

Lösningsskiss: Tentamen – Miljöfysik (TIF076)

Tid och plats:	3 juni 2025, Johanneberg.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, A4-blad med egna anteckningar (kan vara datorskriven), Tabell&Formelsamling i Miljöfysik (bifogas)
Examinator:	Tünde Fülöp (031-772 3180).
Jourhavande lärare:	Emil Raaholt Ingelsten (076-846 88 96).
Granskning:	23 juni 2025 kl 13-14, Signes (utanför PJ).

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. *En enkel energibalansmodell för tidsutveckling av klimatsystem under strålningsdrivning kan skrivas som*

$$C \frac{dT'}{dt} + \alpha T' = F(t), \quad (1)$$

där T' är avvikelserna av den globala temperaturen från sitt stationära värde T_{ss} , α är klimatåterkopplingsparametern, C är klimatsystemets värmekapacitet per enhetsarea och $F(t)$ är strålningsdrivningen som associeras med en liten ändring av koncentrationen av en växthusgas från dess stationära värde. C/α har dimensionen tid och brukar betecknas med τ och kallas återkopplingssvarstiden.

- (a) *Antag att strålningsdrivningen ökar linjärt för $t > 0$, så att $F(t) = 0$ för $t \leq 0$, och $F = \gamma t$ för $t > 0$, där γ är konstant (som beror på strålningsdrivningen). Vad är lösningen av energibalansmodellen (ekv 1)?
(5 poäng)*

En lösning kan fås med hjälp av integrerande faktor. Inför beteckningen $\tau = C/\alpha$. Dela ekv 1 med C och multiplicera med integrerande faktor $\exp\{t/\tau\}$ och få

$$\frac{d}{dt}(T' e^{t/\tau}) = \frac{F(t)}{C} e^{t/\tau}.$$

Anta $T' = 0$ vid $t = 0$ och integrera ekvationen för att få lösningen

$$T'(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{C} \int_0^t F(u) e^{u/\tau} du.$$

Sätt nu in att $F(u) = \gamma u$ och utför integralen. Lösningen är

$$T'(t) = \frac{\gamma\tau}{\alpha} \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-t/\tau} \right),$$

för $t > 0$.

- (b) Koldioxid-drivningen fungerar ungefär som vi antagit i uppgift (a), eftersom koldioxidhalten ökar exponentiellt med tiden men strålningsdrivningen går som logaritmen av koldioxidhalten. Beräkna strålningsdrivningen $F_{2\times\text{CO}_2}$ som resulterar av en dubblering av koldioxid-halten. Antag en ökning av koldioxidhalt av 0,5% per år, och beräkna konstanten γ i uppgift (a).

(1 poäng)

Lösning: _____

$$F_{2\times\text{CO}_2} = 5,3 \ln 2 = 3,7 \text{ W/m}^2$$

$$\gamma = 5,3 \times \ln(1,005) = 2,6 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2/\text{år}.$$

- (c) Om ökningen fortsätter i den här takten, hur många år skulle det ta innan koncentrationen dubblas, och hur lång tid tar det att öka från 385 ppm till 550 ppm?

(1 poäng)

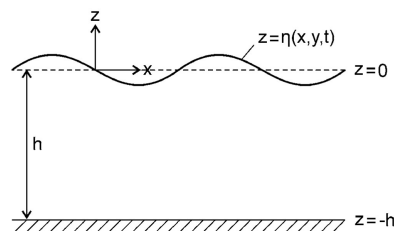
Lösning: _____

Dubblering: använd $(1 + r)^t = 2$, där $r = 0,005$ och t är antal år.
 $t = \ln 2 / \ln 1,005 = 139$ år. Ökning från 385 ppm till 550 ppm 71,3 år.

2. (a) Utgående från uttrycken för hastighetspotentialen ϕ (där hastigheten $\mathbf{v} = \nabla\phi$) och ytkoordinaten η i den bifogade tabell & formelsamlingen, härled formeln för effekt per längdenhet för en våg med höjden H från (våg)topp till (våg)dal, våglängden λ och hastighet v :

$$P \simeq \frac{1}{8} \rho g H^2 v,$$

där ρ är vattendensiteten och g är tyngdaccelerationen.



¹I uppgiften fanns också följande ledning: En av integralerna som behöver utföras är

$$\int_0^{-h} \int_0^\lambda (\cosh(2kz) + \cos[2(kx - \omega t)])^2 dx dz = \frac{\lambda h}{2}.$$

Integralen förekommer tyvärr inte i lösningen. Vi har tagit hänsyn till förvirringen detta kan ha orsakat under rättningen.

(10 poäng)

Lösning:

 Den potentiella energin per enhetsarea av havsytan är

$$E_p = \frac{1}{S} \int g \frac{\eta}{2} \rho \eta dS$$

där S är ytarean. Man kan identifiera den vanliga formeln för potentiell energi, $E_p = mgh$ där $\rho \eta dS$ är massan och $\eta/2$ är avståndet från masscentrum till $z = 0$. Integrationen går i x, y -led, där y är parallell med vågkrönets riktning och x är vinkelrät (dvs i samma riktning som vågen rör sig). Vi tar en viss sträcka i y -led Δy och en våglängd λ i x -led, så att $S = \lambda \Delta y$:

$$E_p = \frac{g\rho}{2\lambda\Delta y} \int \eta^2 dS.$$

Vi sätter in $\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t)$ och vi får

$$E_p = \frac{g\rho\Delta y}{2\lambda\Delta y} \int_0^\lambda \frac{H^2}{4} \cos^2(kx - \omega t) dx = \frac{H^2}{16} \rho g \text{ J/m}^2.$$

För att få effekt per längdenhet får vi multiplicera med våghastigheten v så att

$$P_p \simeq \frac{1}{16} \rho g H^2 v.$$

För att räkna ut den kinetiska energin, får man sätta in hastigheten kvadrerad i definitionen

$$E_k = \frac{1}{S} \int \frac{1}{2} v^2 \rho dV,$$

och utföra integralen. Här är $S = \lambda \Delta y$ som förut och man får integrera både i x och z -led (inte bara i z -led som i fallet för vågor på djupa vatten; där gick x -beroendet bort när man kvadrerade hastigheten).

Den motsvarande kinetiska energi per tids- och längdenhet är

$$P_k = \frac{H^2}{16} \rho g v.$$

Så den totala effekten en våg bär med sig (per längdenhet) är

$$P_{allt} \simeq \frac{1}{8} \rho g H^2 v.$$

3. (a) *Finn våglängden på strålningen vars energi motsvarar bandgapet hos GaAs.*

(2 poäng)

Bandgapet hos GaAs är 1,40 eV. Energin hos en foton är $E = hf = h\frac{c}{\lambda}$. Våglängden är alltså

$$\lambda = h \cdot \frac{c}{E} = (4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}) \cdot \frac{299792458 \text{ m/s}}{1,40 \text{ eV}} = 886 \text{ nm}.$$

- (b) *Vilka är de tre huvudanledningarna till att det är just litiumjonbatterier som är den dominerande teknologin idag? (3 poäng)*

- Hög energitäthet. Litiumjonbatterier lagrar mycket energi per massa (Wh/kg) och volym (Wh/l) jämfört med andra batterityper (t.ex. bly- eller nickelbaserade batterier). Det gör dem idealiska för mobila tillämpningar som elbilar, mobiltelefoner och bärbara datorer.
- Lång livslängd och hög verkningsgrad. De tål många laddning-/urladdningscykler med relativt låg kapacitetsförlust. De har också hög verkningsgrad ($> 90\%$), vilket betyder lite energiförlust vid laddning och urladdning
- Snabb utveckling och sjunkande kostnad. Tack vare stora investeringar, särskilt från elbilsindustrin, har teknologin förbättrats snabbt och kostnaden per kWh har sjunkit drastiskt de senaste 10-15 åren. Samtidigt har säkerhet och prestanda förbättrats.

- (c) *Energibehovet för en fullvuxen person är cirka 2000 kcal per dygn. Detta är ett mått på människokroppens effekt. Beräkna den uttryckt i watt.*

(1 poäng)

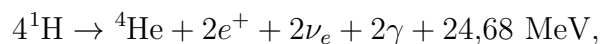
2000 kcal om dagen motsvarar cirka 97 watt.

- (d) *Jämför olika energikällor (kol, olja, vattenkraft, kärnkraft, sol och vind) med avseende på deras säkerhetsaspekter och växthusgasutsläpp, i stora drag. Skriv två (sammansatta) meningar per energikälla, varav en om växthusgasutsläpp (hög, medel eller låg, och varför) och en om säkerhet (hög, medel eller låg, och varför)*

(6 poäng)

- Kol
 - Växthusgasutsläpp mycket höga, bland de största utsläppen per producerad kWh.

- Säkerhet låg, många dödsfall kopplade till gruvdrift, luftföroreningar.
 - Olja
 - Växthusgasutsläpp höga, näst efter kol.
 - Säkerhet medel, olyckor vid borrning, transport (t.ex. oljeutsläpp), brandrisk och luftföroreningar.
 - Vattenkraft
 - Växthusgasutsläpp mycket låg, inga utsläpp i drift, men viss metanbildning från förmultning i dammar.
 - Säkerhet generellt hög, men kan orsaka stora katastrofer vid dammbrott, och har viss ekologisk påverkan på floder och fisksystem.
 - Kärnkraft
 - Växthusgasutsläpp mycket låg, jämförbart med sol och vind sett hela livscykeln.
 - Tekniskt säker, men kan ha allvarliga konsekvenser vid olycka, och avfallshantering kräver långsiktig lagring.
 - Solenergi
 - Växthusgasutsläpp mycket låg, främst vid tillverkning av paneler.
 - Säkerhet hög, inga direkta risker i drift, men olyckor kan hända vid installation (t.ex. installatör trillar ner från taket).
 - Vindkraft
 - Växthusgasutsläpp mycket låg, livscykelutsläpp är bland de lägsta.
 - Säkerhet hög, få olyckor. Kan påverka lokal miljö (ljud, fågelliv), men mycket liten risk för människor.
4. (a) *Antag att solen skapades för 4,6 miljarder år sedan innehållandes $9 \cdot 10^{56}$ väteatomer. Därefter har den strålat ut en detekterbar effekt på $3,87 \cdot 10^{26}$ W från fusion genom proton-protonkedjan,*



där varje neutrino bär med sig 0,26 MeV ut i rymden som inte går att detektera och de två positronerna kommer att annihilera elektroner i plasmat och frigöra ytterligare 1,02 MeV vardera. Hur länge till räcker då solens väte (givet att protonfusionen fortgår

med samma effekt)?

(6 poäng)

Lösning: _____

Energien per vätekärna är därför

$$\frac{1}{4}(24,68 + 2 \cdot 1,02 - 2 \cdot 0,26) \text{ MeV} = 6,55 \text{ MeV}.$$

Om solen har strålat ut energin $(4,6 \cdot 10^9 \text{ år}) \cdot (3,87 \cdot 10^{26} \text{ W}) = 5,6 \cdot 10^{43} \text{ J}$ har

$$\frac{5,6 \cdot 10^{43} \text{ J}}{6,55 \text{ MeV}} = 5,34 \cdot 10^{55}$$

protoner gått åt. Detta är $5,34 \cdot 10^{55} / 9 \cdot 10^{56} = 5,9 \%$ av de protoner som från början fanns i solen och det som är kvar hade kunnat räcka i ytterligare $\frac{1-0,059}{0,059} \cdot 4,6 = 73$ miljarder år.

- (b) Vad är den optimala kvoten mellan mängderna deuterium och tritium i DT-bränsle? Motivera ditt svar.

(3 poäng)

Lösning: _____

Fusionseffekttätheten är proportionell mot $n_D n_T$. I plasmor råder laddningsneutralitet, så det totala antalet elektroner n_e är lika med summan av alla positiva laddningar $n_D + n_T = n_e$ (antag att antalet alfa-partiklar är försumbar). Om man definierar k som andelen deuterium, kan vi skriva $n_D = k n_e$ och $n_T = (1 - k) n_e$, vilket ger

$$n_D \cdot n_T = k(1 - k)n_e^2.$$

Produkten är maximal då $k = 1/2$, så den optimala blandningen är 50% deuterium och 50% tritium.

- (c) Beskriv principen för hur tokamaker och stellaratorer innesluter ett fusionsplasma. På vilket sätt skiljer de sig åt? Ge exempel på storskaliga tokamak- och stellaratorexperiment som finns i drift eller är under uppbyggnad.

(4 poäng)

Lösning: _____

Både tokamaken och stellaratorn är torusformade magnetiska inneslutningsanordningar där plasmat hålls instängt med hjälp av starka skruvade magnetfält.

Tokamaken är axisymmetriskt, och har ett mycket kraftigt toroidalt fält och ett poloidalfält som alstras av en ström i plasmat. Plasmaströmmen drivs oftast med transformatorprincipen, vilket

kräver en variation av strömkällan, så man har en pulsad drift. Exempel är JET (1982-2023, europeiskt samarbetsprojekt beläget i England), ITER Frankrike (under uppbyggnad, internationellt samarbete; världens största fusionsprojekt)

Stellaratorernas magnetfält bestäms helt av strömmar i yttre spolar, och det är konfigurationer som inte är axialsymmetriska. Det största experimentet av detta slag är Wendelstein 7-X, som finns på Max-Planck-institutet för plasmafysik i Greifswald, Tyskland.

5. *En liten del av vätet i en kärnreaktors kylvatten absorberar två neutroner och omvandlas till tritium ^3H . Tritium är radioaktivt, och sönderfaller (med en halveringstid $t_{1/2} = 12,3$ år) till ^3He genom att sända ut en elektron med en medelenergi på $5,7$ keV. Antag att ett läckage vid ett kärnkraftverk resulterar i utsläpp av tritium i dricksvattnet med koncentrationen $1,2 \times 10^{-10}$ gram tritium per liter vatten. Antag att Ines dricker det här vattnet hela sitt liv. För enkelhets skull antag att hälften av vattnet i Ines kropp kommer från det förorenade vattnet (resten från mat och andra rena källor), och att 70% av Ines kropp består av vatten. Antag också att den utsända elektronens hela energi absorberas i kroppen.*

- (a) *Hur många tritiumkärnor finns per liter förorenat dricksvatten?*
- (b) *Vad är aktiviteten hos det förorenade vattnet (Bq/liter)?*
- (c) *Vad blir den årliga absorberade dosen i Ines kropp?*
- (d) *Ungefär hur mycket strålning (effektiv dos) får Ines i Sv/år?*

(10 poäng)

*Lösning:*_____

Eftersom hälften av vattnet i Ines kropp kommer från det förorenade vattnet, och 70% av hennes kropp består av vatten, har hon 0,35 liter tritiumförorenat vatten per kg i kroppen.

- (a) Hur många tritiumkärnor finns per liter förorenat dricksvatten?
Atommassan för tritium är 3. Det innebär att $1,2 \times 10^{-10}$ gram tritium motsvarar

$$N = 1,2 \times 10^{-10} \text{ g/liter} / (3 \text{ g/mol}) (6,0 \times 10^{23} \text{ tritiumkärnor/mol}) \\ \simeq 24 \times 10^{12} \text{ tritiumkärnor/liter}$$

- (b) Vad är aktiviteten hos det förorenade vattnet (Bq/liter)?

Radioaktiv sönderfall uppfyller lagen

$$N = N_0 e^{-t/\tau}.$$

Eftersom halveringstiden är $t_{1/2} = 12,3$ år, vi får att $\tau = t_{1/2} / \ln 2 \simeq 5,6 \times 10^8$ s.

Aktiviteten är

$$A = -\frac{dN}{dt} = \frac{N}{\tau} = (24 \times 10^{12} / \text{liter}) / (5,6 \times 10^8) \simeq 42000 \text{ Bq/liter}$$

(c) Vad blir den årliga absorberade dosen i Ines kropp?

Om vi har 42000 Bq/liter och 0,35 liter/kg, absorberad dos blir

$$D = (0,35 \text{ liter/kg})(5,7 \text{ keV/Bq s})(1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}(42000 \text{ Bq/liter})) \\ \simeq 1,3 \times 10^{-11} \text{ J/kg s} = 1,3 \times 10^{-11} \text{ Gy/s}$$

Den årliga absorberade dosen är

$$D = (1,3 \times 10^{-11} \text{ Gy/s})(3,2 \times 10^7 \text{ s/år}) \simeq 4,2 \times 10^{-4} \text{ Gy/år}.$$

(d) Ungefär hur mycket strålning (effektiv dos) får Ines i Sv/år?

Eftersom vikt faktorn för elektroner är 1, och om man antar att alla vävnader utsatta lika mycket, blir den effektiva dosen 0,42 mSv/år, som är betydligt mindre än bakgrundsstrålningen i Sverige. (Notera att om alla vävnader är exponerade lika mycket så är effektiv dos lika med ekvivalent dos.)

6. Betrakta en punktkälla som kontinuerligt emitterar en förorening med emissionstakt q [kg/s], så att det under ett tidsintervall dt' emitteras qdt' [kg]. Antag att koncentrationen $C = M/V$ av föroreningen, där M är massan och V är volymen, kan bestämmas genom att lösa diffusionsekvationen

$$\frac{dC}{dt} = D \nabla^2 C$$

med en konstant diffusionskoefficient D . Skriv upp ett uttryck för C som funktion av avståndet från punktkällan r och tid t .

(8 poäng)

Lösning: _____

Lösningen på diffusionsekvationen för en punktkälla är

$$C(r, t) = \frac{Q}{(\sigma \sqrt{2\pi})^3} e^{-r^2/(2\sigma^2)}, \quad (2)$$

där r är avståndet till källan och $\sigma^2 = 2Dt$. Det kan verifieras genom att sätt in lösningen i ekvationen.

För en kontinuerligt emitterande punktkälla, vid en viss tidpunkt t och position r får vi $C(r, t)$ genom att integrera ekvation 2 (en så-kallad faltning)

$$C = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-r^2/[4D(t-t')]} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

som kan skrivas om som

$$C(r, t) = \frac{q}{4\pi Dr} \operatorname{erfc} \left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}} \right)$$

där erfc är den komplementära felfunktionen.