

Reglerteknik

Kurskod: SSY052, SSY310

Tentamen 2024-05-31

Tid: 14:00-18:00

Lokaler: Johanneberg

Lärare: Bengt Lennartson, epost: bengt.lennartson@chalmers.se, tel: 0730 - 79 42 26

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 18 och 19 juni kl 12:30-13:00 på avdelningen.

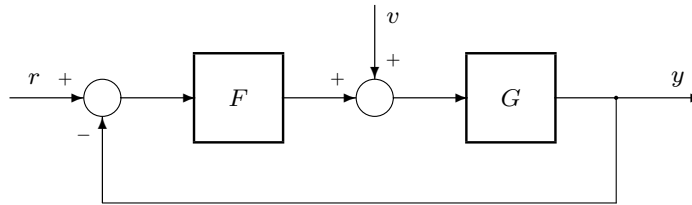
Tillåtna hjälpmedel:

- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- Den formelsamling som ingår i slutet på tentamenstesen får också tas med på tentamen som ett formelblad i A4-format med tryckta (ej förminskade) formler på fram och baksida där även egna handskrivna anteckningar är tillåtna. Datorutskrifter förutom de ingående formlerna och figurerna på formelbladet är ej tillåtna. Ett blad med enbart egna anteckningar är ej heller tillåtet.

Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola



1



För att reglera den resonanta processen med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{där} \quad \omega_n = 1 \text{ rad/s}, \zeta = 0.1$$

föreslås regulatoren

$$F(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s(s + 2)}$$

som kancellerar processens resonanta dynamik.

- Bestäm enligt ovanstående blockschema överföringsfunktionen från referenssignalen r till utsignalen y och insvängningstiden $t_{5\%}$ (2 p)
- Bestäm på samma sätt överföringsfunktionen från laststörningen v till utsignalen y . (1 p)
- Kommentera den dramatiska skillnaden i reglersystemets hantering av referenssignalen och laststörningen, samt när det är olämpligt att välja regulatorer som kancellerar processens dynamik. (1 p)

2

En instabil kemisk process som ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{(2 + s)}{s(s - 2)}$$

ska stabiliseras med en P-regulator $F(s) = K_p$.

- För vilka värden på K_p blir det återkopplade systemet stabilt. (1 p)
- Bekräfta stabiliteten för det återkopplade systemet med hjälp av Nyquists generella stabilitetskriteriet. (3 p)
- Ange speciellt för vilken förstärkning K_p som processens statiska förstärkning kan tillåtas att både dubblas och halveras innan det återkopplade systemet blir instabilt. (1 p)

2

3

En regulator ska dimensioneras för en servomotor med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+0.2s)}$$

a) Dimensionera först en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 45^\circ$ och överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 1.4$ rad/s. (2 p)

b) Dimensionera som ett alternativ en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

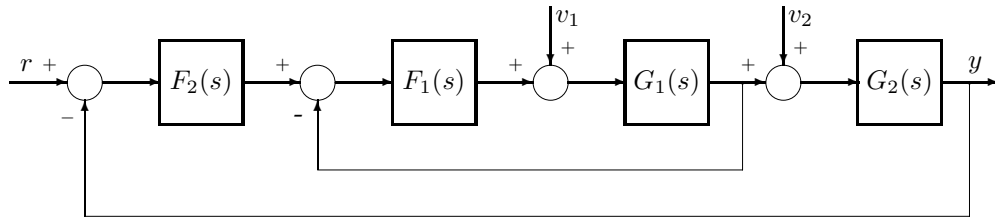
med samma fasmarginal $\varphi_m = 45^\circ$ och överkorsningsfrekvens $\omega_c = 1.4$ rad/s. Välj $\zeta = 1$ och β så att samma högfrekvensförstärkning $K_\infty = F_{PID}(\infty)$ erhålls för PID-regulatorn som för PD-regulatorn, vars $K_\infty = 3.9$. (2 p)

c) Stegsvaren från referenssignalen till processens utsignal blir i stort identiska för de båda regulatorerna med en stigtid $t_r = 0.8 \approx 1/\omega_c$. Stabilitetsmarginalerna blir också likvärdiga liksom känsligheten för mätstörningar i styrsignalen. Vilken fundamental skillnad gäller dock för de två regulatorerna? Förklara denna skillnad genom att studera överföringsfunktionen från laststörningen till processens utsignal

$$G_{vy}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

då $s \rightarrow 0$ för de två regulatorerna. Laststörningen v antas här adderas till styrsignalen på samma sätt som blockschemat i uppgift 1. (2 p)

4



Ovanstående reglersystem består av en inre och en yttre reglerloop, s.k. kaskadreglering, där vi antar att

$$G_1(s) = \frac{1}{1+s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{1+5s}, \quad F_1(s) = K_p, \quad F_2(s) = \frac{K_i}{s}$$

och den inre P-regulatorn väljs till $K_p = 10$. Denna reglerstrategi ska nu jämföras med vanlig återkoppling då den inre återkopplingen ej ingår, vilket kan ses som samma reglersystem som blockschemat i uppgift 1, då

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{(1+s)(1+5s)}$$

och $v_1 = v$ medan $v_2 = 0$. Då den inre återkopplingen ej ingår, dvs ingen kaskadreglering, väljs i stället en PI-regulator

$$F(s) = K_i \frac{1+s}{s}$$

- Visa att kretsöverföringen för de båda reglerstrategierna blir relativt lika, där kretsöverföringen för kaskadregleringen definieras som överföringsfunktionen från reglerfelet, efter den yttre jämföraren längst till vänster i figuren ovan, till utsignalen y . (2 p)
- Bestäm överföringsfunktionen från laststörningen v_1 som adderas före $G_1(s)$ till utsignalen y ($v_2 = r = 0$) och jämför med överföringsfunktionen från laststörning v som adderas före $G(s)$ till utsignalen y i blockschemat i uppgift 1, dvs samma system och laststörning men utan kaskadreglering. Studera speciellt lågfrekvensasymptoten med och utan kaskadreglering. Kommentera den inre återkopplingens betydelse när det gäller förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar. (2 p)

En inverterad pendel med längden ℓ och massan m styrs med accelerationen u i horisontell led. Låt θ vara vinkeln mellan vertikalen och pendeln. Momentbalans ger följande dynamik mellan utsignalen θ och insignalen u

$$m\ell^2\ddot{\theta} = mg\ell \sin \theta - mu\ell \cos \theta$$

- a) Formulera en olinjär tillståndsmodell med tillståndsvariablerna $x_1 = \theta$ och $x_2 = \omega = \dot{\theta}$. Visa att en linjär tillståndsmodell kring arbetspunkten $\theta_0 = 0$ ger följande systemmatris och insignalmatris

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\ell \end{bmatrix} \quad (1 \text{ p})$$

- b) Antag i fortsättningen att $\ell = g$ och approximera g med 10 m/s^2 . Visa att den linjära tillståndsmodellen är styrbar. (1 p)

- c) Dimensionera för den linjära tillståndsmodellen en tillståndsåterkoppling

$$u = -\ell_\theta \theta - \ell_\omega \omega + K_r r$$

så att det återkopplade systemets poler placeras som en dubbelpol i $s = -\alpha$. (3 p)

- d) Hur påverkas det återkopplade systemets styrsignalaktivitet vid högfrekventa referenssignaländringar av polplaceringens avstånd från origo i vänstra halvplanet. (1 p)

Lösning till tentamen i Reglerteknik 240531

a) $L(s) = G(s)F(s) = \frac{s+2}{s^2+2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{s^2+2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s(s+2)} = \frac{1}{s}$

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1}{1+1/s} = \frac{1}{s+1}$$

Stegsvar

$$Y(s) = G_{ry}(s) R(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = (1 - e^{-t}) \mathcal{U}(t)$$

$$y(t_{5\%}) = 1 - e^{-t_{5\%}} = 0.95$$

$$t_{5\%} = -\ln 0.05 = -\ln \frac{1}{20} = \ln 20 = 3.00$$

$$Y = G(V + F(-Y)) \quad (1+GF)Y = GV$$

$$G_{uy}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{s+2}{(s^2+2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{1+1/s} = \frac{s(s+2)}{(s^2+2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+1)}$$

c) Vid cancellation av processmodellen $G(s)$

i regulatorn, dvs $F(s) = G(s)\bar{F}(s)$, där

i detta exempel $\bar{F}(s) = 1/s$ så kvarstår

polerna för $G(s)$ i överförings-

funktionen $G_{uy}(s)$, medan processens poler

försvinner i $G_{ry}(s)$. Cancellation bör *

2. a) $L(s) = \frac{K_p(2+s)}{s(s-2)} = \frac{B(s)}{A(s)}$

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{B(s)}{A(s)+B(s)} = \frac{K_p(2+s)}{s^2 + (K_p-2)s + 2K_p}$$

R-H tabell

s^2 1 $2K_p$ ∴ stabilt då $K_p > 2$

s^1 K_p-2 0

s^0 $2K_p$

b) $L(j\omega) = \frac{K_p(2+j\omega)(-j\omega-2)}{j\omega(j\omega-2)(-j\omega-2)} = \frac{-jK_p(-4+\omega^2-4j\omega)}{\omega(\omega^2+4)} =$

$$= -\frac{4K_p}{(\omega^2+4)} + j\frac{4-\omega^2}{\omega(4+\omega^2)} = \begin{cases} -K_p + j\infty & \omega=0 \\ -0.5K_p & \omega=2 \\ 0 & \omega=\infty \end{cases}$$

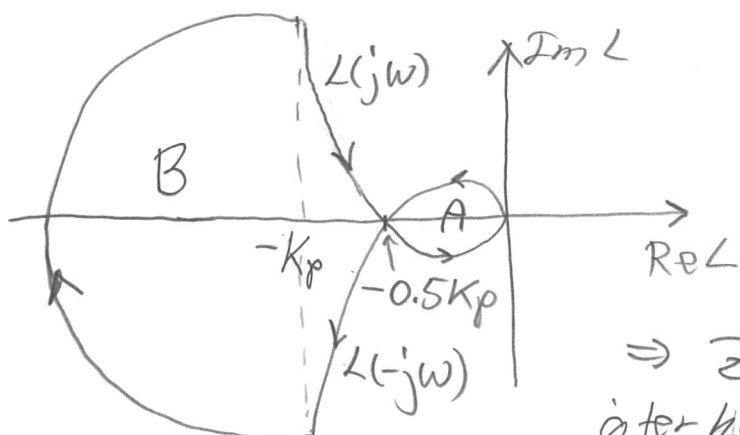
$$L(-j\omega) = \text{Re}(L(j\omega)) - j\text{Im}(L(j\omega))$$

$L(s)$ har en pol i $s=0$. För små s gäller $L(s) = -\frac{K_p}{s}$

$$L(re^{j\theta}) = -\frac{K_p}{re^{j\theta}} = -\frac{K_p}{r}e^{-j\theta} = -\frac{K_p}{r}, \theta=0$$

∴ $L(re^{j\theta})$ skär negativa reellaxeln för $\theta=0$

Allmänt gäller $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



Då $0.5K_p > 1$ hamnar punkten $(-1,0)$ i området A och $N =$ antalet medurs omslingringar $= -1$

$\Rightarrow Z = N + P = -1 + 1 = 0$, dvs stabilt återkopplat system då $K_p > 2$

Då $0.5K_p < 1$, dvs $K_p < 2 \Rightarrow Z = N + P = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$ instabilt återkopplat system

c) Antag nu att $G_0(s) = KG(s)$ och $L_0(s) = K_pKG(s)$. Den nominella förstärkningen $K=1$ kan därför minskas till 0.5 innan systemet blir instabilt då $K_p=4$, eftersom systemet är marginellt stabilt för $L_0(s) = 2G(s)$.

3.

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+0.2s)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(1+0.2j\omega)}$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c \sqrt{1+\omega_c^2} \sqrt{1+(0.2\omega_c)^2}} \quad \angle G(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan(\omega_c) - \arctan(0.2\omega_c)$$

$$\omega_c = 1.4 \text{ rad/s}$$

$$\phi_m = 45^\circ$$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{1}{0.400} = 2.50$$

$$\angle F(j\omega_c) = -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_c) = -135^\circ + 160^\circ = 25^\circ$$

$$a) F_{PD}(s) = K_p \frac{1+sT_d}{1+sT_d/b} \quad \omega_m = \frac{\sqrt{b}}{T_d} = \omega_c = 1.4 \text{ rad/s}$$

$$\angle F(j\omega_c) = \angle F(j\omega_m) = \phi_{\max} = 25^\circ$$

$$b = \frac{1 + \sin \phi_{\max}}{1 - \sin \phi_{\max}} = 2.46 \quad T_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{2.46}}{1.4} = 1.12$$

$$|F(j\omega_c)| = \sqrt{b} K_p \Rightarrow K_p = \frac{|F(j\omega_c)|}{\sqrt{b}} = \frac{2.5}{\sqrt{2.46}} = 1.59$$

$$F_{PD}(\infty) = b K_p = 3.9$$

$$b) F_{PID}(s) = \frac{K_i (1+sT)^2}{s(1+sT/\beta)} \quad F_{PID}(\infty) = K_\infty = K_i T \beta = 3.9$$

$$K_\infty |G(j\omega_c)| = 3.9 \cdot 0.4 = 1.56 \quad \angle F(j\omega_c) = 25^\circ \Rightarrow \beta \approx 5.3$$

$$\text{Enl. Fig } K_\infty |G| (\angle F_{PID}) \quad \text{Fig } \omega_c T (\angle F_{PID}) \Rightarrow \omega_c T \approx 4.0$$

$$T = 4/\omega_c = 4/1.4 = 2.9 \quad K_i = \frac{K_\infty}{T \beta} = \frac{3.9}{2.9 \cdot 5.3} = 0.25$$

$$c) G_{uy}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} \quad \text{Konstant laststörning} \Leftrightarrow s \rightarrow 0$$

$$\text{För små } s \text{ gäller } G(s) \approx \frac{1}{s} \quad F_{PD}(s) \approx K_p \quad F_{PID}(s) \approx \frac{K_i}{s}$$

$$F_{PD}: G_{uy}(s) \approx \frac{1/s}{1+1/s \cdot K_p} = \frac{1}{s+K_p} \rightarrow \frac{1}{K_p} \text{ då } s \rightarrow 0$$

$$F_{PID}: G_{uy}(s) \approx \frac{1/s}{1+1/s \cdot K_i T \beta} = \frac{s}{s^2 + K_i} \rightarrow 0 \text{ då } s \rightarrow 0$$

* PD-reg ger kvarstående fel proportionellt mot $1/K_p$ för konstanta laststörningar medan PID-regulatorn undviker kvarstående fel för samma störning.

I detta exempel är $K_p = 10 \Rightarrow 1/K_p = 0.1$, dvs laststörningens faktor 10 vid kaskadreglering! I

a) Utan inre återkoppling blir

$$L(s) = G(s)F(s) = \frac{1}{(1+s)(1+5s)} K_i \frac{1+s}{s} = \frac{K_i}{s(1+5s)}$$

Med inre återkoppling (kaskadreglering) blir

$$L(s) = G_2(s)G_{ry,1}(s)F_2(s) \text{ där } G_{ry,1}(s) = \frac{10}{1+s} = \frac{10}{1+\frac{10}{1+s}}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{1+10+s} = \frac{10/11}{1+s/11} \approx \frac{0.91}{1+0.09s} \Rightarrow$$

$$L(s) \approx \frac{1}{1+5s} \frac{0.91}{1+0.09s} \frac{K_i}{s} \approx \frac{K_i}{s(1+5s)} \text{ eftersom}$$

tidskonstanten i $G_{ry,1}(s)$ är $1/20$ av tidskonstanten i $G_2(s)$ dvs försumbar, och förstärkningen i $G_{ry,1}(s) = 0.91$ är nära ett.

b) Med kaskadreglering gäller

$$Y = G_2 Z \quad Z = G_1(V_1 + F_1(-F_2 G_2 Z - Z))$$

$$(1 + G_1 F_1 + G_1 F_1 G_2 F_2) Z = G_1 V_1 \quad G = G_1 G_2$$

$$\frac{Y}{V} = G_{uy} = \frac{G}{1 + G_1 F_1 + G_1 F_1 F_2} \quad \text{För små } s \text{ gäller } G(s) \approx 1 \quad G_1(s) \approx 1$$

$$\text{dvs } G_{uy}(s) \approx \frac{1}{1 + K_p + K_p K_i / s} = \frac{s}{s(1 + K_p) + K_p K_i} \approx \frac{s}{K_p K_i}$$

Utan kaskadreglering gäller för små s

$$G_{uy}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} \approx \frac{1}{1 + \frac{K_i}{s}} = \frac{s}{s + K_i} \approx \frac{s}{K_i} \quad \text{För } \frac{K_i}{s}$$

(se uppg 3c)

Eftersom $L(s)$ är likvärdiga med och utan kaskadreglering, minskar påverkan av lågfrekventa laststörningar med faktorn $1/K_p$

$$5. g) \quad l\ddot{\theta} = g \sin \theta - u \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{u}{l} \cos \theta$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \cos \theta_0 + \frac{u_0}{l} \sin \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \cos \theta_0 \end{bmatrix} \Delta u$$

Arbetspunkten $\theta_0 = \omega_0 = u_0 = 0$ ger den linjära ^{modell/en}

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1/l \end{bmatrix}}_B u \quad y = \theta = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$b) \quad l = g = 10 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det S = -0.01 \neq 0 \Rightarrow \text{styrbart system}$$

c) $L_u = [l_\theta \quad l_\omega]$ slutna systemets poler

$$\det(sI_n - A + BL_u) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} [l_\theta \quad l_\omega]\right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 - 0.1 l_\theta & s - 0.1 l_\omega \end{bmatrix} = s^2 - 0.1 l_\omega s - 1 - 0.1 l_\theta =$$

$$= (s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 \Rightarrow l_\omega = -20\alpha \quad l_\theta = -10(1 + \alpha^2)$$

$$\begin{aligned} G_{r\theta}(s) &= C(sI_n - A + BL_u)^{-1} B K_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \alpha^2 & s + 2\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 K_r \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 2\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 K_r \end{bmatrix} = \frac{-0.1 K_r}{(s + \alpha)^2} \quad G_{r\theta}(0) = \frac{-0.1 K_r}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow K_r = -10\alpha^2 \end{aligned}$$

d) $G_{ru}(s) = -L_u(sI_n - A + BL_u)^{-1} B K_r + K_r \rightarrow K_r$ då $s \rightarrow \infty$
 K_r växer kvadratisk med α dvs avståndet från origo.