

Lösningsskiss: Tentamen – Miljöfysik (TIF076)

Tid och plats:	20 augusti 2024, Johanneberg.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, A4-blad med egna anteckningar (kan vara datorskriven men det ska vara läsbart)
Examinator:	Tünde Fülöp (031-772 3180).
Jourhavande lärare:	Tünde Fülöp (031-772 3180).

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. (a) *Vad är solarkonstanten och hur stor är den (ungefär) vid jorden (inkl enhet)? (3 poäng)*

Lösning: _____

Solarkonstanten är flödet av solenergi och har enheten W/m^2 .

Den beror på avståndet från solen, och ges av

$$S_0 = P_{\text{Sol}}/4\pi r^2,$$

där

$$P_{\text{Sol}} = 3,87 \times 10^{26} \text{ W}$$

är solens utstrålade effekt och r är avståndet från solen.

Eftersom avståndet från solen varierar under jordens bana, är solarkonstanten inte en riktig konstant. Om man antar att medelavståndet mellan solen och jorden är $150 \times 10^9 \text{ m}$ så får man att ungefär $S_0 = 1367 \text{ W/m}^2$ når jorden

- (b) *Venus har ett medelavstånd till solen på 0,72 gånger jordens, samt ett albedo på 0,77. Beräkna Venus emittanstemperatur. (3 poäng)*

Lösning: _____

Solstrålningen minskar kvadratiskt med avståndet,

$$\frac{\text{solstrålning på Venus}}{\text{solstrålning på jorden}} = \left(\frac{\text{Venus avstånd från solen}}{\text{jordens avstånd från solen}} \right)^{-2},$$

så solstrålningen på Venus (Venus solarkonstant) är

$$S_V = \frac{1367}{0,72^2} \text{ Wm}^{-2} = 2637 \text{ Wm}^{-2}.$$

Således är (i jämvikt) Venus emittanstemperatur

$$T_V = \left[\frac{S_V(1 - \alpha_V)}{4\sigma} \right]^{1/4},$$

där $\alpha_V = 0,77$ är planetens albedo. Sätts siffror in är svaret

$$T_V = \left[\frac{2637 \cdot 0,23}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} \right]^{1/4} \text{ K} = 227 \text{ K}.$$

- (c) Gör en överslagsberäkning om koldioxidkoncentrationen (i ppm) i atmosfären år 2000, då mängden kol i atmosfären uppskattades till 778×10^{12} kg. Antag att medelvikten av molekyler i atmosfären är 29 g/mol. (4 poäng)

Lösning: _____

Antal kolatomer in atmosfären är

$$778 \text{ Tkg} \times (6,02 \times 10^{23} \text{ atomer/mol}) / (12 \text{ g/mol}) = 3,9 \times 10^{40} \text{ atomer}$$

Eftersom trycket är 10^5 Pa och trycket är kraft per areaenhet, är atmosfärens massa

$$m = \frac{PA}{g} = 10^5 \text{ Pa} \times 4\pi \times (6,4 \times 10^6 \text{ m})^2 / (9,8 \text{ m/s}^2) = 5,25 \times 10^{18} \text{ kg}$$

Atmosfären består mestadels av kväve och syre. Vi kan räkna ut antalet molekyler om vi räknar med en medelvikt av 29 g/mol.

$$5,25 \times 10^{18} \text{ kg} \times (6,02 \times 10^{23} \text{ molekyler/mol}) / (29 \text{ g/mol}) = 1,1 \times 10^{44} \text{ molekyler}$$

Koldioxid har en kolatom per molekyl. Kvoten mellan kolatomer och andra molekyler är då

$$3,9 \times 10^{40} / (1,1 \times 10^{44}) = 0,000355 = 355 \text{ ppm}$$

vilket stämmer (ungefär) överens med den då uppmätta (370 ppm).

2. (a) Härled en formel för tillgänglig effekt i ett vindkraftverk som funktion av vindens hastighet v , rotorns radie R och densitet ρ (Betz lag). (6 poäng)

Lösning: _____

När turbinen tar ut rörelseenergi, avtar luftens hastighet, så om hastigheten var v framför rotn och v_1 efter att den färdats igenom rotn gäller $v_1 < v$. Energin som tas ut under tiden t är

$$\frac{1}{2} M(v^2 - v_1^2),$$

om vindmassan är M . Naturligtvis blir det ingen abrupt förändring, vindhastigheten är inte v ända fram till turbinen. Det finns ett övergångsområde runt turbinen där hastigheten gradvis går ner från v till v_1 . För att göra en bättre uppskattning tar vi istället

$$M = \rho S \frac{1}{2}(v + v_1)t.$$

Med andra ord, vi tar hänsyn till att luftens hastighet vid turbinen är mittemellan v och v_1 .

Energiskillnaden mellan luften före och efter blir då

$$E = \frac{1}{2}\rho S \frac{1}{2}(v + v_1)t(v^2 - v_1^2).$$

Vi definierar en dimensionslös effektkoefficient C_p enligt

$$\frac{E}{\frac{1}{2}\rho S v^3 t} = C_p(x)$$

där $x = v_1/v$ är mellan 0 och 1 och $C_p(x) = \frac{1}{2}(1+x)(1-x^2)$. Funktionen C_p har maximum vid $x = 1/3$, och då har vi $C_p^{max} = 16/27 = 0,59$.

Om vi försummar förluster vid överföring från mekanisk till elektrisk energi får vi att vindkraftverkets effekt är

$$P(v) = \frac{1}{2}C_p\rho\pi R^2v^3,$$

där vi antagit konstant vindhastighet.

- (b) Använd Betz lag för att bestämma vilken diameter krävs på ett vindkraftverks rotor för att det ska ge en effekt på 100 kW, om vindhastigheten ligger stadigt vid 7,5 m/s? Densiteten är $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ och effektkoefficienten är $C_p = 16/27$. (1 poäng)

Lösning:

$P = 100 \text{ kW}$, $v = 7,5 \text{ m/s}$, $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 16/27$.

Om diametern är D gäller $P = \frac{1}{2}C_p\rho v^3\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$ och från detta fås nu att

$$D = 2\sqrt{\frac{P}{\frac{1}{2}C_p\rho U^3\pi}} = 28,8 \text{ m}.$$

- (c) En storm långt ute till havs ger upphov till dyningar vars våglängder är runt $\lambda = 100 \text{ m}$. Vad är fashastigheten och gruppshastigheten? Är det långa eller korta vågor som varslar om ett kommande

oväder (d.v.s. färdas de långa eller de korta snabbast)? Hur lång tid tar det för dessa hundrametersvågor att färdas 100 km mellan storm och båt? Använd dig av dispersionsrelationen $\omega(k) = \sqrt{gk}$. (3 poäng)

Lösning: _____

Fas hastigheten är $v_p = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k}}$ och grupp hastigheten är

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_p.$$

Eftersom $v_p = 2v_g \propto \sqrt{\lambda}$ färdas de långvågiga snabbast (vågornas energi rör sig med v_g).

För 100 m är $v_p = \sqrt{\frac{9,82 \text{ m/s}^2}{2\pi/(100 \text{ m})}} \simeq 12,5 \text{ m/s}$ och således är tiden det tar för vågen att färdas till båten

$$t = \frac{100 \text{ km}}{v_p} = 8000 \text{ s} = 2,2 \text{ timmar}.$$

3. (a) Beräkna arean som krävs för ett 1 GW solkraftverk. Antag att man täcker 90% av ytan med solceller som har 15% effektivitet. För enkelhets skull antag att den är placerad där solinstrålningen är lika med det globala genomsnittet. (6 poäng)

Lösning: _____

Den effekt som når jorden är cirka $S_0 = 1370 \text{ W/m}^2$.

Effekt per ytenhet är

$$P = \frac{\pi R_E^2 (1 - \alpha) S_0}{4\pi R_E^2} = 240 \text{ W/m}^2$$

Integrerat över ett helt år blir det

$$S_r = 240 \times 365 \times 24 \times 3600 = 7,6 \times 10^9 \text{ J/m}^2 = 2,1 \text{ MWh/m}^2$$

(1 kWh motsvarar 3.6 MJ.)

Ett kraftverk med 1 GW producerar på ett år $365 \times 3600 \times 24 \times 10^9 = 3,15 \times 10^{16} \text{ J}$.

Ytan A vi behöver för ett 1 GW solkraftverk kan uppskattas från

$$3,15 \cdot 10^{16} = \eta S_r A$$

där effektiviteten kan antas vara cirka $\eta = 0,9 \times 0,15 = 0,13$ (antag att man täcker 90% av ytan med solceller som har 15% effektivitet).

Med $S_r = 2 \text{ MWh/m}^2$ får vi från

$$A = \frac{3,15 \cdot 10^{16}}{0,13 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \cdot 3600} \text{ km}^2 \simeq 33,65 \text{ km}^2$$

- (b) Ett svänghjul av stål (täthet $\rho = 8,0 \text{ ton/m}^3$) är skapt som en ihålig cylinder med innerradie $r_1 = 40 \text{ cm}$, ytterradie $r_2 = 60 \text{ cm}$ och längd $L = 110 \text{ cm}$. Hur stor rörelseenergi lagrar hjulet om det snurrar med vinkelhastighet $\omega = 14 \text{ rad/s}$? (2 poäng)

Lösning: _____

Tröghetsmomentet för svänghjulet är

$$I = \frac{1}{2} M(r_2^2 + r_1^2), \quad M = \rho L \pi (r_2^2 - r_1^2).$$

Svänghjulets rörelseenergi är således

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{\pi}{4} \rho L (r_2^2 - r_1^2) (r_2^2 + r_1^2) \omega^2 = \frac{\pi}{4} \rho L (r_2^4 - r_1^4) \omega^2 \\ &= \frac{\pi}{4} (8,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot 1,10 \text{ m} \cdot [(0,6 \text{ m})^4 - (0,4 \text{ m})^4] \cdot (14 \text{ rad/s})^2 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ J}. \end{aligned}$$

- (c) Svänghjulet är installerat i ett fordon med 20 hästkrafter (1 hästkraft $\simeq 745,7 \text{ W}$) vars motor har effektiviteten 22 %. Hur länge kan man låta svänghjulet istället för motorn driva fordonet, om svänghjulet från början snurrar med vinkelhastigheten $\omega = 14 \text{ rad/s}$? (2 poäng)

Lösning: _____

Effekten 22 % · 20 hästkrafter som svänghjulet ska leverera kan skrivas som $P = E/t$, energi/tid, så här fås tiden som

$$t = \frac{E}{P} = \frac{T}{P} = \frac{1,4 \cdot 10^5 \text{ J}}{22 \% \cdot (1,49 \cdot 10^4 \text{ W})} = 43 \text{ s}.$$

4. (a) Det klassiska fusionsreaktionstvårsnittet kan uppskattas genom att ansätta balans mellan partiklarnas kinetiska energi och arbetet som uträttas av den repellerande Coulombkraften. Vilken är den minsta kinetiska energin för masscentrum, K_{cm} , som krävs för fusion enligt klassisk fysik? K_{cm} definieras som $K_{cm} = m_r v^2/2$, där

$m_r = m_D m_T / (m_D + m_T)$ är den reducerade massan. Antag att atomkärnans diameter är $d = 5 \times 10^{-15}$ m. (3 poäng)

Lösning: _____

Kollision sker när

$$\frac{m_D}{2} \left(\frac{m_T}{m_D + m_T} v \right)^2 + \frac{m_T}{2} \left(\frac{m_D}{m_D + m_T} v \right)^2 \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

eller $m_r v^2 / 2 \geq e^2 / (4\pi\epsilon_0 d)$, där

Med $d \simeq 5 \times 10^{-15}$ m får vi $K_{cm} = m_r v^2 / 2 \geq 288$ keV.

- (b) Ge ett uttryck för effekttätheten för fusion av deuterium och tritium. Definiera alla ingående storheter. (2 poäng)

Lösning: _____

Fusionseffekttätheten är

$$S_f = E_f n_D n_T \langle \sigma v \rangle,$$

där E_f är 3,6 MeV, n_D och n_T är antal deuterium och tritium per volymsenhet och $\langle \sigma v \rangle$ är den hastighetsmedelvärdesbildade produkten av reaktionstvårsnittet σ och hastigheten v .

- (c) Vad är den optimala kvoten mellan mängderna deuterium och tritium i D/T-bränsle? Motivera ditt svar. (2 poäng)

Lösning: _____

I plasmor råder laddningsneutralitet, så det totala antalet elektroner n_e är lika med summan av alla positiva laddningar $n_D + n_T = n_e$ (antag att antalet alfapartiklar är försumbar). Om man definierar k som andelen deuterium, kan vi skriva $n_D = k n_e$ och $n_T = (1 - k) n_e$, vilket ger

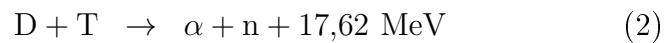
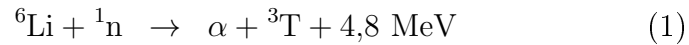
$$n_D \cdot n_T = k(1 - k)n_e^2.$$

Produkten är maximal då $k = 1/2$ och har i så fall värdet

$$n_D \cdot n_T = \frac{1}{4} n_e^2.$$

Den optimala bränsleblandningen är alltså 50%-50%-blandning av D och T.

- (d) *Sveriges årliga energiförbrukning är cirka 500 TWh denna siffra inkluderar alla energislag, dvs inte bara elektrisk energi). Antag att vi vill producera allt detta med fusion enligt*



Hur många kg ${}^6\text{Li}$ och hur många liter tungt vatten behöver vi? Densiteten för tungt vatten är 1100 kg/m^3 . Med tungt vatten syftar vi här på HDO (inte D_2O). (3 poäng)

Lösning:

Vi ser att den första reaktionen förser den andra med T och den andra förser den första med n. Båda reaktionerna tillsammans ger $4,8 + 17,62 = 22,42 \text{ MeV}$ för varje ${}^6\text{Li}$ och D.

$$\frac{500 \text{ TWh}}{22,42 \text{ MeV}} = \frac{500 \cdot 10^{12} \cdot 3600}{22,42 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \simeq 5 \cdot 10^{29}$$

$5 \cdot 10^{29}$ ${}^6\text{Li}$ -atomer väger

$$5 \cdot 10^{29} \cdot 6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4,8 \text{ ton}.$$

I en tung vattenmolekyl finns en deuteriumatom. Molekylen väger $1 + 2 + 16 = 19 \text{ u}$. Således väger $5 \cdot 10^{29}$ tunga vattenmolekyler

$$5 \cdot 10^{29} \cdot 19 \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 15254 \text{ kg}$$

och motsvarande volym är

$$\frac{15254 \text{ kg}}{1100 \text{ kg/m}^3} \approx 14 \text{ m}^3$$

5. (a) *Olyckan i Tjernobyls kärnkraftverk i april 1986 ledde till stora utsläpp av ${}^{137}\text{Cs}$ med halveringstid $\tau = 30$ år. När kommer endast en tiondel av ${}^{137}\text{Cs}$ återstå? (2 poäng)*

Lösning:

Mängden ${}^{137}\text{Cs}$ – atomer tiden t efter olyckan är

$$N(t) = N_0 2^{-t/\tau} = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{\tau}}$$

och detta är en tiondel av av ursprungsvärdet då $N(t) = 0,1 N_0$ som ger att

$$t = -\frac{\ln 0,1}{\ln 2} \tau = 3,3 \tau \simeq 100 \text{ år}.$$

Årtalet för detta är alltså 2086.

- (b) *Hur många Joule värme avges då 1 g ^{225}Ac får alfa-sönderfalla under en halveringstid? Energin som avges vid ett sönderfall är $E = 5,9 \text{ MeV}$ och halveringstiden $T_h = 10$ dagar. Utgå ifrån att slutprodukten är stabil. (2 poäng)*

*Lösning:*_____

Antal kärnor från början

$$N_0 = \frac{1}{225} \cdot 6 \cdot 10^{23}.$$

Hälften av dessa sönderfaller

$$N = \frac{1}{225} \cdot 3 \cdot 10^{23} = 1,33 \cdot 10^{21}$$

Värmeenergin är

$$Q = N \cdot E = 1,33 \cdot 10^{21} \cdot 5,9 \text{ MeV} = 7,85 \cdot 10^{21} \text{ MeV} = 1,26 \cdot 10^9 \text{ J}$$

- (c) *Vad är den genomsnittliga värmeeffekten i uppgift b? (1 poäng)*

*Lösning:*_____

Ovanstående händer under 10 dagar. Den genomsnittliga effekten är

$$P = 1,26 \cdot 10^9 / (10 \cdot 24 \cdot 3600) = 1,45 \cdot 10^3 \text{ W}$$

- (d) *Hur stor massa 20-gradigt vatten kan värmas upp till sin kokpunkt med denna energi? Antag att vattnets värmekapacitivet är $c = 4,2 \text{ kJ/(kgK)}$. (1 poäng)*

*Lösning:*_____

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

så

$$m = \frac{Q}{c \cdot \Delta T}$$

Här $c = 4,2 \text{ kJ/(kgK)}$ och $\Delta T = 80 \text{ K}$, så vi får

$$m = 3,75 \text{ ton.}$$

- (e) *Jämför bränsleförbrukningen för två 500 MW elkraftverk varav ena bränner olja och det andra drivs av 3,0% anrikat uran. Bägge kraftverk är i drift 6000 timmar om året med verkningsgraden 35% (värme till elektricitet). Hur många ton olja och anrikat UO_2 -bränsle behövs i dessa två fall? Antag att kärnbränslet ger 40 MW*

om dagen per kg U (^{235}U) ant att oljans energiinnehåll är 43,5 MJ/kg. (4 poäng)

Lösning: _____
Oljekraftverket bränner

$$\frac{500 \text{ MW} \cdot 6000 \cdot 3600 \text{ s}}{35 \% \cdot 43,5 \text{ MJ/kg}} = 710000 \text{ ton}$$

om året.

UO₂ väger

$$\frac{238 + 2 \cdot 16}{235} = 1,149$$

gänger så mycket som U. Kärnkraftverket kräver

$$\frac{500 \text{ MW} \cdot 6000/24 \text{ dag}}{35 \% \cdot 3 \% \cdot 40 \text{ MW}/(\text{dag} \cdot \text{kg})} \cdot 1,149 = 342 \text{ ton}$$

UO₂ om året.

6. (a) Skriv upp diffusionsekvationen för koncentrationen av föroreningar C i ett homogent medium i vila, för en konstant diffusionskoefficient D . (1 poäng)

Lösning: _____
Diffusionsekvationen är

$$\frac{dC}{dt} = D \nabla^2 C.$$

- (b) Skriv upp lösningen för diffusionsekvationen för en ögonblicklig plan källa, där $Q[\text{kg}]$ materia per enhetsarea sprids. (3 poäng)

Lösning: _____

I fallet att koncentrationen $C = C(x, t)$ endast är en funktion av x och t , oberoende av y och z , är diffusionsekvationen

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

En lösning till denna ekvation är en Gaussfunktion (det kan lätt verifieras genom att sätta in i ekvationen)

$$C = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4Dt} \quad (3)$$

där A är konstant.

Ekvation (3) beskriver diffusionen av en mängd material, $Q[\text{kg}]$, per enhetsarea. Om konstanten A i ekvation (3) byts mot det mer meningsfulla Q har vi följande ekvation:

$$C(x,t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}. \quad (4)$$

- (c) *Hur stort är medelavståndet som partiklarna har spridits som funktion av diffusionskonstant och tid? (2 poäng)*

Lösning: _____

Andra momentet av C beskriver dess spridning:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Cx^2 dx = 2QDt. \quad (5)$$

Om vi delar detta med den sammanlagda mängden av material fås medelkvadrataavstånd som partiklarna har spridits är

$$\sigma^2 = 2Dt.$$

Roten ur detta, σ , är en längdskala som beskriver bredden på fördelningen.

- (d) *Hur varierar avståndet mellan två partiklar som advekteras av turbulens som funktion av tiden? Varför skiljer det sig från molekylär diffusion? (4 poäng)*

Lösning: _____

Avståndet $R(t)$ mellan dem ökar snabbare än linjärt och i genomsnitt som $R(t) \sim t^{3/2}$. Detta innebär att ett moln av partiklar som advekteras har en radie vars kvadrat växer som $R^2(t) \sim t^3$. Detta är mycket snabbare än i diffusion då $R^2(t) \sim t$. Anledningen är att större virvlar karakteriseras av snabbare flöden, och ju längre bort två partiklar är från varandra, desto större är deras relativa hastighet.