strömmar vid 30° och 60°



Mekanik 2005 1.2

Mekanikens grunder (ej examinerbart)

Newtons lagar

I: En kropp förblir i vila eller likformig rörelse i avsaknad av yttre krafter

II: Tidsderivatan av rörelsemängden har samma riktning som vektorsumman av krafterna ($\vec{F} = m\vec{a}$)

III: Två kroppar påverkar varandra med motriktade krafter av samma storlek!

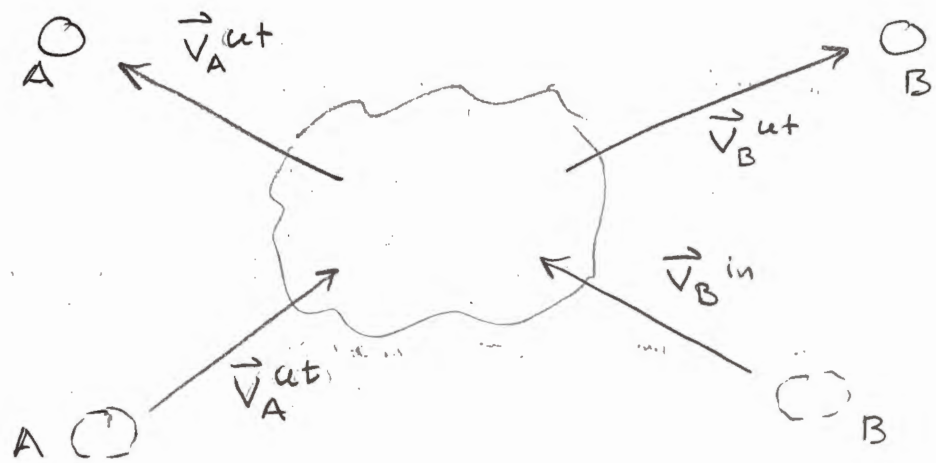
Problem är: kan ej definiera $F := ma$ om vi inte vet vad m är. Om vi använder tyngd för att definiera massa blir resonemanget cirkulärt.

Omformulering: "Mekaniklagarna"

Lex I: En isolerad kropp rör sig med konstant hastighet.

Vi känner tid och rum och kan använda detta för att definiera "isolerad kropp" med $\frac{dv}{dt} = 0$

För att gå vidare måste vi tillsätta fysikaliska principer (experimentell data)
Vi söker en konserveringslag.



Två kroppar interagerar (i övrigt isolerade)

$\vec{v}^{in}$ och $\vec{v}^{ut}$ väldefinierade för båda kroppar.
Experimentellt ser vi att det finns λ_A & λ_B
så att vid varje försök är

$$\boxed{\lambda_A \vec{v}_A^{in} + \lambda_B \vec{v}_B^{in} = \lambda_A \vec{v}_A^{ut} + \lambda_B \vec{v}_B^{ut}}$$

Vi har upptäckt en konserveringslag!
Kalla λ_i för m_i

Vi har nu en lag från en fysikalisk princip:

Lex II: $\exists m_i$ för varje kropp i så att

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{konstant}$$

Utifrån detta definierar vi kraft:

$$\vec{F}_i := m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i$$

$\longrightarrow$

En naturlig följd av definitionen och vår lag:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

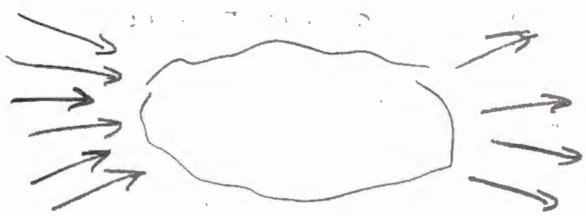
ty $$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} + m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} = 0$$

Vår tredje lag:

Lex III: $\vec{v}_i \longrightarrow \vec{v}_i + \vec{U}$ (Gallileisk transformation)

påverkar inte naturlagar. (Antagande / Experimentellt)

Skärpning av Lex II:



$$\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,in} = \sum_j m_j \vec{v}_j^{\,ut}$$

Kan ha godtyckligt antal partiklar, för slås ihop

Lex II + Lex III ger nu

$$\sum_i m_i \left(\cancel{\vec{v}_i^{\,in}} + \vec{U}\right) = \sum_k m_k \left(\cancel{\vec{v}_k^{\,ut}} + \vec{U}\right)$$

$$\vec{U} \sum_i m_i = \vec{U} \sum_k m_k$$

$\Rightarrow$ konservering av total massa.

Vi har alltså "Galileos mekaniklagar":

Lex I: en isolerad kropp har (per definition) konstant hastighet.

Lex II: $\exists m_i$ s.a. $\vec{G} := \sum_i m_i \vec{v}_i$ är bevarad under fysikaliska förlopp.

Med defenitionen $\vec{F}_i := m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i$ blir Newtons 3:e en naturlig följd.

Lex III: Galileisk transformation ändrar ingen naturlag

$$\vec{v}_i \longrightarrow \vec{v}_i + \vec{U}$$

En naturlig följd är konservation av massa.

Dessa lagar bygger på fysikaliska principer varifrån newtons "lagar" kan härledas uton cirkulära resonemang.

Enheter och dimensionsanalys

Exempel Ta fram frekvens av pendel utan analys.

Vet att $\omega = l^a g^b m^c \cdot C$ ← dimlös konstant

$$\Rightarrow [\omega] = [l]^a [g]^b [m]^c$$

$$[1/s] = [m]^a [m/s^2]^b [kg]^c$$

För att dimensionen ska stämma måste

$c = 0, \quad a = -1/2, \quad b = 1/2$

$$\Rightarrow \omega = C\sqrt{\frac{g}{l}}$$ för någon konstant C.

Så vi vet att dubblering av längd ger $\sqrt{2}$ ggr större ω!

Exempel Pendel med tröghetsmoment

$$\omega = I^a g^b m^c \cdot C$$

$$\Rightarrow [\omega] = [I]^a [g]^b [m]^c$$

$$[1/s] = [kgm^2]^a [m/s^2]^b [kg]^c$$

$$\begin{array}{l} m: \\ kg: \\ s: \end{array} \begin{cases} 0 = 2a + b \\ 0 = a + c \\ -1 = -2b \end{cases} = \begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1/2 \\ c = 1/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega = C \sqrt[4]{\frac{mg^2}{I}}$$

Skalning för havsvågor

Hur ska vi ändra uppspelningshastigheten för att en båt ska se verklig ut?

Vi bestämer L så att den matchar båten. Vad blir frekvensen för vågorna?

$$\omega = L^a g^b \rho^c \cdot C$$

$$\Rightarrow [\omega] = [L]^a [g]^b [\rho]^c$$

$$[1/s] = [m]^a [m/s^2]^b [kg/m^3]^c$$

$$\begin{array}{l} kg \\ m \\ s \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0 = c \\ 0 = a + b - 3c \\ -1 = -2b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1/2 \\ b = 1/2 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega \propto \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Båt i skala $1/64$

$\Rightarrow$ Sakta ner filmhastighet med faktor 8 för realistisk vågfrekvens.

Exempel

Fjäder i harmonisk oscillator

$\Rightarrow$ frekvensen är oberoende av amplitud.

$$\omega = C k^a m^b L^c \quad (*)$$

$$\Rightarrow [1/s] = [kg/s^2]^a [kg]^b [m]^c$$

Vi ser direkt att $c = 0$ så ω beror omöjligen av L (om $(*)$ gäller)

Exempel Anharmonisk fjäder

$F = -\kappa x^3$

$\Rightarrow [\kappa] = \dfrac{[kg\,m/s^2]}{[m^3]} = [\dfrac{kg}{m^2 s^2}]$

Vad blir frekvensen?

$\omega = \kappa^a m^b L^c \cdot C$

$\Rightarrow [1/s] = [\dfrac{kg}{m^2 s^2}]^a [kg]^b [m]^c$

$$\begin{array}{l} m \\ kg \\ s \end{array} \begin{cases} 0 = -2a + c \\ 0 = a + b \\ -1 = -2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\omega \propto L\sqrt{\dfrac{\kappa}{m}}$ Nu beror ω av L!

Exempel Ekmanvirvlar

Kommer från skjuvstress i vattenrörelse.

Rörelse dämpas med djup, vrids av Corioliskraft.

Med ansättning

$h = C\Omega^a \lambda^b \rho^c$ (h djup)

får vi $h \propto \sqrt{\dfrac{\eta}{\rho\Omega}}$

Men detta stämmer inte på grund av komplicerad viskositet med vattenvirvlar.

Dimensionsanalys fungerar inte alltid!

T.ex. $F = -kx - \kappa x^3$

$[k] = [\dfrac{kg}{s^2}]$ $[\kappa] = [\dfrac{kg}{m^2 s^2}]$ a amplitud $[a] = [m]$

$\Rightarrow [\dfrac{k}{\kappa}] = [m^2]$ så $[\dfrac{k}{\kappa a^2}]$ dimlöst

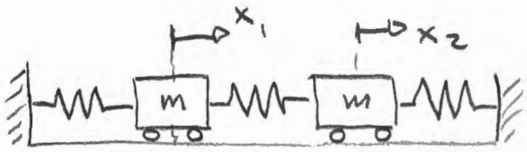
Dimlös grupp ställer till det för dimanalys.

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\, f\left(\dfrac{k}{\kappa a^2}\right)$ ← godt. funktion

Mekanik 200513

Kapitel 9 - Analytisk mekanik

Kopplade pendlar



Jämnlånga fjädrar

x_1, x_2 mäts från jämvikt.

$$\text{N II}: \begin{cases} ma_1 = m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ ma_2 = m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 + kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

Ansats: $x_j = a_j e^{i\omega t}$ $\quad j = 1, 2$ $\quad$ (samma ω!)

$$\Rightarrow \begin{cases} (2k - m\omega^2)a_1 - ka_2 = 0 \\ -ka_1 + (2k - m\omega^2)a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kallas SEKULAREKVATIONEN

Om matrisen är inverterbar finns bara trivial lösning. det $\cdot = 0$ ger andra lösningar. det $\cdot$ kallas sekulardeterminant.

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow m\omega^2 = 2k \pm k \Rightarrow \underline{\omega_+^2 = 3\frac{k}{m}} \quad \underline{\omega_-^2 = \frac{k}{m}}$$

Vi har alltså två olika icke-triviella lösningar.

Betrakta lösn. $\omega_+^2 = 3\frac{k}{m}$ (I)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} a_+ \qquad a_+ \in \mathbb{C}$$

Brukligt men ej nödvändigt att normalisera.

Lösningarna blir:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{a_+}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\omega_+ k} \qquad a_+ \in \mathbb{R}$$

Betrakta lösn. $\omega_-^2 = \frac{k}{m}$ (II)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

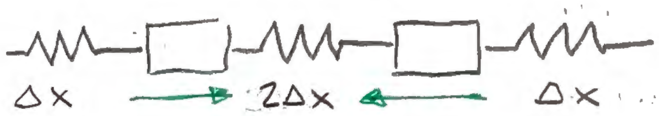
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} a_- \qquad a_- \in \mathbb{C}$$

Lösningarna blir: Kallas normalmoder

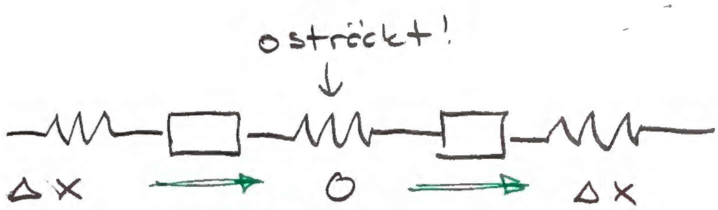
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{a_-}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega_- t}$$

Vad innebär lösningarna?

(I):



(II):



Synkade

Allmän lösning:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{a_+}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\omega_+ t} + \frac{a_-}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega_- t}$$

$$\omega_+ = \sqrt{3\frac{k}{m}} \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

innehåller fasen

a_+ och a_- är fria komplexa tal

=> 4 fria parametrar

Vi har 4 randvärden, $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$. OK!

Blir jobbigt att ställa upp N II för fler delkroppar t.ex. vid simulation av något elastisk kropp. Söker enklare sätt att generera diff. ekv.

Energimetoden

$$E = K.E. + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0 \qquad \dot{x} \neq 0 \text{ generellt}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Vi har genererat diffekv!

Med allmän potential:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + \underbrace{\frac{dU}{dt}}_{-F}\dot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F$$

Problem med energimetoden:

Exempel med två massor:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

$\dot{E} = 0$ ger en diffekv. Men vi har fler än en frihetsgrad! Så energimetoden funkar bara med en massa som rör sig i en dimension.

En metod som fungerar:

Lagrangemetoden

Istället för energi använder vi oss av Lagrangianen / Lagrangefunktionen

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) := \text{Kinetisk energi} - \text{Potentiell energi} =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

Lagrangeekvationen är

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(t)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0$$

(vi vet att $\dot{x}$ & x hänger ihop, men se dem som olika för Lagrangianen)

$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$ ger

$$0 = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt} m \dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow F = m \ddot{x} \qquad N II!$$

Exempel från början av föreläsningen

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{\cancel{2}} k(\cancel{2}x_1^2 + \cancel{2}x_2^2 - \cancel{2}x_1x_2)$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 - k(\underline{x_1}^2 + \underline{x_2}^2) + k x_1 x_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\dot{x})}{\partial x_i(t)} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i$$

(1) $\frac{d}{dt} m\dot{x}_1 = -2k\underline{x_1} + k\underline{x_2}$

(2) $\frac{d}{dt} m\dot{x}_2 = -2kx_2 + kx_1$

Samma diffekv som vi tog fram med N II!

Vad är fördelaktigt med denna metod?

Vi behöver finna en likhet, uttrycket för lagrangianen.

$$\mathcal{L} = K.E. - P.E.$$

När vi väl har $\mathcal{L}$ kan vi automatiskt generera alla newtonsekvationer!

Perfekt om vi vill beräkna lösningar till diffekvationerna i datorn.

Generaliserade koordinater

Polära koordinater $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(r)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta \end{cases}$$

$$K.E. = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)m$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+\dot{\theta}^2 r^2) - V(r)$$

Två frihetsgrader: r & θ

Lagrangeekvationens r- komponent ger

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\dot{\theta}^2 r - \frac{\partial V}{\partial r} \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = F(r)$$

$$m\ddot{r} = m\dot{\theta}^2 r + F(r)$$

$$\boxed{\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = \frac{1}{m}F(r)}$$

Korrekt Newton i polära koordinater.

θ- komponenten ger

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}}_{0}$$

OBS: θ förekommer ej i HL $\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$ konstant

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}r^2 =: p_\theta = \text{RMM}$$

Vi kallar θ <u>cyklisk koordinat</u> ty den ger bevarad storhet. ger en konserveringslag.

NYCKEL: för lagrangianen betraktas x & $\dot{x}$ / θ & $\dot{\theta}$ som oberoende.

Lagrangianen ger en alternativ formulering av mekaniken.

Recept

(A) Konstruera $\mathcal{L} = K.E. - P.E.$

(B) Skriv ner Lagrangeekvationen

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}}$$

(C) Lös dessa diffekvationer (om lösning önskas)

Mekanik 200515

Mer om Lagrangeekvationen

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}(x,\dot{x}) = K.E. - P.E. \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}}$$

q mäts i låda som rör sig

Exempel

$$q = x - x_0(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = q + x_0(t)$$

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = K.E - P.E. = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) =$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{q} + \dot{x}_0)^2 - V(q + x_0)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \Rightarrow m\frac{d}{dt}(\dot{q} + \dot{x}_0) = -\frac{\partial V}{\partial q}(x_0 + q)$$

$$\Rightarrow m\ddot{q} + m\ddot{x}_0 = F(x_0 + q)$$

Om potentialen följer med lådan: $F(x_0+q) = f(q)$

$$\Rightarrow m\ddot{q} = -m\ddot{x}_0 + f(q)$$

Tolkning:

även känt som fiktiv kraft

$$ma = f(q) + \underbrace{\text{effektiv kraft}}_{\text{- massa} \cdot \text{acceleration av koordinat}}$$

Exempel : Små oscillationer

$y = \frac{1}{2}kx^2$ — Vagn rullar i bana

Söker $x(t)$

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = kx\dot{x}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy =$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (kx\dot{x})^2) - \frac{1}{2}mgkx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + (kx)^2) - \frac{1}{2}mgkx^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}(1+k^2x^2)\right) = m\dot{x}^2k^2x - mgkx$$

$$m\ddot{x}(1+k^2x^2) \cancel{+2}m\dot{x}^2k^2x = \cancel{m\dot{x}^2k^2}x - mgkx$$

$$m\ddot{x}(1+\underline{k^2x^2}) + \underline{m\dot{x}^2k^2x} = -mgkx$$

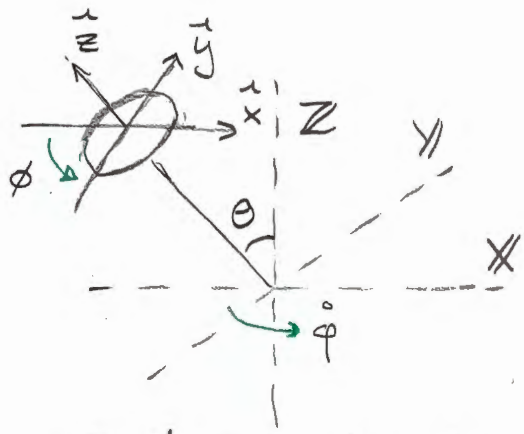
Korrekt men besvärlig diffekvation!

Vi kollar på små svängningar nära stationärt läge vid $x = 0$. utveckla DE till linjär ordning (ta bort kvadrattermer)

$$\Rightarrow \cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m}gkx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + gkx = 0}$$

Snällt!

Exempel: Symmetrisk snurra



$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\mathbb{Z} + \dot{\theta}\hat{x} + \dot{\phi}\hat{z} =$$
$$= \hat{z}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\phi}) + \hat{x}\dot{\theta} + \hat{y}\dot{\varphi}\sin\theta$$

$$\mathbb{Z} = \hat{z}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$$

$$K.E. = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T I \vec{\omega} = [\omega_x \; \omega_y \; \omega_z]\begin{bmatrix} I_\perp & & \\ & I_\perp & \\ & & I_\parallel \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}I_\perp(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_\parallel(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\phi})^2$$

$$P.E. = mgR\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}I_\perp(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_\parallel(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\phi})^2 - mgR\cos\theta$$

Lagrangeekvationerna kan skrivas ner.

Resultatet blir Eulers ekvationer!

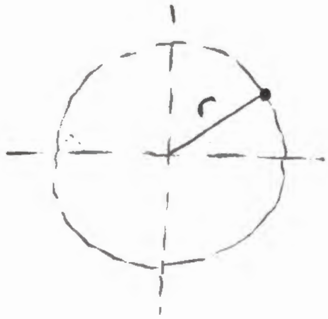
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \quad \text{ger Eulers}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \text{konstant}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \text{konstant}$$

En diffekv och två rörelsekonstanter.

Roterande partikel



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)m - U(r)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} m\dot{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} + m r \dot{\phi}^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi = \text{konstant}$$

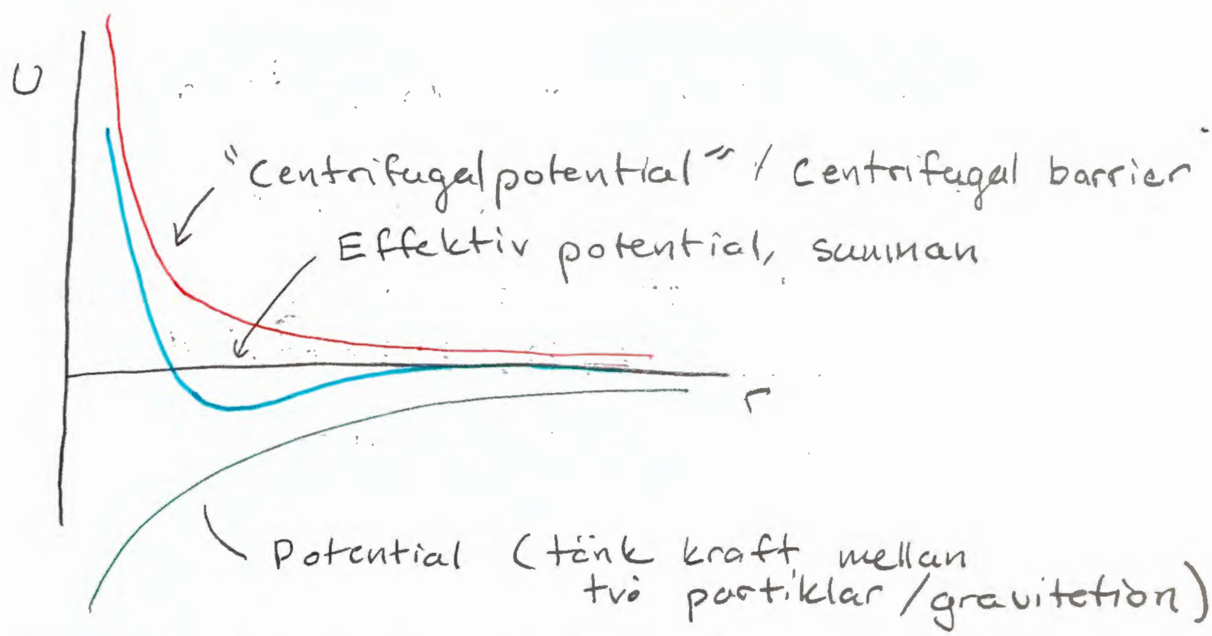
$$p_\phi = \text{RMM} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} = \frac{\ell}{mr^2}$$

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow m\ddot{r} = F_r + \frac{m r \ell^2}{m^2 r^4}$$

$$\boxed{m\ddot{r} = F_r + \frac{\ell^2}{mr^3}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial r} U_{eff}(r)$$

kallas effektiv potential



Partikeln lägger sig i groppen och oscillerar kring denna.

Koriolis- och centrifugalkraft m.h.a. Lagrangianen

Partikel har läge $\vec{r}$ i roterande system.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\vec{r}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\vec{r})^2$$

betyder tre ekv.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial r_1}, \frac{\partial f}{\partial r_2}, \frac{\partial f}{\partial r_3}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{A}\cdot\vec{r}}{\partial \vec{r}} = \vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}m(\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\vec{r}) = \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\vec{r})^2$$

$$\cancel{m}\ddot{\vec{r}} + \cancel{m}\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} = \cancel{m}(\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{\Omega}\times\vec{r}) =$$

faller bara på rött $\vec{r}$

$$= \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\cancel{m}(\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r}))$$

cyklisk permutation av skalär trippelprodukt

$$\ddot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial \vec{r}}}(\cancel{\vec{r}}\cdot[(\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\vec{r})\times\vec{\Omega}]) =$$

$$\ddot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} = (\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\vec{r})\times\vec{\Omega} =$$

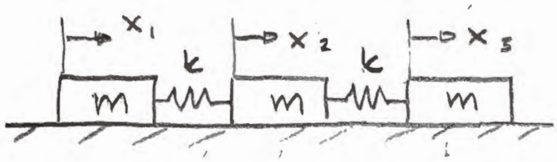
$$\ddot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\times\vec{\Omega} + (\vec{\Omega}\times\vec{r})\times\vec{\Omega}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = 0}$$

↑ Koriolis ↑ Centrifugal

Mekanik 200519

Exempel 3 massor



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2} k \left((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right) =$$

skriv om kvadratisk form med matris

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}_i M_{ij} \dot{x}_j - \frac{1}{2} x_i V_{ij} x_j$$

där $M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$ och $V = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} M_i \dot{x}_j = - V_{ij} x_j \iff \underline{M_{ij} \ddot{x}_j = - V_{ij} x_j}$$

$\Rightarrow \boxed{x_j = a_j e^{i\omega t}}$ (söker bara synkroniserad rörelse, egentligen superposition)

$$\Rightarrow (-M_{ij} \omega^2) a_j = - V_{ij} a_j$$

Matrisekvation med a_j som obekant.

Har lösning om $\det(-M\omega^2 + V) = 0$

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi gissar egen"moder" (vektorer)

$a_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ sätt in, ger $k = m\omega^2$

II:

$$a_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{ger} \quad \omega = 0 \quad \text{(intuitivt)}$$

III

(masscentrum konstant)

$$a_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \quad \text{ger} \quad m\omega^2 = 3k$$

Vi har gissat fram tre lösningar! Det är alla moder eftersom $M\omega^2 - V$ är 3×3-matris.

Allmän lösning superposition:

$$z(t) = \frac{A}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}(B + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speciallösning då } \omega=0}}{Ct}) + \frac{D}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}t}$$

$A, D \in \mathbb{C}$, $B, C \in \mathbb{R}$ => 6 frihetsgrader. OK!

(Om vi hade tagit ± lösningar skulle $z(t)$ kunna vara reell. Nu "fuskar" vi och tar $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ (blir samma))

<u>Intuition för speciallösning:</u>

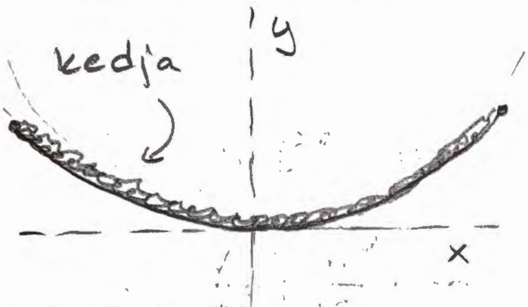
$a_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ => alla klossar rör sig tillsammans

=> Alla klossars läge har konstant fart v

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}(vt + x_0)$$

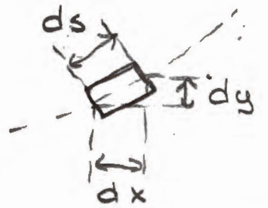
(TIPS: Denna lösning kan man gissa även om $m_1 \neq m_2 \neq m_3$ & $k_1 \neq k_2$)

Matematiskt problem från variationsanalys



Vilken form för den hängande kedjan?

En "länk":



Kedjans energi:

$$S = \int_0^L \rho g y(x)\, ds =$$

Parametrisera kedjan m.a.p. x $\longrightarrow$ $$= \int_0^L \rho g y \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$= \int_0^L \rho g y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \quad \leftarrow \text{Låt } \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

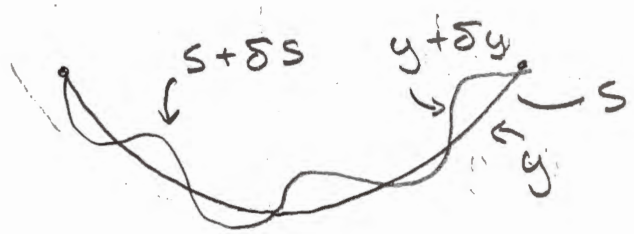
$$= \int_0^L \rho g y \sqrt{1 + \dot{y}}\, dx = \rho g \int_0^L W(y, \dot{y})\, dx$$

Vi vill minimera kedjans energi S.

$$\delta S = \rho g \int W\left(y + \delta y, \frac{d}{dx}(y + \delta y)\right) - W(y, \dot{y})\, dx =$$

$$= \rho g \int \left(W(y + \delta y, \dot{y} + (\delta \dot{y})) - W(y, \dot{y})\right) dx$$

Vi vill finna y(x) så att all avvikelse från y(x) ger större S, d.v.s. positiv δS.



$$\delta S = \rho g \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial y} \delta y + \frac{\partial W}{\partial \dot y} (\delta \dot y) \right) dx =$$

$$= \rho g \int_0^L \left(\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) \delta y + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot y} (\delta y) \right) - \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot y} \right) \right) dx =$$

$$= \rho g \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial W}{\partial \dot y} \right) \delta y + \rho g \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot y} \delta y \right) dx$$

Om S är minimal är $\delta S = 0$ för alla δy:

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial W}{\partial \dot y} \right) = 0$$

Andra termen blir $\left. \frac{\partial W}{\partial \dot y} \cdot \delta y \right|_0^L$

Randvillkor: $\delta y = 0$ vid upphängningspunkterna

$\Rightarrow$ Andra termen $= 0$

Lösningen till problemet blir alltså

$$S = \rho g \int_0^L y \sqrt{1 + \dot y^2}\, dx = \rho g \int_0^L W(y, \dot y)\, dx$$

minimeras då $\frac{\delta W}{\delta y} = \underline{\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial W}{\partial \dot y} = 0}$

Detta är Euler-Lagrange ekvationen

då $\mathcal{L} = W$ och $x = t$

$$\boxed{S = -\int_0^T \mathcal{L}(q, \dot q)\, dt \quad \text{kallas VERKAN}}$$

principen att verkan minimeras (eller maximeras)

ger kravet $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$, en diff. ekv

som beskriver $q(t)$.

Konventionell härledning

$$S = -\int_0^T \mathcal{L}(q,\dot{q})\,dt$$

$$\delta S = -\int_0^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{(\partial \dot{q})}(\delta \dot{q}) =$$

$$= \int_0^T \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)\delta q - \cancel{\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q \right)}^{\,0} =$$

$$\Rightarrow \frac{\delta S}{\delta q} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

Viktigt : Härledning svårt, användande lätt.
Behöver bara kunna använda.

Verkansprincip och bevarande av rörelsemängd är grunderna för mekaniken.
Newtons lagar användbara (?) men cirkulära.

Mekanik 200520

Mer om analytisk mekanik

Vad har hänt med energibegreppet?

$$E = K.E. + P.E = T + V$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\Rightarrow E = 2T - \mathcal{L}$$

Exempel

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \dot{x} m \dot{x} - \mathcal{L} = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L}$$

$$V = 0 \Rightarrow \boxed{E = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L}}$$ Är E bevarad?

$$\frac{dE}{dt} = \cancel{\ddot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}} + \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\dot{x} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\ddot{x}} =$$

$$= \dot{x}\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)}_{=0 \text{ enligt minsta verkan principen}} = 0$$

Så energi bevaras för ett system som uppfyller Lagrangeekvationerna.

$$E := \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \mathcal{L}(\dot{q}_\alpha, q_\alpha)$$ för generellt system.

Lagrangeekvationer uppfylls $\Rightarrow \dot{E} = 0$.

Definiera nya variabler!

- $p := \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p,q) := \dot{q}p - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q,p))$ ← Hamiltonianen

Detta är grunden för Hamiltoniansk mekanik.

Hamiltonianen:

$$H(p,q) = \dot{q}p - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q,p))$$

$$dH(p,q) = (d\dot{q})p + \dot{q}(dp) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(dq) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(d\dot{q}) =$$

$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$

Euler-Lagrange

$$= \dot{q}\,dp - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) dq =$$

$$= \dot{q}\,dp - \dot{p}\,dq$$ ← ser ut som kedjeregel

Bör därför gälla att

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}}$$ ← Hamiltons ekvationer

q = koordinat $\qquad$ p = momentum ← "Generaliserad rörelsemängd"

Exempel

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}_i M_{ij} \dot{q}_j - V(q)$$

$$\Rightarrow p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = M_{ij}\dot{q}_j$$ ← generaliserad massa

kolonn-vektor med p_i →

$$\vec{p} = M\dot{\vec{q}} \Rightarrow \dot{\vec{q}} = M^{-1}\vec{p} \quad (\text{om } \exists M^{-1})$$

$$H(p,q) = \underbrace{\dot{\vec{q}}(p) M \dot{\vec{q}}(p)}_{2T} + \underbrace{V(q) - \frac{1}{2}\dot{\vec{q}} M \dot{\vec{q}}}_{-\mathcal{L}} =$$

M symmetrisk →

$$= \frac{1}{2}(M^{-1}\vec{p}) M (M^{-1}\vec{p}) + V(q) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{p} M^{-1}\vec{p} + V(q)$$

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = M^{-1}\vec{p} \qquad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{q}} = \vec{F}$$

Dubbelt så många variabler som lagrangeekvationer.

Bara första ordnings ekvationer.

Exempel

En variabel q

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = M^{-1} p \,, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = \vec F$$

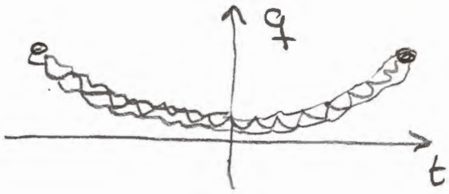
$$\Downarrow$$

$$M\ddot q = \dot p = \vec F$$ ← Newtons andra lag!

Hamiltonsekvationer kan ersätta Lagrange-ekvationerna (via variabelbyte)

Lagrange ofta lättare att räkna på men hamiltonian mer användbar teoretiskt.

Exempel: Hängande kedja



$q(t)$ ska minimera energin

$\mathcal{L} = q\sqrt{1+\dot q^2}$ (sedan tidigare)

Lösning med Hamiltonsekvation

ev. fel teck
fel i förel.

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \frac{q\dot q}{\sqrt{1+\dot q^2}} \iff \dot q = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$H(p,q) := p\dot q - \mathcal{L} = \ldots = -\sqrt{q^2-p^2} = -E \text{ (specialfall)}$$

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}} \qquad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

Vi vet att E är konstant

$$\Rightarrow \dot q = \frac{p}{E}, \quad \dot p = \frac{q}{E}$$

$$\Rightarrow \ddot q = \frac{\dot p}{E} = E^{-2} = q$$ ← Diffekv.

→

$\longrightarrow$

$$\underline{\underline{E^2 \ddot{q} = q}}$$

Ser ut som oscillator med reell frekvens

$$\Rightarrow q(t) = \hat{A} e^{t/E} + \hat{B} e^{-t/E} =$$
$$= A \cosh(t/E) + B \sinh(t/E)$$

Om vi har lägsta punkten vid $t = 0$

$$\dot{q}(0) = 0$$

$$\Rightarrow q(t) = \underline{\underline{A \cosh(t/E)}}$$

Två obestämda konstanter, A, E.

Bestäms av läget för kedjans ändpunkter.

$\mathcal{L}(q$

Mekanik 200525 (delvis förra sidan)

Hamiltonsekvationer och Poisson brackets

$\mathcal{L}(q,\dot{q})$: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \Rightarrow \dot{q}(p,q)$ Räkna fram

$H(p,q) := p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q}(p,q))$

$\Rightarrow$ Hamiltonsekvationer

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \qquad \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha}$$

Ersätter Euler-Lagrange

Poisson Brackets

Fin notation för Hamiltons

Låt $A(p,q)$ & $B(p,q)$ vara godt variabler

Ex. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ där $\vec{p}$ RM & $\vec{r}$ koordinat

Def: $$[A,B] = \frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}$$ summaindex

kallas Poisson Bracket

Ex: $$[q_\alpha, p_\beta] = \sum_\gamma \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_\gamma} - \cancel{\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\gamma}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_\gamma}}^{\,0}$$

$$= \sum_\gamma \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}$$

Detta är grundläggande PB-relation.

Ex. $$[q_\alpha, H] = \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta} - \cancel{\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta}}^{\,0}\frac{\partial H}{\partial q_\beta} =$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha$$

P.S.S. $[p_\alpha, H] = \dot{p}_\alpha$

Antag att A beror av p, q & t

$$[A, H] = \frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \leftarrow$$ tidigare härledning

$$= \dot{q}_\alpha \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} - \dot{p}_\alpha \frac{\partial A}{\partial p_\alpha} = \leftarrow$$ produktregeln

$$= \frac{dA}{dt} - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}}$$

Vad som gör Poisson brackets coola

Omformulering av mekaniken:

$H(p,q) \Rightarrow$ definition av $[A, B]$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$[q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$$

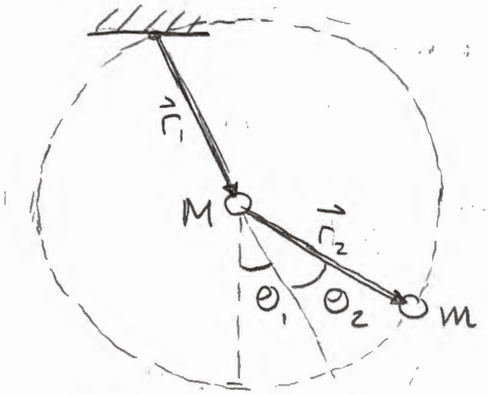
OBS! Slipper partialderivata. Algebraiskt smidigt.

Kvantmekaniken erhölles genom en enda ersättning:

$$[q_\alpha, p_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$$

Grundläggande strukturer samma i klassisk- och kvantmekanik.

Dubbelpendeln



$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_2 + m \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2$$

$$\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 R^2$$

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = R \qquad \dot{\vec{r}}_1^{\,2} = \dot{\theta}_1^2 R^2$$

$$T = \frac{1}{2}(m+M)\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_2 + m \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m+M) R^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) R^2 + m \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos\theta_2 R^2$$

Notera att θ_1 ej förekommer $\Rightarrow$ bevarad storhet!
(Om vi inte blandar in gravitation)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \text{konstant} \qquad (\text{ty } \mathcal{L} = T \text{ just nu})$$

om vi börjar i vila

$$(m+M) R^2 \dot{\theta}_1 + m(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) R^2 + m \cos\theta R^2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) = 0$$

$$(M + 2m + 2m\cos\theta_2)\dot{\theta}_1 + m(1 + \cos\theta_2)\dot{\theta}_2 = 0$$

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{-(1+\cos\theta_2)m}{(M+2m+2m\cos\theta_2)} = \frac{d\theta_1}{d\theta_2}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_1 = -\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta_2)m}{(M+2m(1+\cos\theta_2))} \, d\theta_2$$

Vinkeln θ_1 gör då θ_2 gör ett varv

Detta löser "kantkryporen" om M ersätts av 2M.

Inför nu gravitation:

$$\mathcal{L} = T - V = T + g(M+m)R\cos\theta_1 + gmR\cos(\theta_1+\theta_2)$$

Blir rörigt, approximerar direkt för små vinklar.

Utveckla $\mathcal{L}$ till andra ordning i $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1$ & $\dot{\theta}_2$
samt ersätt $\varphi = \theta_1 + \theta_2$, $\theta_1 = \theta$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}R^2 m\dot{\varphi} + mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi} +$$
$$+ g(m+M)R\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right) + g(m)R\left(1-\frac{1}{2}\varphi^2\right) =$$

Strunta i konstant

$$= \frac{1}{2}[\dot{\theta}\ \dot{\varphi}]\begin{bmatrix} M+m & m \\ m & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} - \frac{1}{2}[\theta\ \varphi]\begin{bmatrix} \frac{(M+m)g}{R} & 0 \\ 0 & \frac{mg}{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta \\ \varphi\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}[\dot{\theta}\ \dot{\varphi}]\mathcal{M}\begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} - \frac{1}{2}[\theta\ \varphi]\mathcal{V}\begin{bmatrix}\theta \\ \varphi\end{bmatrix}$$

[Kar-ekv] $\det(\mathcal{V} - \mathcal{M}\omega^2) = 0$

(skala om OK)
$$\begin{vmatrix} \frac{g}{R} - \omega^2 & -\frac{m}{M+m}\omega^2 \\ -\frac{m}{M+m}\omega^2 & \frac{g}{R} - \omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{m}{M+m}\omega^2\right)^2$$

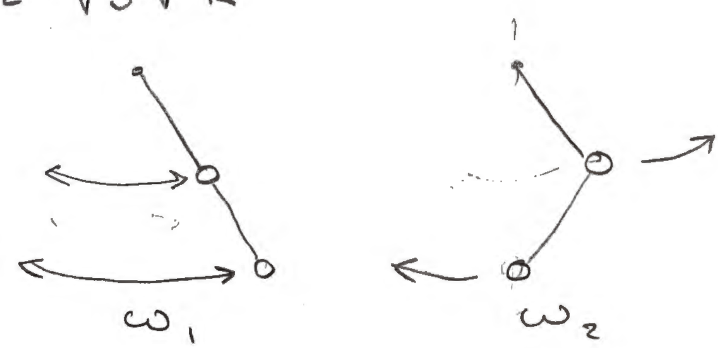
ω^2 ej bara på diagonal $\Rightarrow$ egenvektorer ej ortogonala

$$\gamma^2 = \frac{m}{M+m} \quad \text{ger} \quad \omega^2 = \frac{g}{R}\cdot\frac{1}{1\pm\gamma}$$

$$m = M \quad \text{ger} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}\left(\frac{1}{1\pm 1/2}\right)^{1/2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Normalmoder:



$$E(q, \dot{q}) := \dot{q}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}(q, \dot{q})$$ ← ska kunna ta fram

Vi kan inte alltid skriva $E = T + V$

Med hjälp av detta samband kan vi använda att energin bevaras ändå.

Om vi definierar $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ kan vi med lite tur lösa ut $\dot{q}(p, q)$. I så fall kan vi använda <u>Hamiltonianen</u>

obs

$$H(p, q) = p\dot{q}(p, q) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(p, q))$$

Som har den användbara egenskapen

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

Hamiltonianen och Energin är numeriskt samma sak men används på olika sätt

Mekanik 200526

Sammanfattning av det viktigaste från kursen.

Vektorer

$a \cdot b = |a||b| \cos\theta$

$|a \times b| = |a||b| \sin\theta$

$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A)$

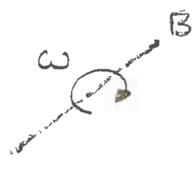
Roterande koordinat

2D: $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta} r)\vec{e}_\theta$

3D: $\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{A}$

$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$



Rörelsemängdsmoment

$\vec{H}_o = \vec{R}_{cm} \times \vec{G} + \vec{H}_{cm}$

Analogier:

					Energi	Effekt
Linjär rörelse:	$\vec{v}$	m	$\vec{G}$	$\vec{F}$	$\frac{1}{2}\vec{v}M\vec{v}$	$\vec{F} \cdot \vec{v}$
Rotation:	$\vec{\omega}$	I	$\vec{H}$	$\vec{M}$	$\frac{1}{2}\vec{\omega}I\vec{\omega}$	$\vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Tröghetsmoment

$I_{ij} = \int (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j)\, dm \implies \vec{H} = I\vec{\omega}$

Förstå varför $I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$ för plan kropp i xy-planet

Steiners sats

Precession och Eulers ekvationer

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} I \vec{\omega} + \vec{\Omega} \times \vec{H}$$

Förstå: Vikten av konstant I

skillnad mellan $\vec{\omega}$ och $\vec{\Omega}$.

Vid precession är $\vec{H}$ & $\vec{G}$ bevarade

men $\vec{\omega}$ ändras i tiden.

Oscillationer

$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$ ← isolerat

löses genom $x = ae^{i\omega t}$

ger $-m\omega^2 + i\gamma\omega + k = 0$

kritisk dämpning ⇒ ω är degenererat

Resonansfrekvensen är ω_0 då man sätter $\gamma = 0$

$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = Ae^{i\Omega t}$ ← Drivet

löses genom $x = ae^{i\Omega t}$ $\quad A, a \in \mathbb{C}$

Resonans om $\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Harmonisk rörelse ⇔ $\ddot{x} \propto -x$

Förstå samband mellan rötter till

kar. ekv. och dämpningsfall.

Oscillationer för partikelsystem

Ställ upp rörelseekvation, lättast

med Euler-Lagrange ekvationer

Gissa/beräkna normalmoder och egenfrekvenser

Glöm inte $\omega_+ = \omega_-$ ger degenererade egenvärden

Analytisk Mekanik

$$\mathcal{L} = T - V = \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$ => Analysera med oscillation

Förstå samband mellan $\mathcal{L}$ och "principle of least action"

Ta fram energin m.h.a.

$$E = \dot{q}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}$$

Förstå Hamiltonsekvationer