

Reglerteknik SSY052/SSY310

Tentamen 2025-06-05

Tid: 14:00 – 18:00

Lokal: Johanneberg

Lärare: Knut Åkesson, 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade och alla delsteg kunna följas.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den 24:e juni kl. 12.15 – 13.15 (lokal anslås på kurshemsidan). Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen.

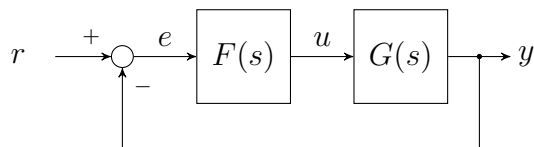
Tillåtna hjälpmedel:

- “Formelsamling Reglerteknik 2025”
- Bodediagram (dock ej lathund för att rita Bodediagram)
- Standardtabeller av typen Physics handbook, TEFYMA och Beta
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator/smartphone.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

1

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Processen ges av

$$G(s) = \frac{1}{s + \alpha} e^{-sT_d}$$

och ska regleras med en P-regulator $F(s) = K_p > 0$.

- a) Bestäm en differentialekvation för processen, dvs en differentialekvation där insignalen är $u(t)$ och utsignalen är $y(t)$. Notera att denna differentialekvation kommer att bero på parametrarna T_d och α .

(1p)

- b) Avgör för vilka värden på K_p det återkopplade systemet är stabilt då $T_d = 0$ och $\alpha = -1$.

(1p)

- c) Avgör approximativt med det förenklade Nyquistkriteriet för vilka värden på K_p det återkopplade systemet är stabilt då $T_d = 2$ och $\alpha = 1$.

(2p)

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

ska regleras.

- a) Låt processen regleras med en P-regulator, dvs $F(s) = K_p$. Under förutsättning att fasmarginalen måste vara $\varphi_m = 60^\circ$, vad medför det för överkorsningsfrekvens ω_c ?

(2p)

- b) Bestäm ett leadfilter

$$F_{lead}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b},$$

så att fasmarginalen blir $\varphi_m = 60^\circ$ och $\omega_c = 0.4$ rad/s.

(3p)

- c) Antag att en regulator har bestäms, exempelvis genom att lösa föregående uppgift, som ger att $\varphi_m = 60^\circ$ och $\omega_c = 0.4$ rad/s. Det finns dock osäkerhet kring hur stor dödtiden är i processen och den verkliga processen ges istället av

$$G(s) = \frac{e^{-(1+\Delta)s}}{s(s+1)}.$$

Bestäm det största värdet på Δ som gör att det återkopplade systemet blir stabilt.

(2p)

3

För en bensenmotor kan dynamiken för en insugen i motorns cylinder beskrivas av följande ekvationer

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha v - \beta v x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{x_1}(\alpha v - \beta v x_2) \end{cases}$$

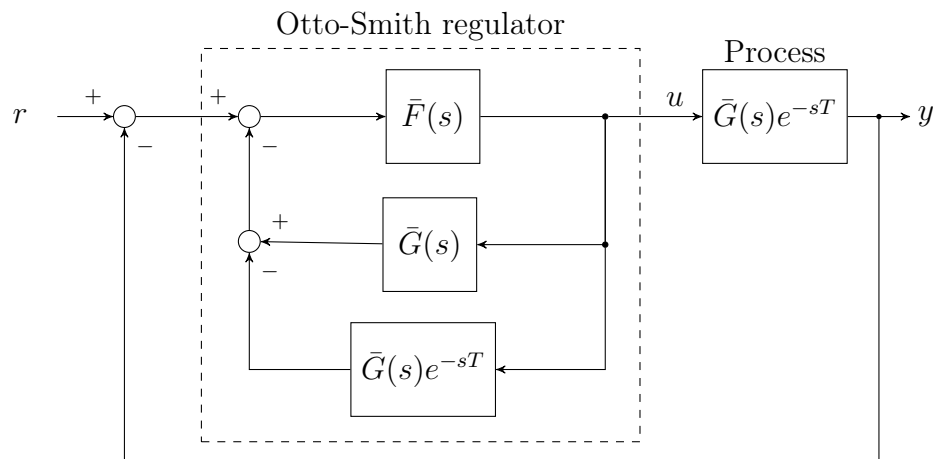
där $x_1 = p$ är trycket i insuget, $x_2 = T$ är temperaturen i insuget, insignalen v är massflödet och α samt β är positiva konstanter.

a) Visa att $(x_1^0, x_2^0, v^0) = (10^5, \alpha/\beta, 0.1)$ är en jämviktpunkt till systemet. (1p)

b) Bestäm en linjär approximation av systemet kring jämviktpunkten i uppgift a). Enbart A och B matrisen för det linjäriserade systemet behöver anges. (3p)

4

Otto-Smith regulatorer används i processindustrin för system med lång död-tid.



- a) Härled överföringsfunktionen från r till y för systemet med Otto-Smith regulatorn då dödtiden i processen är $T > 0$. Använd de överföringsfunktioner som är angivna i figuren ovan som beskriver Otto-Smith regulatorn. Förenkla så långt det går.

(2p)

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

Anta att vi har processen

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(1+s)(1+2s)},$$

vilket enligt notationen ovan innebär att

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)},$$

samt att $T = 5$.

- b) Låt regulatorn $\bar{F}(s)$ (enligt figuren på föregående sida) vara en PI-regulator, d.v.s.

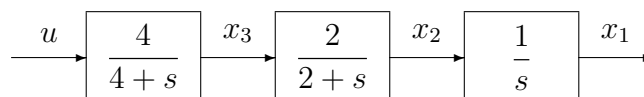
$$\bar{F}_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s}.$$

Bestäm regulatorparametrarna K_p och K_i så att där processens långsamma pol förkortas bort mot nollstället i PI-regulatorn samt det återkopplade systemet är ett andra ordningens system med relativ dämpning $\zeta = 1/\sqrt{2}$ då processen ges av $G(s)$ enligt ovan. Om du anser att det förenklar så kan du anta att processen saknar dödtid, dvs processen ges då istället av $\bar{G}(s)$ enligt ovan (detta medför inget poängavdrag).

(3p)

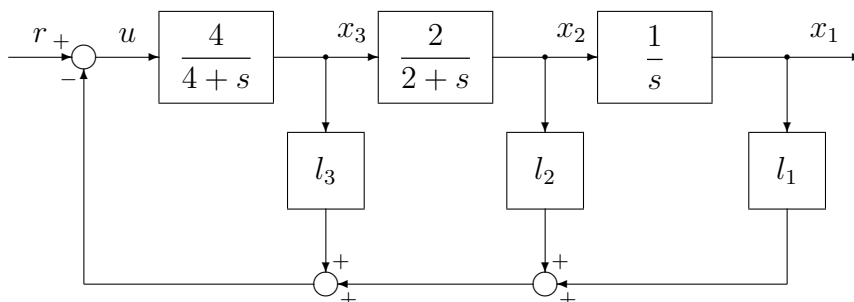
Ett positioneringssystem för en satellitantenn ska styras. Positioneringssystemet består av en motor och en växellåda som roterar en satellitantenn till önskad position. Utsignalen från regulatören är u är en spänning. Spänningen styr en motor som ger ett vridmoment x_3 . Vridmomentet påverkar satellitantennens rotationshastighet x_2 , vilket kan omvandlas till en vinkelposition x_1 . Låt utsignalen från det återkopplade systemet vara vinkelpositionen.

Positioneringssystemet:



Spänningen till motorn ska styras med hjälp av en tillståndsåterkoppling enligt schemat nedan.

Positioneringssystemet styrt med tillståndsåterkoppling:



- (a) Tag fram en tillståndsmodell över positioneringssystemet. (2p)
- (b) Bestäm parametrarna l_1 , l_2 och l_3 så att det återkopplade systemet får en enkelpol i -1 och en dubbelpol i -5. (3p)

Lycka till!

$$1a) \quad G(s) = \frac{1}{s+d} e^{-sT_d}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$\text{För } T_d = 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+d} \cdot U(s) \Leftrightarrow (s+d)Y(s) = U(s)$$

Invers laplace ger

$$\dot{y}(t) + d y(t) = u(t)$$

För $T_d \neq 0$ gäller att $u(t)$ är fördröjd T_d tidsenheter, dvs

$$\underline{\underline{\dot{y}(t) + d y(t) = u(t - T_d)}}$$

$$1/ \quad G(s) = \frac{1}{sT_d} e^{-sT_d}, \quad F(s) = K_p$$

$$b/ \quad T_d = 0, \quad \alpha = -1 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow L(s) = \frac{K_p}{s-1}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p}{s-1+K_p}, \quad \text{polen ges av } s-1+K_p=0 \Leftrightarrow s=1-K_p$$

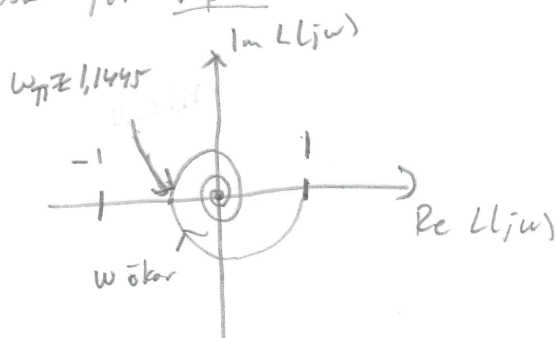
Polen ligger i stilt VAP då $K_p > 1$.

$$c/ \quad L(s) = \frac{K_p}{s+1} e^{-2s}$$

Kretsöverföringen är stabil, Nyquists förenklade stabilitetskriterium kan användas.

$$\begin{cases} |L(j\omega)| = \frac{|K_p|}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \arg L(j\omega) = \underbrace{\arg K_p}_{0 \text{ då } K_p > 0} - \arctan(\omega) - 2\omega \end{cases}$$

Skissa för $K_p = 1$



$$\text{Bestäm } w_{\pi}: -\arctan(w_{\pi}) - 2w_{\pi} = -\pi$$

Numerisk lösning (exempelvis genom prövning) ger att $w_{\pi} \approx 1,1445$

Detta är oberoende av K_p (då $K_p > 0$).

$$|L(jw_{\pi})| = \frac{K_p}{\sqrt{1+1,1445^2}} \approx 0,658 K_p$$

$$\text{Då } |L(jw_{\pi})| < 1 \text{ om } 0,658 K_p < 1 \Leftrightarrow K_p < \frac{1}{0,658} \approx \underline{\underline{1,52}}$$

$$2/ \quad G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

a/ Där reglering med P-regulator och vi har $\varphi_m = 60^\circ$, vilken överkorsningsfrekvens har vi.

Notera att kravet på $\varphi_m = 60^\circ$ innebär att K_p är bestämd och vi därmed kan bestämma ω_c .

$$\arg G(j\omega) = -90^\circ - \arctan(\omega) - \omega \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\varphi_m = 60^\circ \quad (\text{löses av vid } \omega_c).$$

$$\arg G(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m = -120^\circ$$

$$\arg G(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan(\omega_c) - \omega_c \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{Lös numeriskt} \Rightarrow \underline{\underline{\omega_c \approx 0.265 \text{ rad/s}}}$$

b/ Bestäm ett leadfilter så att $\varphi_m = 60^\circ$ och $\omega_c = 0.4 \text{ rad/s}$.

$$F_{\text{lead}}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

$$\arg G(j\omega_c) \approx -134.7^\circ$$

↑
0.4 rad/s

För att vi ska ha $\varphi_m = 60^\circ$ så måste gälla

$$\arg L(j\omega_c) = -120^\circ \quad (-180^\circ + 60^\circ)$$

$$\begin{aligned} \arg L(j\omega_c) &= \arg F(j\omega_c) + \arg G(j\omega_c) \Rightarrow \arg F(j\omega_c) = \\ &= -120^\circ - \arg G(j\omega_c) = \\ &= -120^\circ + 134.7^\circ = \underline{\underline{14.7^\circ}} \end{aligned}$$

2b forts

Bestäm b så att maximal positiv fasvidning infaller för $\omega = \omega_c \Rightarrow \varphi_{\max} = 14,3^\circ$

Enligt FS gäller

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{\max}}{1 - \sin \varphi_{\max}} = 1,68$$

$$\tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{1,68}}{0,4} = 3,24$$

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)| \sqrt{b}} \quad \text{där } |G(j\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c \sqrt{1 + \omega_c^2}} \approx 2,32$$

$$\Rightarrow K_p = \frac{1}{2,32 \sqrt{1,68}} \approx 0,33$$

$$\Rightarrow F(s) = 0,33 \frac{1 + 3,24s}{1 + 1,93s}$$

2c

$$G(s) = \frac{e^{-(1+\Delta)s}}{s(s+1)}$$

De $\varphi_m = 60^\circ$ och $\omega_c = 0,4$ rad/s, vilket är det största Δ som tillåts innan det återkopplade systemet blir instabilt?

$$G(s) = \frac{e^{-(1+\Delta)s}}{s(s+1)} = \underbrace{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}}_{\text{processen som vi designat för}} \cdot \underbrace{e^{-\Delta s}}_{\text{påverkar ej förstärkning enbart fasvidning}}$$

Bestäm Δ så att återkopplade systemet blir marginellt stabilt.

$$\arg\{e^{-\Delta j\omega}\} = -\Delta \cdot \omega \cdot \frac{180}{\pi} \quad \text{Bestäm } \Delta \text{ så att}$$

$$-\Delta \cdot \omega_c \cdot \frac{180}{\pi} = -60^\circ \Rightarrow \Delta = \frac{\pi \cdot 60}{180 \cdot \omega_c} = \frac{\pi}{3 \cdot 0,4} \approx \underline{\underline{2,62}}$$

$$3/ \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha v - \beta v x_2 \equiv f_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{x_2}{x_1} (\alpha v - \beta v x_2) \equiv f_2 \end{cases}$$

a) Visa att $(x_1^0, x_2^0, v^0) = (10^5, \alpha/\beta, 0.1)$ är en jämviktspunkt.

För en jämviktspunkt gäller att $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$.

$$\dot{x}_1 \Big|_{(x_1^0, x_2^0, v^0)} = \alpha v - \beta v x_2 \Big|_{(x_1^0, x_2^0, v^0)} = \alpha \cdot 0.1 - \beta \cdot 0.1 \cdot \alpha/\beta = 0$$

$$\dot{x}_2 \Big|_{(x_1^0, x_2^0, v^0)} = \frac{x_2}{x_1} (\alpha v - \beta v x_2) \Big|_{(x_1^0, x_2^0, v^0)} = \frac{\alpha/\beta}{10^5} (\alpha \cdot 0.1 - \beta \cdot 0.1 \cdot \alpha/\beta) = 0$$

Dvs både $\dot{x}_1$ och $\dot{x}_2$ är 0, dvs vi har en jämviktspunkt.

b) Bestäm de partiella derivatorna.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\beta \cdot v \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = \alpha - \beta x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{x_1^2} (\alpha v - \beta v x_2) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\alpha v}{x_1} - \frac{2\beta v x_2}{x_1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = \alpha \frac{x_2}{x_1} - \beta \frac{x_2^2}{x_1}$$

Sätt in jämviktspunkten:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{(x^0, v^0)} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{(x^0, v^0)} = -0.1\beta$$

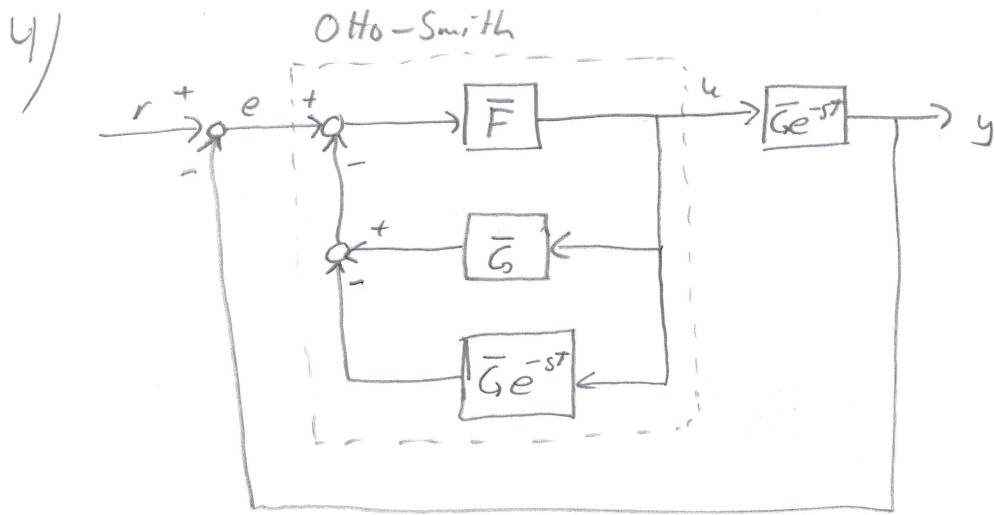
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{(x^0, v^0)} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{(x^0, v^0)} = -\frac{0.1\alpha}{10^5}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} \Big|_{(x^0, v^0)} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} \Big|_{(x^0, v^0)} = \frac{\alpha^2}{10^5\beta} - \frac{\alpha^2}{10^5\beta} = 0$$

3/

$$\Delta \dot{x} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & -0.1\beta \\ 0 & -\frac{0.1\alpha}{10^5} \end{bmatrix}} \Delta x + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \Delta u$$

Vi har ingen specificerad utsignal, så vi anger inga B, D matriser.



4) Bestäm G_{eu} .

Börja med att bestämma G_{eu} (dvs överföringsfunktionen för Otto-Smith regulatorn)

$$u = \bar{F}(E - (\bar{G}u - \bar{G}e^{-sT}u))$$

$$(1 + \bar{F}\bar{G} - \bar{F}\bar{G}e^{-sT})u = \bar{F}E \Rightarrow \frac{u}{E} = \frac{\bar{F}}{1 + \bar{F}\bar{G}(1 - e^{-sT})} \equiv G_{eu}$$

$$Y = \bar{G}e^{-sT} \cdot G_{eu}(R - Y) \Leftrightarrow (1 + \bar{G}e^{-sT}G_{eu})Y = \bar{G}e^{-sT}G_{eu}R$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y}{R} = \frac{\bar{G}e^{-sT}G_{eu}}{1 + \bar{G}e^{-sT}G_{eu}} = \frac{\bar{G}e^{-sT} \cdot \frac{\bar{F}}{1 + \bar{F}\bar{G}(1 - e^{-sT})}}{1 + \frac{\bar{G}e^{-sT}\bar{F}}{1 + \bar{F}\bar{G}(1 - e^{-sT})}} =$$

$$= \frac{\bar{F}\bar{G}e^{-sT}}{1 + \bar{F}\bar{G}(1 - e^{-sT}) + \bar{G}\bar{F}e^{-sT}} = \frac{\bar{F}\bar{G}}{1 + \bar{F}\bar{G}} e^{-sT}$$

Dvs Otto-Smith regulatorn innebär att vi kan designa en regulator

$\bar{F}$ för processen $\bar{G}$ (dvs utan dödtrid) och det återkopplade systemet beter sig som $\bar{F}$ styrde $\bar{G}$ men tidsfördröjningen tillkommer (den kan vi aldrig bli av med).

4b/

$$\bar{L} = \bar{F}\bar{G} = \frac{K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{1}{(1+s)(1+2s)} = \frac{K_p(s + \frac{K_i}{K_p})}{s} \cdot \frac{1}{(1+s)(1+2s)}$$

Vi ska välja nollstället i regulatorn så att processens långsamma pol förkortas bort.

Processens långsamma pol är den som är närmst origo, dvs $s = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{K_i}{K_p} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow K_p = 2K_i$$

$$\Rightarrow \bar{L} = \frac{K_i(2s+1)}{s} \cdot \frac{1}{(1+s)(1+2s)} = \frac{K_i}{(1+s) \cdot s}$$

$$\Rightarrow G_{ry} = \frac{\bar{L}}{1+\bar{L}} \cdot e^{-sT} = \frac{K_i}{s^2 + s + K_i} \cdot e^{-sT}$$

Vi har att relativa dämpningen ska vara $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dvs

$$G_{ry}(s) = \frac{K_i}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-sT} \quad (T=5)$$

Identificera koef.

$$\left. \begin{array}{l} 2\zeta\omega_n = 1 \\ \omega_n^2 = K_i \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{2\zeta} \Rightarrow K_i = \left(\frac{1}{2\zeta}\right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow K_p = 2K_i = 1$$

$$\Rightarrow \bar{F}(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{s}$$

5/

$$a) \quad X_3 = \frac{4}{4+s} \cdot u \Rightarrow 4X_3 + \dot{X}_3 = 4u \Rightarrow \dot{X}_3 = -4X_3 + 4u$$

$$X_2 = \frac{2}{2+s} \cdot X_3 \Rightarrow 2X_2 + \dot{X}_2 = 2X_3 \Rightarrow \dot{X}_2 = -2X_2 + 2X_3$$

$$X_1 = \frac{1}{s} X_2 \Rightarrow \dot{X}_1 = X_2$$

Utsignalen är X_1 .

Skrivet på matrisform:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_B \cdot u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$b) \text{ Bestäm } u = r - \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = r - Lx \end{array} \right\} \quad \dot{X} = Ax + B(r - Lx) = \underbrace{(A - BL)}_{\text{Polerna för det återkopplade systemet}} x + Br$$

Polerna för det återkopplade systemet ges av egenvärdena till $A - BL$

$$\text{Dvs polerna ges av } \det(sI - (A - BL)) = 0$$

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4l_1 & 4l_2 & 4l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -4l_1 & -4l_2 & -4-4l_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -2 \\ 4l_1 & 4l_2 & s+4+4l_3 \end{vmatrix} =$$

$$= s((s+2)(s+4+4l_3) + 8l_2) + 4l_1 \cdot 2 = 0$$

$$s(s^2 + (4+4l_3+2) \cdot s + 8+8l_3+8l_2) + 8l_1 = 0$$

$$s^3 + (6+4l_3)s^2 + (8+8l_3+8l_2) \cdot s + 8l_1 = 0$$

Bestäm l_1, l_2 och l_3 vi för enkelpol i -1 och dubbelpol i -5 .

$$\text{Vi vill ha } (s+1)(s+5)^2 = 0 \Leftrightarrow (s+1)(s^2+10s+25) =$$

$$= s^3 + 10s^2 + 25s + s^2 + 10s + 25 = s^3 + 11s^2 + 35s + 25 = 0$$

Identifiering av koef.

$$\begin{cases} 8l_1 = 25 \Rightarrow \underline{\underline{l_1 = \frac{25}{8}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 + 8l_3 + 8l_2 = 35 \Rightarrow l_3 + l_2 = \frac{27}{8} \Rightarrow l_2 = \frac{27}{8} - \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{17}{8}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 + 4l_3 = 11 \Rightarrow \underline{\underline{l_3 = \frac{5}{4}}} \end{cases}$$