# *Reglerteknik*

## *Kurskod: SSY052, SSY310*

# *Tentamen 2023-06-02*

Tid: 14:00-18:00 Lokaler: Johanneberg

Lärare: Bengt Lennartson, epost: bengt.lennartson@chalmers.se, tel: 0730 - 79 42 26

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 19 och 20 juni kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- De fyra formelblad som ingår i tentamenstesen får också tas med på tentamen och då inkluderande egna handskrivna anteckningar på fram och baksida på de fyra formelbladen, dvs sammanlagt åtta A4-sidor. Datorutskrifter förutom de ingående formlerna och figurerna på de fyra formelbladen är ej tillåtna.

Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola

## 1

En integralprocess

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

ska regleras med en P-regulator $F(s) = K_p$ så att det återkopplade systemet får en önskad snabbhet.

Bestäm kretsöverföringen $L(s)$ och det återkopplade systemets överföringsfunktion $G_{ry}(s)$. Snabbheten kan mätas både i tids- och frekvensplanet. Bestäm överkorsningsfrekvensen $\omega_c$, bandbredden for det återkopplade systemet $\omega_b$, det återkopplade systemets tidskonstant $T$, samt insvängningstiden $t_{5\%}$. Kommentera speciellt relationen mellan det återkopplade systemets snabbhet och frekvenserna $\omega_c$ och $\omega_b$. (3 p)

## 2

En tredje ordningens process ska regleras med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)(1 + s)^2}$$

a) Dimensionera först en PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 50°$. Välj $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$ där $\angle G(\omega_{G150}) = -150°$. Detta ger en nära nog optimal PI-regulator i meningen att laststörningar kompenseras effektivt samtidigt som rimliga stabilitetsmarginaler upprätthålls. (2 p)

*Förenkling med poängavdrag:* Om du inte kan bestämma $\omega_{G150}$, så kan du välja $\omega_c = 0.6$ rad/s.

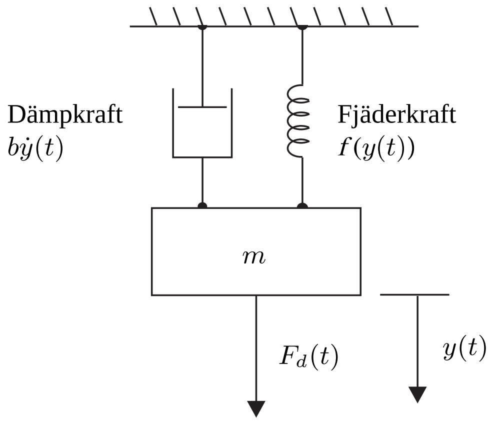
b) Dimensionera som ett alternativ en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

med samma fasmarginal $\varphi_m = 50°$ men 50% högre överkorsningsfrekvens, d.v.s. $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$ (alternativt vid förenkling $\omega_c = 0.9$ rad/s). Välj $\zeta = 1$ och $\beta = 10$. (2 p)

c) Kommentera skillnaderna i förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen genom att studera kriteriterna $J_v = 1/K_i$ och $J_u = F(\infty)$. (1 p)

**3**




En massa med vikten $m$ och positionen $y(t)$ drivs enligt figuren av en drivande kraft $F_d(t)$. Via fjädern utsätts massan också för dämpkraften $b\dot{y}(t)$ och den olinjära fjäderkraften

$$f(y(t)) = k|y(t)|y(t)$$

Den drivande kraften $F_d(t)$ genereras via en hydraulisk motor med överföringsfunktionen

$$F_d(s) = \frac{K_m}{1 + \tau s} U(s)$$

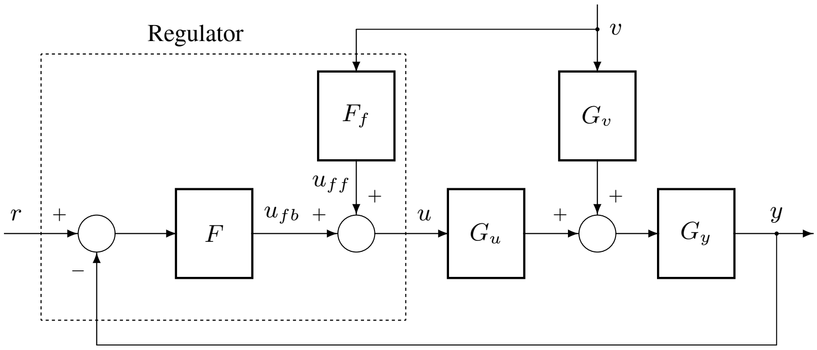
Motorns uppgift är att positionera massan $m$ vid positionen $y = y_0$.

a) Formulera en olinjär tillståndsmodell som beskriver fjäder-massasystemets rörelse inklusive den hydrauliska motorn med $u(t)$ som insignal och massans position $y(t)$ som utsignal. (2 p)

b) Bestäm en linjär tillståndsmodell som beskriver avvikelser kring den önskade positionen $y = y_0$. (2 p)

**4**

En process med en osäker förstärkningsparameter $K_0$ styrs med både fram- och återkoppling enligt följande blockschema




där

$$G_y(s) = \frac{4}{1+3s} \qquad G_u(s) = \frac{K_0}{1+2s} \qquad G_v(s) = 1 \qquad F(s) = \frac{K_i}{s}$$

Förmågan att dämpa lågfrekventa laststörningar $v(t)$ ska undersökas då framkoppling ingår, jämfört med situationen då enbart återkoppling utnyttjas.

a) Bestäm frekvensfunktionens belopp som funktion av $K_i$, $K_0$ och $\omega$ för det återkopplade systemet från laststörningen $v$ till utsignalen $y$ för låga frekvenser (lågfrekvensasymptoten) då enbart återkoppling ingår, d.v.s. $F_f = 0$. (1 p)

b) Bestäm en statisk framkoppling $F_f$ då förstärkningen i $G_u$ antas ha det nominella värdet $K$, medan det verkliga värdet $K_0$ är osäkert på grund av variationer i processmodellen. (1 p)

c) Bestäm samma lågfrekvensasymptot som i uppgift a) då även framkopplingen $F_v$ från uppgift b) ingår. (1 p)

d) Bestäm kvoten mellan de båda lågfrekvensasymptoterna då framkoppling ingår jämfört med fallet utan framkoppling. (1 p)

e) För vilka värden på förstärkningen $K_0$ ger framkopplingen en positiv inverkan på förmågan att dämpa störningar, jämfört med fallet då endast återkoppling ingår. Antag att förstärkningarna $K_0$ och $K$ är positiva. (1 p)

**5**

En instabil kemisk process som ges av tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = 0.5x(t) + bu(t)$$

ska stabiliseras med en P-regulator $F(s) = K_p$. Antag att $b > 0$.

a) Bestäm det återkopplade systemets pol som funktion av förstärkningen $K_p$ och välj denna förstärkning så att det finns en marginal hos parametern $b$ på en faktor $2.5$ (uppåt och nedåt) innan det återkopplade systemet blir instabilt. (2 p)

b) Bekräfta stabiliteten för det återkopplade systemet med hjälp av Nyquists generella stabilitetskriteriet. (1 p)

c) Skissera principiellt vad som händer med Nyquistkurvan vid ovanstående P-reglering, då en fördröjning introduceras i styrsignalen, d.v.s. $u(t)$ ersätts med $u(t - T_d)$. (För den som ej klarar av föregående deluppgift studeras i stället ett förenklat (vanligt) Nyquistdiagram från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$). (1 p)

**6**

En regulator ska dimensioneras för en farthållare, där fordonets överföringsfunktion är

$$\frac{Y(s)}{F_m(s)} = \frac{2}{1 + 5s}.$$

Kraften från motorn $F_m$ ges av överföringsfunktionen

$$\frac{F_m(s)}{U(s)} = \frac{5}{1 + s}.$$

a) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -L_u x + K_r r$$

då hastigheten $y$ och motorkraften $F_m$ är mätbara signaler som återkopplas i regulatorn. Välj en polplacering så att det återkopplade systemets båda poler hamnar i $s = -\alpha$. (3 p)

b) Kommentera styrsignalaktivitetens koppling till valet av polplacering. (1 p)

# Tentamen Reglerteknik 2023-06-02

BL230602

1 $\quad L(s) = K_p/s \qquad G_{ry}(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)} = \dfrac{K_p/s}{1+K_p/s} = \dfrac{K_p}{s+K_p}$

$$|L(j\omega_c)| = \frac{K_p}{\omega_c} = 1 \Rightarrow \omega_c = K_p$$

$$|G_{ry}(j\omega_b)| = \frac{K_p}{\sqrt{K_p^2+\omega_b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2K_p^2 = K_p^2 + \omega_b^2$$

$$\therefore \omega_b = \omega_c = K_p$$

Stegsvar

$$Y(s) = \frac{K_p}{s+K_p}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+K_p} = \frac{As + AK_p + Bs}{s(s+K_p)}$$

$$\Rightarrow A = 1, \; A + B = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+K_p}\right\} = (1 - e^{-K_p t})\sigma(t)$$

$$y(t_{5\%}) = 1 - e^{-K_p t_{5\%}} = 0.95$$

$$\frac{1}{e^{K_p t_{5\%}}} = 0.05 = \frac{1}{20} \Rightarrow t_{5\%} = \frac{\ln 20}{K_p} = 3.00/K_p$$

$$G_{ry}(s) = \frac{1}{1 + s/K_p} \Rightarrow T = 1/K_p$$

ökat $K_p$ leder till ökat $\omega_c$ & $\omega_b$
men minskat värde på $t_{5\%}$ & $T$

För detta specifika exempel gäller

$$t_{5\%} = \frac{3.00}{\omega_c} = \frac{3.00}{\omega_b} \qquad T = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{\omega_b}$$

dvs ökad snabbhet (mindre tidsparam.)
$\Leftrightarrow$ högre frekvensparam. $\omega_c$ & $\omega_b$.

2. a) $G(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j0.5\omega)(1+j\omega)^2}$

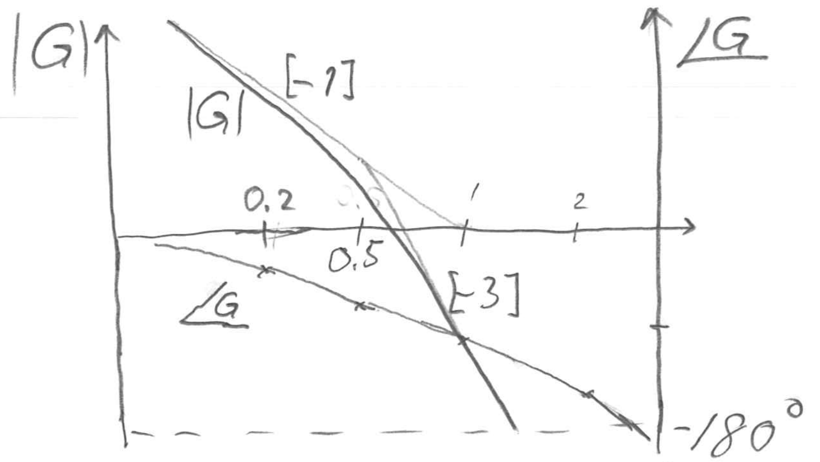
$|G(j\omega_c)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+0.25\omega^2}(1+\omega^2)}$

$\angle G(j\omega) = -\arctan(0.5\omega) - 2\arctan\omega$

$F_{PI}(j\omega) = \dfrac{K_i(1+j\omega T_i)}{j\omega}$

$|F_{PI}| = \dfrac{K_i\sqrt{1+(\omega T_i)^2}}{\omega}$

$\angle F_{PI} = -90° + \arctan \omega T_i$




| $\omega$ | $\angle G$ |
|---|---|
| 0.2 | -28° |
| 0.5 | -67° |
| 1 | -117° |
| 2 | -172° |
| 1.51 | -150.0 |

↑ $\omega_{G150}$

PI $\omega_c = 0.4\,\omega_{G150} = 0.4 \cdot 1.51 = 0.60$ rad/s

$|G(j\omega_c)| = 0.704 \qquad \angle G(j\omega_c) = -78.6°$

$\angle F_{PI}(j\omega_c) = -\angle G(j\omega_c) + \varphi_m - 180° = -51.4°$

$= -90° + \arctan \omega_c T_i \Rightarrow T_i = \frac{1}{\omega_c}\tan 38.6° = 1.33$

$|F_{PI}(j\omega_c)||G(j\omega_c)| = \dfrac{K_i\sqrt{1+(\omega_c T_i)^2}}{\omega_c}\, 0.704 = 1$

$\Rightarrow K_i = \dfrac{0.60}{\sqrt{1+(0.60\cdot 1.33)^2}\cdot 0.704} = 0.666$

$K_\infty = K_p = K_i T_i = 0.666 \cdot 1.33 = 0.886$

PID b) $\omega_c = 1.5 \cdot \omega_{G150} = 0.90$ rad/s

$|G(j\omega_c)| = 0.504$ $\quad \angle G(j\omega_c) = -108.2^\circ$

$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -\angle G(j\omega_c) + \varphi_m - 180^\circ = -21.8^\circ$

Enligt figurerna i FS s3 gäller för $\beta = 10$

$\omega_c \tau = 0.73 \Rightarrow \tau = 0.73/0.90 = 0.813$

$K_\infty |G(j\omega_c)| = 4.8 \Rightarrow K_\infty = 4.8/0.504 = 9.52$

$K_i \tau \beta = K_\infty \Rightarrow K_i = \frac{K_\infty}{\tau\beta} = \frac{9.52}{8.13} = 1.17$

c) $J_v = \frac{1}{K_i}$ förbättras med en faktor $\frac{0.666}{1.17} = 0.57$
dvs drygt 40% till priset av
en ökning av $J_u = K_\infty$ med en faktor
$\frac{9.52}{0.886} = 10.7$ dvs drygt 10 gånger

3. a) $\dot{y} = v$

$\dot{v} = \frac{1}{m}(F_d - k|y|y - bv)$

$(1+s)F_d(s) = K_m U(s) \Rightarrow F_d + \dot{F}_d = K_m U$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{k}{m}|y|y - \frac{b}{m}v + \frac{1}{m}F_d \\ -F_d + K_m u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(y, v, F_d, u) \\ f_2(y, v, F_d, u) \\ f_3(y, v, F_d, u) \end{bmatrix}$$

b) Arbetspunkt $y = y_0 \Rightarrow v_0 = \dot{y}_0 = 0$

$$K_m u_0 = F_{d0} = k|y_0|y_0 = \begin{cases} k y_0^2 & y_0 \geq 0 \\ -k y_0^2 & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

Linjärisering kring $x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ F_{d0} \end{bmatrix}$ $u_0 = \frac{F_{d0}}{K_m}$

$$\frac{\partial}{\partial y}(|y|y)\Big|_{y=y_0} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} y^2\Big|_{y=y_0} & y_0 > 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} y^2\Big|_{y=y_0} & y_0 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2y_0 & y_0 > 0 \\ -2y_0 & y_0 < 0 \end{cases} = 2|y_0|$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{v} \\ \Delta\dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2k}{m}|y_0| & -\frac{b}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta v \\ \Delta F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta v \\ \Delta F_d \end{bmatrix}$$

4. a) $G_{vy} = \frac{G_v G_y}{1+L}$, $L = G_y G_u F = \frac{4}{1+3s} \frac{K_0}{1+2s} \frac{K_i}{s}$

För små $s = j\omega$ gäller då att ($G_v = 1$)

$$G_{vy} \approx \frac{4}{1+4K_0K_i/s} \approx \frac{4s}{4K_0K_i} = \frac{s}{K_0K_i}$$

$$|G_{vy}(j\omega)| \approx \frac{\omega}{K_0K_i}$$

b) $$G_{vy} = \frac{G_y(G_v + G_u F_f)}{1+L} \approx \frac{4(1+K_0F_f)}{1+4K_0K_i/s}$$

Med nominell förstärkning $K$ i $G_u$ i stället för $K_0$ erhålls för små $s$

$$G_{vy} \approx \frac{4(1+KF_f)}{1+4KK_i/s}$$

Statisk framkoppling $\Rightarrow F_f = -\frac{1}{K}$

c) För en godtycklig förstärkning $K_0$ i $G_u$ erhålls då för små $s$

$$G_{vy} \approx \frac{4(1-K_0/K)}{1+4K_0K_i/s} \approx \frac{s(1-K_0/K)}{K_0K_i}$$

$$|G_{vy}(j\omega)| \approx \frac{\omega(1-K_0/K)}{K_0K_i} = \frac{\omega(K-K_0)}{KK_0K_i}$$

d) $$\frac{|G_{vy}|_{FF+FB}}{|G_{vy}|_{FB}} = \frac{\omega(K-K_0)}{KK_0K_i} \cdot \frac{K_0K_i}{\omega} = \frac{K-K_0}{K}$$

e) $|K-K_0| < K \Rightarrow$ positivt bidrag då framkoppling utnyttjas $\Leftrightarrow K_0 < 2K$

5. a) $\dot{x} = 0.5x + bu \qquad (s-0.5)X(s) = bU(s)$

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b}{s-0.5} \qquad L(s) = \frac{K_p b}{s-0.5}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p b/(s-0.5)}{1+K_p b/(s-0.5)} =$$

$$= \frac{K_p b}{s+K_p b-0.5}$$ stabilt då $K_p b - 0.5 > 0$

$b > 0 \Rightarrow$ stabilt återkopplat system

då $K_p > 0.5/b$

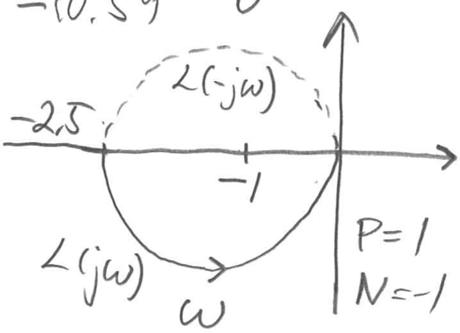
Marginal med en faktor $2.5 \Rightarrow$

$$K_p = 1.25/b$$

b) $$L(s) = \frac{1.25}{s-0.5} \qquad L(j\omega) = \frac{1.25}{j\omega - 0.5} =$$

$$= -\frac{1.25(0.5+j\omega)}{(0.5-j\omega)(0.5+j\omega)} = -\frac{1.25(0.5+j\omega)}{0.25+\omega^2}$$

| $\omega$ | 0 | 0.5 | 1 | 2 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert L(j\omega)\rvert$ | $-2.5$ | $-1.25-j1.25$ | $-0.5-i$ | $-0.15-i0.59$ | 0 |



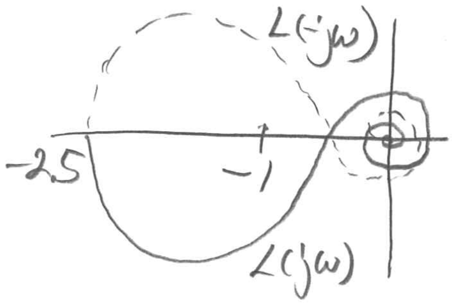

$P=1$
$N=-1$

$Z=N+P=0$

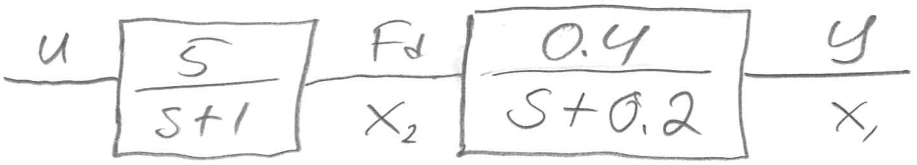
Inga nollställen till $1+L(s)=0$ i högra halvplanet

c) $$L(j\omega) = \frac{1.25}{j\omega-0.5}e^{-j\omega T_d}$$

extra negativ fasvridning



6. a)




$$(s+0.2)X_1(s) = 0.4\,X_2(s)$$

$$(s+1)X_2(s) = 5\,U(s)$$

Inverstransformering

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.2x_1 + 0.4x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 5u \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}^{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$\det(sI_n - A + BL_u) = \qquad y = \underbrace{[1 \;\; 0]}_{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} s+0.2 & -0.4 \\ 5l_1 & s+1+5l_2 \end{pmatrix} = \qquad u = -\underbrace{[l_1 \;\; l_2]}_{L_u}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + K_r r$$

$$= s^2 + (0.2+1+5l_2)s + 0.2 + l_2 + 2l_1 = (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$$

$$2\alpha = 1.2 + 5l_2 \Rightarrow \underline{l_2} = 0.2(2\alpha - 1.2) = \underline{\underline{0.4\alpha - 0.24}}$$

$$\alpha^2 = 0.2 + l_2 + 2l_1 \Rightarrow \underline{l_1} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 0.2 - 0.4\alpha + 0.24) =$$

$$= \underline{\underline{0.5\alpha^2 - 0.2\alpha + 0.02}}$$

$$G_{ry}(s) = C(sI_n - A + BL_u)^{-1}BK_r$$

$$= \frac{[1 \;\; 0]\begin{bmatrix} s+1+5l_2 & 0.4 \\ -5l_1 & s+0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5K_r \end{bmatrix}}{(s+\alpha)^2} = \frac{2K_r}{(s+\alpha)^2}$$

$$G_{ry}(0) = 2K_r/\alpha^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{K_r = 0.5\alpha^2}}$$

b)

$$G_{ru}(s) = -L_u(sI_n - A + BL_u)^{-1}BK_r + K_r \qquad u(0) = \lim_{s\to\infty} s\,\overbrace{G_{ru}(s)\underbrace{\frac{1}{s}}_{R(s)}}^{U(s)}$$

$= K_r = 0.5\alpha^2$, dvs $K_r$ växer kvadratiskt med $\alpha$.
Snabbheten växer linjärt med $\alpha$.