

# Reglerteknik

Kurskod: SSY052, ERE091, SSY310

## Tentamen 2022-06-03

Tid: 14:00-18:00

Lokaler: Johanneberg

Lärare: Mattias Hovgard, epost: hovgard@chalmers.se, tel: 0705-884226

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 20 och 21 juni kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

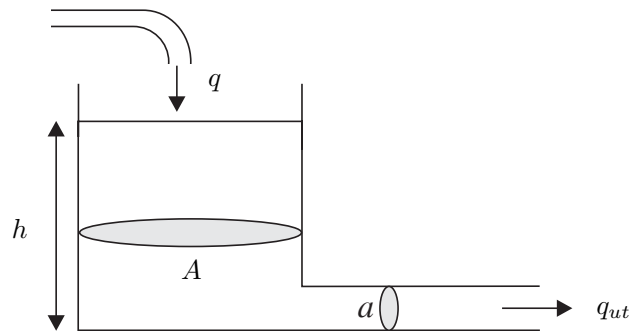
- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- De fyra formelblad som ingår i tentamenstesen får också tas med på tentamen och då inkluderande egna handskrivna anteckningar på fram och baksida på de fyra formelbladen, dvs sammanlagt åtta A4-sidor. Datorutskrifter förutom de ingående formlerna och figurerna på de fyra formelbladen är ej tillåtna.

Institutionen för elektroteknik  
Avdelningen för system- och reglerteknik  
Chalmers tekniska högskola



## 1

Höjden  $h$  i en vattentank med fritt utflöde ska regleras då inflödet  $q$  varierar. Antag att tankens area  $A = 1 \text{ m}^2$ , utloppsarean  $a = 0.1 \text{ m}^2$ , och att gravitationskonstanten  $g$  approximeras till  $10 \text{ m/s}^2$ . Enligt Bernoullis lag gäller dessutom att utströmningshastigheten  $v = \sqrt{2gh}$ , vilket ger utflödet  $a\sqrt{2gh}$ .



- a) Formulera med hjälp av en volymbalans den olinjära tillståndsmodell som bestämmer höjden  $h$  i tanken med flödet  $q$  som insignal. Visa att den linjäriserade modellen för denna olinjära process med ett inflöde  $q_0$  blir

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{s + 0.1/q_0} \quad (2 \text{ p})$$

- b) Antag att ventilen som styr inflödet till tanken har en överföringsfunktion

$$G_q(s) = \frac{1}{s + 1},$$

och dimensionera med hjälp av Routh-Hurwitz kriterium en I-regulator

$$F(s) = \frac{K_i}{s}$$

så att det återkopplade systemet för flödet  $q_0 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$  får en amplitudmarginal  $A_m = 2$ . Notera att kretsöverföringen  $L(s) = G(s)G_q(s)F(s)$ . (2 p)

- c) Hur mycket kan flödet  $q_0$  öka innan det återkopplade systemet blir instabilt för den i uppgift b) dimensionerade integralförstärkningen  $K_i$ ? (1 p)

2

2

En tredje ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$

ska regleras, där uppgiften är att jämföra en PI-regulator med ett antal PID-regulatorer med olika styrsignalaktivitet  $J_u$ , lika med regulatorns högfrekvensförstärkning  $K_\infty$ . Med en önskad fasmarginal  $\varphi_m = 50^\circ$  har överkorsningsfrekvensen  $\omega_c$  varierats så att integralförstärkningen  $K_i$  för respektive regulator maximeras. Resultande  $\omega_c$ ,  $K_i$  och  $J_v = 1/K_i$  för olika val av  $K_\infty$  visas i följande tabell.

	PI	PID	PID	PID	PID	PID
$K_\infty$	1.29	3	6	10	15	20
$\omega_c$	0.606	0.730	0.875	0.984	1.068	1.127
$K_i$	0.574	0.784	0.941	1.059	1.151	1.214
$1/K_i$	1.741	1.276	1.063	0.944	0.869	0.824

a) Bestäm regulatorparametern  $T_i$  och bekräfta valet  $K_i$  ovan för PI-regulatorn

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

så att den angivna optimala överkorsningsfrekvensen  $\omega_c = 0.606$  rad/s erhålls för  $\varphi_m = 50^\circ$ . (2 p)

b) Bestäm regulatorparametrarna  $\tau$  och  $\beta$  samt bekräfta valet  $K_i$  ovan för PID-regulatorn

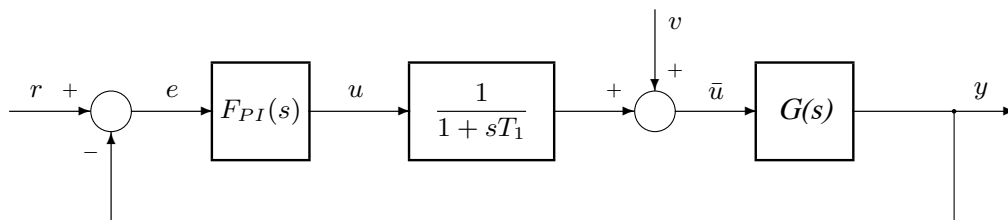
$$F_{PID}(s) = K_i \frac{(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

då  $K_\infty = 10$ , så att den angivna optimala överkorsningsfrekvensen  $\omega_c = 0.984$  rad/s erhålls för  $\varphi_m = 50^\circ$ . (2 p)

c) Rita ett diagram där  $J_v = 1/K_i$  visas som funktion av  $J_u = K_\infty$  för de olika regulatorerna i ovanstående tabell, och föreslå ett lämpligt val av PID-regulator där kompromissen mellan effektiv hantering av laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar belyses. (1 p)

## 3

Betrakta följande återkopplade system, där  $G(s) = 1/(1 + 5s)$  och tidskonstanten i styrdonet  $T_1 = 1$ .



- Välj integraltidskonstanten  $T_i$  i PI-regulatorn  $F_{PI}(s) = K_i(1 + T_i s)/s$  så att den långsamma tidskonstanten i  $G(s)$  kancelleras, dvs välj  $T_i = 5$ . Välj därefter  $K_i$  så att fasmarginalen  $\varphi_m = 45^\circ$ . (2 p)
- Bestäm överföringsfunktionen  $G_{vy}(s)$  från störningen  $v$  till utsignalen  $y$  och speciellt lågfrekvensasymptoten för  $|G_{vy}(j\omega)|$ . (1 p)
- Systemet utrustas nu med en givare som mäter insignalen  $\bar{u}$  till processen  $G(s)$ . Insignalen  $\bar{u}$  är ett flöde och en inre krets för reglering av detta flöde i form av en kaskadreglering införs. Som regulator i den inre kretsen väljs en proportionell regulator  $F(s) = K_p$ .

Rita ett blockschema som illustrerar det kompletta reglersystemet inklusive kaskadregleringen, samt bestäm lågfrekvensasymptoten för  $|G_{vy}(j\omega)|$ . Här antas att samma PI-regulator ingår som dimensionerats i uppgift a). Kommentera kaskadregleringens inverkan på kompenseringen av lågfrekventa laststörningar  $v$ . Något specifikt värde på P-regulatorns förstärkning  $K_p$  efterfrågas ej, men det kan antas att  $K_p$  är väsentligt större än ett. (2 p)

4

4

En döttidsprocess  $G(s) = e^{-sT_d}$  ska regleras med en tidsdiskret I-regulator

$$F_d(z) = K_i \frac{z}{z-1}$$

- a) Diskretisera processmodellen med ett samplingsintervall  $h = 0.5T_d$ , vilket ger en tidsfördröjning på två sampel. (1 p)
- b) Bestäm I-regulatorns förstärkning så att det återkopplade systemets poler hamnar i en dubbelpol i  $z = 0.5$ . (2 p)
- c) Bestäm utsignalen för det återkopplade systemet  $y(kh)$  för  $k = 0, 1, 2$ , och 3 samt  $k = \infty$  då referenssignalen är ett enhetssteg. (2 p)

5

Ett roterande system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{3}{s^2}$$

ska regleras med tillståndsåterkoppling, där det antas att både vinkeln  $\theta$  och vinkelhastigheten  $\omega$  återkopplas.

- a) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -\ell_\theta \theta - \ell_\omega \omega + K_r r$$

så att det återkopplade systemets poler hamnar i en dubbelpol i  $s = -\alpha$ . (3 p)

- b) Bestäm kretsöverföringen  $L(s)$  och den komplementära känslighetsfunktionens högfrekvensasymptot. (1 p)
- c) Jämför denna högfrekvensasymptot med motsvarande asymptot vid PD-reglering och kommentera de erhållna regulatorernas känslighet för högfrekventa icke-modellerade resonanser. (1 p)

Notera att tillståndsåterkopplingen kan betraktas som en ideal PD-regulator utan lågpassfilter. Detta gäller eftersom tillståndsåterkopplingen kan uttryckas som

$$U(s) = -(\ell_\theta + s\ell_\omega)\Theta(s) + K_r R(s),$$

inkluderande en proportionell och en deriverande återkoppling från utsignalen  $\theta$ .

# Lösning till tentamen i Reglerteknik

2022-06-03

BL 220531

1. a)  $\frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt} = q - a\sqrt{2g} \sqrt{h}$

Arbetspunkt  $q_0 = a\sqrt{2g} \sqrt{h_0} \Rightarrow \sqrt{h_0} = \frac{q_0}{a\sqrt{2g}}$

Linjärisering

$$\Delta \dot{h} = -\frac{a\sqrt{2g}}{A} \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h + \frac{1}{A} \Delta q =$$

$$= -\frac{a^2 2g}{2Aq_0} \Delta h + \frac{1}{A} \Delta q = (A=1, a=0.1, g=10)$$

$$= -\frac{0.1}{q_0} \Delta h + \Delta q$$

Laplace  $G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{s + \underbrace{0.1/q_0}_b} \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{s+b}$

b)  $L(s) = \frac{1}{s+b} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{K_i}{s} = \frac{K_i}{s^3 + (1+b)s^2 + bs}$

KE  $1 + A_m L(s) = \frac{s^3 + (1+b)s^2 + bs + A_m K_i}{s^3 + (1+b)s^2 + bs} = 0$

Routh-Hurwitz kriterium

$s^3$	1	b	stabilitetsgräns!
$s^2$	1+b	$A_m K_i$	$b^2 + b - A_m K_i = 0$
$s^1$	$\frac{b+b^2 - A_m K_i}{1+b}$	0	$K_i = \frac{b^2 + b}{A_m} = \left( \begin{matrix} q_0=1, A_m=2 \\ b=0.1 \end{matrix} \right)$
$s^0$	$A_m K_i$		$= 0.055$

c) För vilket  $b=0.1/q_0$  och  $K_i=0.055$  nås stabilitetsgränsen för  $A_m=1$ ?

$$b^2 + b - 0.055 \Rightarrow b = -0.5 + \sqrt{0.25 + 0.055} = 0.0523$$

$q_0 < 0.1/b = 1.91 \text{ m}^3/\text{s}$   $\therefore$  En ökning med 91% innan systemet blir instabilt.

$$2. \quad G(j\omega_c) = \frac{1}{(1+j\omega_c)^3} \quad |G(j\omega_c)| = \frac{1}{(1+\omega_c^2)^{3/2}}$$

$$= (\omega_c = 0.606) = 0.625, \quad \angle G(j\omega_c) = -3 \arctan \omega_c = -93.6^\circ$$

a)

$$F_{PI}(j\omega_c) = \frac{K_i(1+j\omega_c T_i)}{j\omega_c}$$

$$\angle F_{PI}(j\omega_c) = \arctan(\omega_c T_i) - 90^\circ = -180^\circ + \varphi_m - \angle G(j\omega_c)$$

$$= -180^\circ + 50^\circ + 93.6^\circ \Rightarrow T_i = \frac{1}{\omega_c} \tan 53.6^\circ = 2.24$$

$$|F_{PI}(j\omega_c)| = \frac{K_i \sqrt{1+(\omega_c T_i)^2}}{\omega_c} = \frac{1}{|G(j\omega_c)|}$$

$$K_i = \frac{\omega_c}{|G(j\omega_c)| \sqrt{1+(\omega_c T_i)^2}} = 0.574$$

b)

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m + 3 \arctan \omega_c =$$

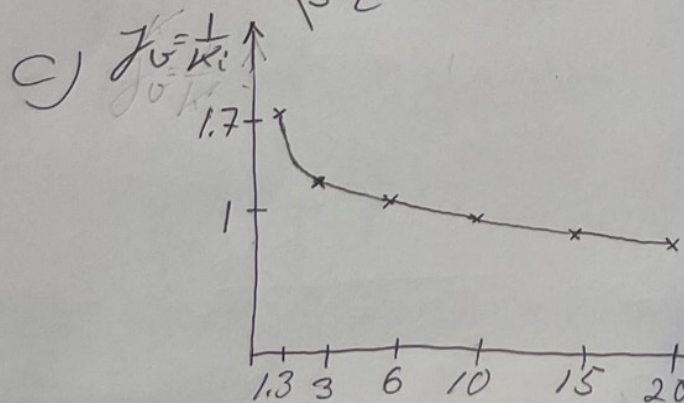
$$= (\omega_c = 0.984) = 3.6^\circ$$

$$K_{\infty} |G(j\omega_c)| = \frac{10}{(1+\omega_c^2)^{3/2}} = 3.62$$

$$PID \text{ Fig 2} \Rightarrow \beta = 7.3$$

$$PID \text{ Fig 1} \Rightarrow \omega_c \tau = 1.27 \Rightarrow \tau = 1.29$$

$$K_i = \frac{K_{\infty}}{\beta \tau} = 1.06$$



\$z\_n = 10\$ minskar \$z\_u\$ med 46% jämfört med PI-reglering, medan \$z\_n = 20\$ bara minskar \$z\_u\$ med 13% jämfört med \$z\_n = 10\$  
 $\Rightarrow K_{\infty} = z_n = 6$  eller 10 rekommenderas

$$3. a) L(s) = \frac{1}{1+5s} \cdot \frac{1}{1+s} \cdot \frac{K_i(1+5s)}{s} = \frac{K_i}{s(1+s)}$$

$$L(j\omega_c) = \frac{K_i}{j\omega_c(1+j\omega_c)} \quad |L(j\omega_c)| = \frac{K_i}{\omega_c \sqrt{1+\omega_c^2}}$$

$$\angle L(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan \omega_c = -180^\circ + \varphi_m = -135^\circ$$

$$\arctan \omega_c = 45^\circ \Rightarrow \omega_c = 1$$

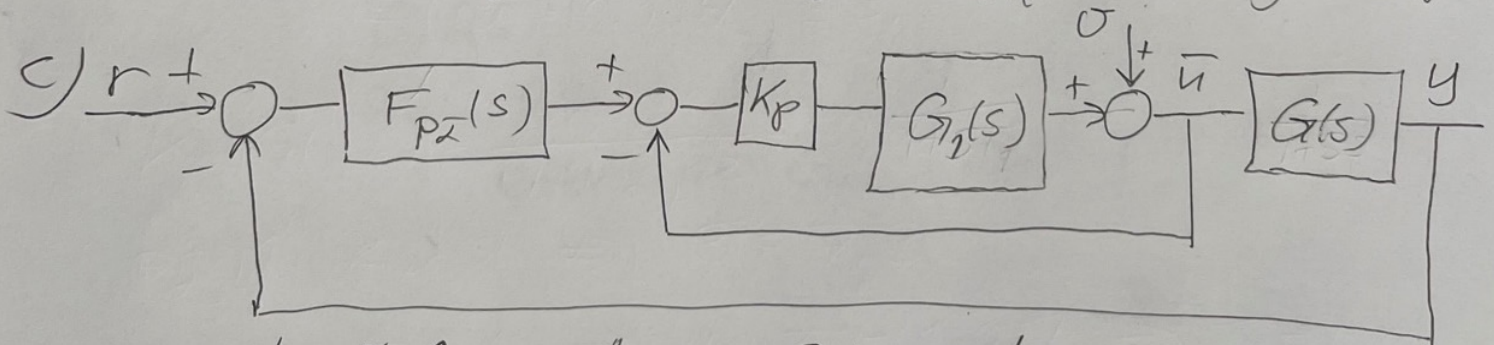
$$|L(j\omega_c)| = \frac{K_i}{1\sqrt{1+1}} = 1 \Rightarrow K_i = \sqrt{2}$$

$$b) G_{oy}(s) = \frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{K_i}{(1+5s)(1+\frac{K_i}{s^2+s})} =$$

$$= \frac{s(1+s)}{(1+5s)(s(1+s)+K_i)}$$

(\*) För låga frekvenser förbättras kompensering av laststörningar med en faktor  $1/K_p$ ,  $K_p \gg 1$  vid kaskadregl.

För  $s$  och  $\omega$  gäller  $G_{oy}(s) \approx \frac{s}{K_i}$  och  $|G_{oy}(j\omega)| \approx \frac{\omega}{K_i}$



$$G(s) = \frac{1}{1+5s} \approx 1 \text{ små } s, \quad G_1(s) = \frac{1}{1+s} \approx 1 \text{ små } s$$

$$F_{PZ}(s) = K_i(1+T_i s)/s \approx \frac{K_i}{s} \text{ för små } s$$

$$\text{För små } s \text{ gäller } \bar{U} = V + K_p(-\bar{U} - \frac{K_i}{s}\bar{U})$$

$$(1 + K_p + K_p K_i/s) \bar{U} = V \Rightarrow Y = \bar{U} = \frac{s}{(1+K_p)s + K_p K_i} V$$

$$\text{För små } s \approx 0 \text{ } \omega \text{ gäller } G_{oy}(s) = \frac{Y}{V} = \frac{s}{K_p K_i} \quad |G_{oy}(j\omega)| = \frac{\omega}{K_p K_i}$$

(\*)



$$4. a) G(s) = e^{-sT_d} \quad T_d = 2h \Rightarrow G_d(z) = z^{-2}$$

Notera att  $G_d(e^{j\omega h}) = e^{-j\omega 2h} = e^{-j\omega T_d} = G(j\omega)$

$$b) L_d(z) = G_d(z)F_d(z) = z^{-2} \frac{K_i z}{z-1} = \frac{K_i}{z(z-1)} = \frac{K_i}{z^2 z}$$

$$G_{reg_d}(z) = \frac{L_d(z)}{1+L_d(z)} = \frac{K_i}{z^2 - z + K_i} = \frac{0.25}{(z-0.5)^2} =$$

för  $K_i = 0.25$

$$= \frac{0.25 z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.25 z^{-2}}$$

$$c) y(kh) - y(kh-h) + 0.25y(kh-2h) = 0.25r(kh-2h)$$

stegsvaret  $r(kh) = 1 \quad k \geq 0 \Rightarrow$

$k$	$y(kh)$
0	0
1	0
2	0.25
3	$0.25 - 0.0625 + 0.25 = 0.4375$
$\infty$	1 eftersom $G_{reg_d}(1) = 1$

$$5. a) G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^2} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\omega} = 3u \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_B u \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$G_{reg}(s) = C(sI_n - A + BL_u)^{-1} BK_r = (L_u = [l_\theta \ l_\omega])$$

$$= \underbrace{[1 \ 0]}_C \underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 3l_\theta & s+3l_\omega \end{bmatrix}^{-1}}_{sI_n - A + BL_u} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3K_r \end{bmatrix}}_{BK_r} = \frac{[1 \ 0] \begin{bmatrix} s+3l_\omega & 1 \\ -3l_\theta & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3K_r \end{bmatrix}}{s^2 + 3l_\omega s + 3l_\theta}$$

$$= \frac{3K_r}{s^2 + 3l_\omega s + 3l_\theta} \quad G_{reg}(0) = K_r/l_\theta = 1 \Rightarrow K_r = l_\theta$$

$$3l_\omega = 2\alpha \Rightarrow l_\omega = \frac{2\alpha}{3} \quad 3l_\theta = \alpha^2 \Rightarrow l_\theta = K_r = \frac{\alpha^2}{3}$$

$$b) L(s) = L_u (sI_n - A)^{-1} B = [l_\theta \ l_\omega] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \left[ \frac{\alpha^2}{3} \quad \frac{2\alpha}{3} \right] \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}{s^2} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha s}{s^2} \rightarrow \frac{2\alpha}{s} \text{ stora } s$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \approx (L \ll 1 \text{ för stora } s) \approx L(s) \approx \frac{2\alpha}{s} \text{ för stora } s$$

c)  $|T(j\omega)|$  har  $[-1]$  lutning för höga frekvenser (HF)

$$\text{PD-reglering} \Rightarrow L(s) = G(s) F_{PD}(s) = \frac{3}{s^2} F_{PD}(\infty)$$

$$|T(j\omega)| \approx |L(j\omega)| \text{ för HF har } \uparrow = K_{reg} = \text{konst.}$$

$[-2]$  lutning.  $\therefore$  PD-reglering med Lågpass filter på derivatans verkan är mindre kända för HF resonans är tillståndet kopp liksom