

Reglerteknik SSY310

Tentamen 2025-10-10

Tid: 14:00 – 18:00

Lokal: Johanneberg

Lärare: Knut Åkesson, 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade och alla delsteg kunna följas.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den 8:e september kl. 12.15 – 13.15 (lokal anslås på kurshemsidan). Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- “Formelsamling Reglerteknik 2025”
- Bodediagram (dock ej lathund för att rita Bodediagram)
- Standardtabeller av typen Physics handbook, TEFYMA och Beta
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator/smartphone.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

1

Komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ för ett system ges av överföringsfunktionen

$$T(s) = \frac{100}{s^2 + 14s + 100}$$

a) Bestäm systemets kretsöverföring $L(s)$.

(1p)

b) Bestäm bandbredden för $T(s)$.

(2p)

c) Låt kretsöverföringen vara produkten av regulatorns och processens överföringsfunktioner. Vad blir den komplementära känslighetsfunktionen om förstärkningen i regulatorn dubblas (allt annat oförändrat)?

(1p)

2

En instabil process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

ska regleras med en P-regulator $F(s) = K_p$.

- a) För vilka värden på förstärkningen K_p är det återkopplade systemet stabilt. Ange speciellt förstärkningen K_p för de båda fallen då amplitudmarginalen $A_m = 2$ och $A_m = 3$.

(2p)

- b) Återkopplingen stabiliserar den instabila processen, men ytterligare processdynamik kan äventyra stabiliteten. Detta gäller speciellt då fördröjningar uppträder i återkopplingsloopen. En fördröjning e^{-sT_d} kan approximeras med en Padéapproximation, vilket innebär att processen då approximativt kan beskrivas av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1 - sT_d/2}{(s-1)(1 + sT_d/2)}$$

För vilka värden på T_d blir det återkopplade systemet fortfarande stabilt. Utgå från de båda P-regulatorerna som dimensionerades i uppgift a).

(2p)

- c) Ange utifrån de erhållna resultaten en allmän slutsats angående dimensionering av P-regulatorer för första ordningens instabila processer som dessutom utsätts för tidsfördröjningar av varierande storleksordning.

(1p)

3

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.5s)^2}$$

ska regleras med en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

Två varianter ska undersökas.

- Välj nollställena i regulatorn så att den snabbare dubbelpolen fortkortas bort. Välj sedan de återstående PID-parametrarna så att $\beta = 5$ och som alternativ $\beta = 10$, samt K_i i båda fallen så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. (3p)
- Studera för de två erhållna regulatorerna ($\beta = 5$ och $\beta = 10$) vad överkorsningsfrekvensen ω_c blir samt regulatorns högfrekvensförstärkning $F_{PID}(\infty)$. (2p)
- Kommentera skillnaderna i förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen samt det återkopplade systemets snabbhet i form av stigtiden $t_r \approx 1/\omega_c$. (1p)

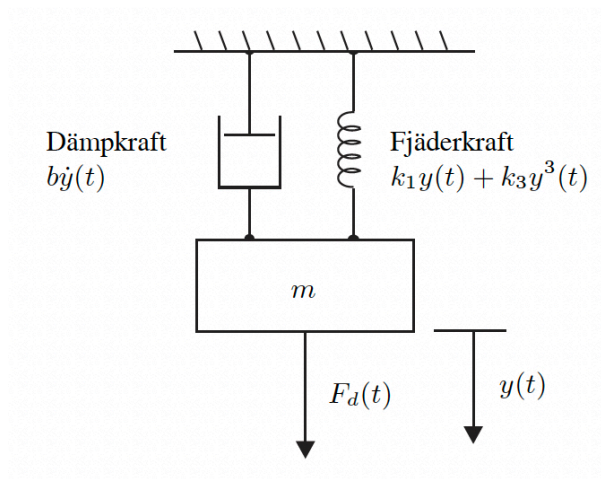
4

En process som beskrivs av den tidskontinuerliga överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s), \quad \text{där} \quad G_1(s) = \frac{4}{s+1} \quad \text{och} \quad G_2(s) = \frac{4}{s+2}$$

ska regleras med en dator. För att åstadkomma detta diskretiseras denna processmodell. Antag att samplingsintervallet $h = \ln 2$ och att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal $u(t)$.

- Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion $G_d(z)$. (2p)
- Bestäm en tidsdiskret P-regulator så att de båda polerna för det tidsdiskreta återkopplade systemet placeras som en dubbelpol. (3p)



En massa med vikten m och positionen $y(t)$ drivs enligt figuren av en drivande kraft $F_d(t)$. Via den progressiva fjädern utsätts massan också för den olinjära fjäderkraften $k_1 y(t) + k_3 y^3(t)$ och dämpkraften $b\dot{y}(t)$.

Den drivande kraften $F_d(t)$ genereras via en hydraulisk motor med överföringsfunktionen

$$F_d(s) = \frac{K_m}{1+s} U(s)$$

Motorns uppgift är att positionera massan m vid positionen $y = y_0$.

- Formulera en olinjär tillståndsmodell som beskriver fjäder-massasystemets rörelse inklusive den hydrauliska motorn med $u(t)$ som insignal och massans position $y(t)$ som utsignal. (3p)
- Bestäm en linjär tillståndsmodell som beskriver avvikelser kring den önskade positionen $y = y_0$. Var hamnar det öppna icke-reglerade systemets poler? (2p)

Lycka till!

Lösning till tentamen i Reglerteknik 250822

1. a) $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{100}{s^2+14s+100} = \frac{\frac{100}{s^2+14s}}{1 + \frac{100}{s^2+14s}} \Rightarrow L(s) = \frac{100}{s(s+14)}$

b) $T(s) = \frac{10^2}{s^2+2 \cdot 0.7 \cdot 10 s + 10^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$

$\omega_n = 10 \quad \zeta = 0.7 \quad T(j\omega_b) = -3 \text{ dB} \} \Rightarrow \underline{\omega_b \approx \omega_n = 10}$
Bodediagram FS

c) $L(s) = \frac{2 \cdot 100}{s(s+14)} \Rightarrow T(s) = \frac{200}{s^2+14s+200}$

2. a) $G(s) = \frac{1}{s-1}$ $F(s) = K_p$

KE $1 + G(s)F(s) = 0 \Rightarrow s - 1 + K_p = 0$

stabil $\text{d}\ddot{s} \quad s = 1 - K_p < 0 \Rightarrow K_p > 1$

Instabilitet inträffar $\text{d}\ddot{s} \quad K_p$ är för litet. Med $K_p = A_m$ tåli systemet en minskning av förstärkningen med en faktor A_m innan instabilitet inträffar

$A_m = 2 \Rightarrow K_p = 2$

$A_m = 3 \Rightarrow K_p = 3$

b) $G(s) = \frac{1 - sT_d/2}{(s-1)(1 + sT_d/2)} = \frac{2/T_d - s}{(s-1)(s + 2/T_d)}$

KE $(s-1)(s + 2/T_d) + K_p(2/T_d - s) = 0$

$s^2 + (2/T_d - 1 - K_p)s + K_p 2/T_d - 2/T_d = 0$

stabil $\text{d}\ddot{s} \quad \begin{cases} 2/T_d - 1 - K_p > 0 \\ (K_p - 1)2/T_d > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2/T_d > K_p + 1 \\ K_p > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow T_d < \frac{2}{1 + K_p} = \begin{cases} 2/3 & K_p = 2 \\ 1/2 & K_p = 3 \end{cases}$

c) känsligheten för förstärkningsvarian-
tion $\text{d}\ddot{s} \quad (\text{kopplat till } A_m)$ förbättras
 $\text{d}\ddot{s} \quad K_p$ ökar, medan ökad död tid T_d
begränsar K_p .

3

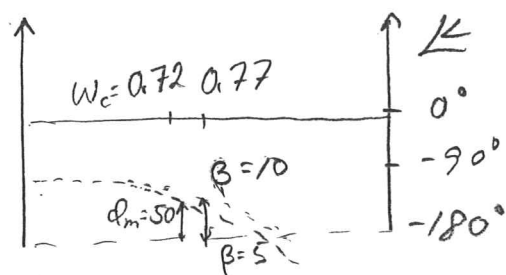
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.5s)^2}$$

$$F_{PIB}(s) = K_i \frac{(1+0.5s)^2}{s(1+s \cdot 0.5/\beta)}$$

$\tau = 0.5$
 $s = 1$

$$\Rightarrow L(s) = G(s)F(s) = \frac{K_i}{s(1+s)(1+0.5s/\beta)}$$

$$\angle L = -90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.5\omega_c/\beta = -180^\circ + \phi_m = -130^\circ$$



$$|L| = \frac{K_i}{\omega_c \sqrt{1+\omega_c^2} \sqrt{1+(0.5\omega_c/\beta)^2}} = 1$$

β	ω_c	K_i	$K_{\infty} = K_i \beta \tau$
5	0.72	0.895	2.24
10	0.77	0.98	4.9

Laststörning $J_0 = \frac{1}{K_i}$

Styrsignalaktivitet $J_u = K_{\infty}$

Snabbhet $t_r \sim 1/\omega_c$

Ökat β från 5 $\rightarrow$ 10 ger ca 10% bättre J_0 , mer än fördubbling av J_u samt ca 7% snabbare respons (minskat t_r)

4

$$a) G(s) = \frac{16}{(s+1)(s+2)} = \frac{16}{s+1} - 8 \frac{2}{s+2}$$

$$G_d(z) = \frac{16(1-e^{-\ln 2})}{z-e^{-\ln 2}} - 8 \frac{1-e^{-2\ln 2}}{z-e^{-2\ln 2}}$$

$$= \frac{8}{z-0.5} - \frac{6}{z-0.25} = \frac{2z+1}{(z-0.5)(z-0.25)}$$

$$b) G_{ry}(z) = \frac{K_p G_d}{1+K_p G_d} = \frac{K_p(2z+1)}{z^2-0.75z+0.125+2K_p z+K_p}$$

$$= \frac{2K_p(z+0.5)}{z^2-(0.75-2K_p)z+K_p+0.125} = \frac{2K_p(z+0.5)}{z^2-2\alpha z+\alpha^2}$$

$$\begin{cases} 0.75-2K_p = 2\alpha \\ K_p+0.125 = \alpha^2 \end{cases} \begin{cases} \alpha = \frac{3}{8}-K_p \\ K_p^2 + \frac{9}{64} - \frac{3}{4}K_p - K_p - \frac{1}{8} = 0 \end{cases} \begin{cases} K_p = \frac{7-\sqrt{48}}{8} \approx 0.0090 \\ \alpha = \frac{3}{8} - 0.009 = 0.366 \end{cases}$$

5.

$$a) \quad m\dot{v} + bv + k_1 y + k_3 y^3 = F_d$$

$$\dot{y} = v$$

$$F_d + \dot{F}_d = K_m u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{k_1}{m} y - \frac{k_3}{m} y^3 - \frac{b}{m} v + \frac{1}{m} F_d \\ -F_d + K_m u \end{bmatrix}$$

$$b) \quad \text{Arbeitspunkt } (y_0, u_0) \Rightarrow v_0 = \dot{v}_0 = \dot{F}_{d0} = 0$$

$$k_1 y_0 + k_3 y_0^3 = F_{d0} = K_m u_0 \Rightarrow u_0 = \frac{1}{K_m} (k_1 y_0 + k_3 y_0^3)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{y} \\ \dot{v} \\ \Delta \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{m} \underbrace{(k_1 + 3k_3 y_0^2)}_{k_0} & -\frac{b}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ v \\ \Delta F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ v \\ \Delta F_d \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{k_0}{m} & s + \frac{b}{m} & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1) \left(s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k_0}{m} \right)$$

$$s = \begin{cases} -1 \\ -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k_0}{m}} \end{cases}$$