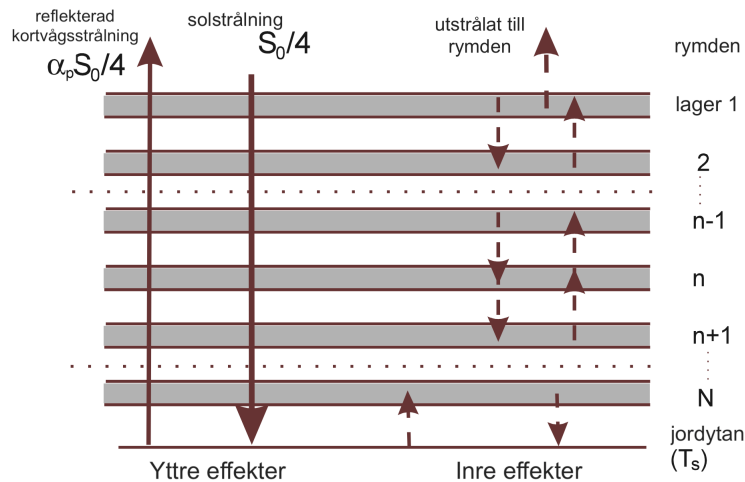


Lösningsskiss: Tentamen – Miljöfysik (TIF076)

Tid och plats: 11 oktober 2024, Johanneberg.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, A4-blad med egna anteckningar (kan vara datorskriven men det ska vara läsbart)
Examinator: Tünde Fülöp (031-772 3180).
Jourhavande lärare: Emil Raaholt Ingelsten (076-846 88 96).

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. *Betrakta en atmosfär som är fullständigt genomskinlig för kortvågig strålning (solstrålning) men absorberar det mesta av den infraröda strålningen (värme från jorden). Utgå ifrån att denna atmosfär kan ses som N stycken atmosfärsskikt som vart och ett fullständigt absorberar all infraröd strålning, så som visas i figuren nedan.*



- (a) Visa att ytttemperaturen är högre än temperaturen för nedersta atmosfärsskiktet, genom att undersöka strålningsjämvikten vid ytan.
- (b) Undersök nu strålningsjämvikten för n :te atmosfärsskiktet och visa att

$$2T_n^4 = T_{n+1}^4 + T_{n-1}^4,$$

där T_n är temperaturen för n :te atmosfärsskiktet, för $n > 1$. Använd detta för att visa att jämviktstemperaturen för jordytan är

$$T_s = (N + 1)^{1/4} T_e,$$

där T_e är planetens emittanstemperatur.

*(10 poäng)**Lösning:*

a) Utgå ifrån att allt är svartkroppar. Då strålar varje atmosfärsskikt σT_n^4 uppåt och nedåt (per enhetsarea). Emittansen från ytan är σT_s^4 . Nettostrålningen från solen, som absorberas först vid jordytan, är

$$\frac{1}{4}S_0(1 - \alpha_p) = \sigma T_e^4,$$

med T_e som jämviktstemperatur.

Eftersom den infraröda strålningen som jordytan nås av endast kommer från det N :te, sista atmosfärsskiktet kan jämvikten skrivas som

nettostrålning från solen + IR-strålning från skikt N = avgiven IR-strålning,

d.v.s.

$$\sigma T_e^4 + \sigma T_N^4 = \sigma T_s^4 \text{ eller} \\ T_s^4 = T_N^4 + T_e^4.$$

Så $T_s > T_N$, eftersom ytan värms upp av både solen och nedersta skiktet (om solen ej sken skulle $T_s = T_N$).

b) För $n > 1$ strålar skikt n värme både upp och ned som ger en emittans på $2 \cdot \sigma T_n^4$. Samma skikt träffas av strålning uppifrån, σT_{n-1}^4 (per enhetsarea), och nedifrån, σT_{n+1}^4 (om $n = N$ är skikt $N + 1$ jordytan). Jämvikt ger att

$$2T_n^4 = T_{n-1}^4 + T_{n+1}^4,$$

som kan skrivas om som

$$T_{n+1}^4 - T_n^4 = T_n^4 - T_{n-1}^4,$$

d.v.s. skillnaden i T^4 mellan varje skikt är konstant.

Det ska också råda jämvikt mellan jord och rymd. Strålningen till jorden är

$$\frac{1}{4}S_0(1 - \alpha_p) = \sigma T_e^4$$

och strålningen från jorden är σT_1^4 , så $T_e = T_1$. Skikt 1 avger (uppåt och nedåt) emittansen $2\sigma T_1^4$ och tar emot σT_2^4 från skikt 2, så

$$T_2^4 = 2T_1^4 = 2T_e^4.$$

Från detta kan vi sluta oss till att den konstanta skillnaden i T^4 är T_e^4 : $T_{n+1}^4 - T_n^4 = T_e^4$ och från detta att $T_n^4 = nT_e^4$, då $T_1^4 = T_e^4$. Med $n = N + 1$ fås nu yttemperaturen

$$T_s = (N + 1)^{1/4}T_e.$$

2. Antag att en skorsten kan modelleras som en kontinuerligt aktiv punktkälla som släpper ut ett jämnt och stadigt flöde av rök i en konstant vind vars hastighet U är densamma över tid och rum (om ingen spridning skedde skulle alltså ett smalt streck av rök föras bort med vinden från skorstenen). Hur är koncentrationen fördelad? Ge en approximation för hur fördelningen ser ut om du följer vindens riktning en lång sträcka.

(10 poäng)

Ledning:

$$\int_0^\infty \frac{dT}{T^{3/2}} \exp \left[-\frac{(a - vT)^2 + b^2}{T} \right] = \frac{\sqrt{\pi} \exp [2av - 2\sqrt{a^2 + b^2}|v|]}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Lösning:

Vi tänker oss först en instantan punktkälla av storlek Q som färdas med hastighet U , den har lösningen

$$C = \frac{Q}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \exp \left[-\frac{(x - Ut)^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2} \right],$$

där $\sigma^2 = 2Dt$.

Betrakta nu röken från skorstenen som en kontinuerlig punktkälla, d.v.s. en kontinuerlig sekvens av punktkällor som denna, med utsläppshastighet q (g/s). Genom att integrera ihop lösningarna för varje punktkälla fås att

$$C = \int_0^\infty \frac{qdt}{8(\pi Dt)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x - Ut)^2 + y^2 + z^2}{4Dt} \right].$$

Med variabelsubstitutionen $T = 4Dt$ är nu integralen

$$C = \int_0^\infty \frac{dT}{4D} \frac{q}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{1}{T^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x - T \cdot U/4D)^2 + y^2 + z^2}{T} \right]$$

och med ledningen från uppgiften ($a = x$, $v = U/4D$, $b^2 = y^2 + z^2$) inses att detta är

$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{4D\pi^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \exp [2x \cdot U/4D - 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot |U/4D|]}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi Dr} \exp \left[\frac{U}{2D}(x - r) \right], \end{aligned}$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

För stora x ($x^2 \gg y^2 + z^2$) gäller att

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \simeq x \left(1 + \frac{y^2 + z^2}{2x^2} \right)$$

och

$$x - r \simeq -\frac{y^2 + z^2}{2x}.$$

Om vi följer röken en lång sträcka i vindens riktning kan koncentrationen därför uttryckas som

$$C = \frac{q}{4\pi Dx} \exp \left(-\frac{U}{2D} \frac{y^2 + z^2}{2x} \right).$$

3. För konstant vindhastighet ger Betz lag att ett vindkraftverks effekt är

$$P(v) = \frac{3}{\pi} C_p \rho \pi R^2 v_m^3,$$

där $C_p = 0,2$ är kapacitetsfaktorn, $\rho = 1,2$ kg är luftens densitet, R är rotorradien och v_m är medelhastigheten. Man har tagit hänsyn till både vindhastighetens och vindriktningens variation.

- Räkna ut den totala energin som produceras per år av vindkraftverket, som funktion av R och v_m .
- Hur många vindkraftverk behövs för att ersätta ett 1 GW kolkraftverk? Antag typiska värden för R och v_m .
- Härled en formel för energi per areaenhet för $N \times M$ vindkraftverk, på avstånd $s = 10$ rotorradier ifrån varandra.
- Hur stor yta krävs för att ersätta ett 1 GW kraftverk? Antag att N och M är stora och medelvindhastigheten är 7 m/s.

(10 poäng)

Lösning: _____

- Vi multiplicerar medeleffekten med antal sekunder per år N_s och får

$$E_{\text{år}} = \frac{6}{\pi} P(v_m) N_s = \frac{6}{\pi} \frac{1}{2} C_p \rho \pi R^2 v_m^3 N_s.$$

Om vi tar luftens densitet 1,2 kg per kubikmeter, $C_p = 0,2$ och $N_s = 3,15 \times 10^7$ får vi $E_{\text{år}} = 22,7 R^2 v_m^3$ MJ.

- (b) Man placerar ut kraftverken så att vi har N åt ena hållet och M åt andra. Ytan som täcks är $(N - 1)s_2R \times (M - 1)s_2R$. Vi har NM totalt, så totala energi per år blir $22,7NM R^2 v_m^3$ MJ. Energi per enhetsarea är

$$E_{\text{år}} = \frac{22,7NM R^2 v_m^3}{(N - 1)s_2R(M - 1)s_2R} = \frac{0,227NM v_m^3}{(N - 1)(M - 1)}$$

där vi har satt i $s_2 = 10$. Notera att proportionaliteten mot turbinradien har försvunnit helt, eftersom antal kraftverk per enhetsarea är inverst proportionell mot R^2 . Kvar är beroendet på v_m^3 och indirekt på höjden.

- (c) Om N och M är stora får vi

$$E_{\text{år}} = \frac{22,7v_m^3}{s_2^2} = 0,2v_m^3 \text{ MJ/m}^2$$

Ett kraftverk med 1 GW producerar på ett år $365 \times 3600 \times 24 \times 10^9 = 3,15 \times 10^{16}$ J.

Ytan A vi behöver för ett 1 GW vindkraftverk kan uppskattas från

$$3,15 \cdot 10^{16} = E_{\text{år}} A$$

så vi får

$$A = \frac{3,15 \cdot 10^{16}}{0,2 \cdot 7^3 \cdot 10^6 \cdot 10^6} \text{ km}^2 \simeq 460 \text{ km}^2$$

4. (a) *Enerigapet mellan valens- och ledningsbandet i kisel är 1,1 eV. Vilken våglängd måste ljuset ha för att kunna lyfta en elektron över bandgapet?*
- (b) *Vilka anledningar finns till att ett kontinuerligt spektrum (som solens) inte ger hög elektrisk verkningsgrad?*
- (c) *Hur stor är den teoretiskt maximala effektiviteten av kiselceller (ungefär)?*
- (d) *Ge exempel på ett sätt att öka effektiviteten av solceller.*
- (e) *Vad är den typiska återbetalningstiden för kiselceller och vilka faktorer påverkar den?*

(10 poäng)

Lösning: _____

- (a) För att en foton ska kunna lyfta en elektron över bandgapet måste den ha minst 1,1 eV. Fotonens energi bestäms av dess frekvens $E = hf$, där h är Plancks konstant ($h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js). Uttryckt i våglängd har vi

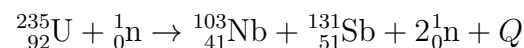
$$E = hc/\lambda$$

så vi får

$$\lambda = 1,1 \mu\text{m}$$

som motsvarar infrarött ljus i den långvågiga delen av solspektrat.

- (b) Dels kan fotoner med energi mindre än bandgapet inte utnyttjas, och dels kan inte överskottet utnyttjas för fotoner med större energi än bandgapet.
- (c) Kisel-solcellernas teoretiska maximala verkningsgrad är runt 30%.
- (d) Genom att kombinera olika material och tillverka tandemsolceller kan man utnyttja energin i solens spektrum effektivare. Tandemsolcellen är två eller flera celler med olika egenskaper på varandra. En halvgenomskinlig cell med stort bandgap får utnyttja fotoner med hög energi. De fotoner som har lägre energi passerar igenom till en cell med mindre bandgap, där dessa fotoners energi kan utnyttjas. Den här tekniken används ibland i kombination med tunnfilmsteknik.
- (e) Energy Payback Time (EPBT) för kisel-solceller är bara drygt ett år. Varje gång den sammanlagda produktionen dubblades sjönk EPBT med 12,8% under de senaste 24 åren. EPBT beror på solinstrålningen men också på elnätet.
5. (a) *Halten av ^{235}U i naturligt uran är $0,0072 \pm 0,00001$. Halveringstiderna är 7×10^8 år för ^{235}U och $4,5 \times 10^9$ år för ^{238}U . Hur mycket var halten av ^{235}U för 6×10^9 år sedan?*
- (b) *Beräkna energimängden Q i MeV som frigörs vid fission av ^{235}U enligt reaktionen*



där $\Delta m = 0,203939u$.

- (c) *Vad är medelenergin (ungefär) av neutroner efter klyvning av ^{235}U ? Hur stor andel av den totala energin ges till neutroner?*
- (d) *Vad händer med resten av energin?*

(10 poäng)

Lösning: _____

- (a) Låt $t = 0$ vara nuvarande tid, N_5 antalet ^{235}U -kärnor, N_8 antalet ^{238}U -kärnor och λ_5 och λ_8 motsvarande sönderfallskonstanter. Då är dagens halt

$$r(0) = \frac{N_5(0)}{N_5(0) + N_8(0)}$$

och med negativ tid t fås tidigare halter

$$r(t) = \frac{N_5(0)e^{-\lambda_5 t}}{N_5(0)e^{-\lambda_5 t} + N_8(0)e^{-\lambda_8 t}}.$$

För 6×10^9 år sedan var $r(t) = 0,5$.

- (b) 190 MeV
- (c) Neutronernas medelenergi är runt 2 MeV. Om vi räknar med att det produceras cirka 2,5 neutroner så får de totalt runt 5 MeV. Det innebär att neutronerna bär cirka 2,5% av den totala energin.
- (d) Resten av energin går till fissionsfragmentens kinetiska energi och strålning
- prompt (dvs direkt emitterad) gammastrålning (cirka 8 MeV)
 - betastrålning från de radioaktiva fissionsfragmenten (cirka 19 MeV)
 - gammastrålning från de radioaktiva fissionsfragmenten (cirka 7 MeV)

Ovanstående är endast uppskattningar, och det kan ändras beroende på vilka reaktioner som sker, uppemot 1-2 MeV. Av betastrålningen går endast 30-40% direkt till kinetisk energi hos betapartiklar, resten går till neutrinos.

6. *Effektbalansen (per volymsenhet) i en fusionsplasma (att tillförd och bortförd effekt är lika) är*

$$S_\alpha + S_h = S_B + S_L,$$

där S_α är fusionseffekt (från alfapartiklar), S_h är yttre värmeförsörjning, S_B är bromsstrålning och S_L värme som leds bort. Dessa ges av

$$S_\alpha = \frac{E_\alpha}{16} \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} p^2 = K_\alpha \frac{\langle \sigma v \rangle}{T_k^2} p^2 \text{ MW/m}^3.$$

$$S_B = \frac{C_B}{4} \frac{p^2}{T^{3/2}} = K_B \frac{p^2}{T_k^{3/2}} \text{ MW/m}^3.$$

$$S_L = \frac{3}{2} \frac{p}{\tau_E} = K_k \frac{p}{\tau_E} \text{ MW/m}^3.$$

med $K_\alpha = 1,37$, $K_B = 0,052$, $K_k = 0,15$ och T_k är i keV, τ_E är i s, $\langle\sigma v\rangle$ är i $10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$ och p är i 10^5 Pa .

- Vad menas med ideal och fullständig antändning?
- Härled villkoret för fullständig antändning, dvs det minsta värdet för $p\tau_E$.
- Utgå ifrån att alfapartiklarna inte står för all värmeeffekt, utan bara en viss del, så att

$$f_\alpha \equiv \frac{S_\alpha}{S_\alpha + S_h}.$$

Vad blir villkoret för antändning i det här fallet?

- Fysikförstärkningsfaktorn definieras som

$$Q = \frac{\text{nettovärmeeffekt ut}}{\text{värmeeffekt in}} = \frac{P_{ut} - P_{in}}{P_{in}}.$$

Skriv uteffekten P_{ut} och ineffekten P_{in} i termer av S_h , S_B , S_L , S_α och volymen V .

(10 poäng)

Lösning: _____

- För **ideal antändning** antas att yttre värmetillförsel och förluster från värmeledning är obefintliga: $S_\alpha = S_B$. Med **fullständig antändning** avses $S_\alpha = S_L + S_B$.
- Om $S_\alpha \geq S_L + S_B$ gäller det att

$$p\tau_E \geq \frac{K_k T_k^2}{K_\alpha \langle\sigma v\rangle - K_B T_k^{1/2}} \simeq K_I \frac{T_k^2}{\langle\sigma v\rangle} \text{ atm s}$$

där $K_I = K_k/K_\alpha = 0,11$.

- Den yttre värmetillförseln är

$$S_h = \frac{1 - f_\alpha}{f_\alpha} S_\alpha.$$

Effektbalans ger att

$$p\tau_E \geq \frac{K_k T_k^2}{(1/f_\alpha) K_\alpha \langle\sigma v\rangle - K_B T_k^{1/2}} \simeq f_\alpha K_I \frac{T_k^2}{\langle\sigma v\rangle} \text{ atm s}.$$

(d) Effekten in är $P_{\text{in}} = S_h V$ där V är plasmavolymen. Effekten från fusionsprocessen innehåller alla källor som lämnar plasmat. Det finns tre sådana källor:

- i. Neutronerna med energin 14,1 MeV som lämnar plasmat är huvudkällan till värme. (S_n)
- ii. Vi har också bromsstrålning som lämnar plasmat och når väggen. Den innersta väggen måste kylas för att inte smälta av detta. Värmen som bärs iväg av kylmedlet kan också värma vatten till ånga. (S_B)
- iii. Den tredje källan är värmeledning mellan plasmat och väggarna. Också här måste väggarna kylas och värmen förs över till kylmedlet. (S_L)

Det utgås ifrån att alfapartiklarna avger sin värme till plasmat innan de lämnar det. Därmed bidrar deras energi endast indirekt till värmen som lämnar fusionskammaren, genom att värma plasmat som därefter avger värmen genom strålning eller värmeledning. Uteffekten ges sålunda av

$$P_{\text{ut}} = (S_n + S_B + S_L)V,$$

där

$$S_n = (E_n/E_\alpha)S_\alpha = 4S_\alpha$$

är effekten som bärs av neutronerna.