Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för Elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik

# Tentamen i Reglerteknik SSY310/ERE091

8 juni, 2019, Svensk version

1. Tid: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar (☎1785)
3. Tentamen består av 20 poäng (upplösning 0.5 poäng). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsnivåer

| Poäng | Betyg |
|---|---|
| $\leq 9.5$ | U |
| $10 \dots 12.5$ | 3 |
| $13 \dots 15.5$ | 4 |
| $16 \dots 20$ | 5 |

4. Följande hjälpmedel är tillåtna:
   - Egenhändigt skrivet ”formelblad” **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programmerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
5. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden.

Lycka till!

## Tentamensfrågor

1. Svara kortfattat på följande frågor:

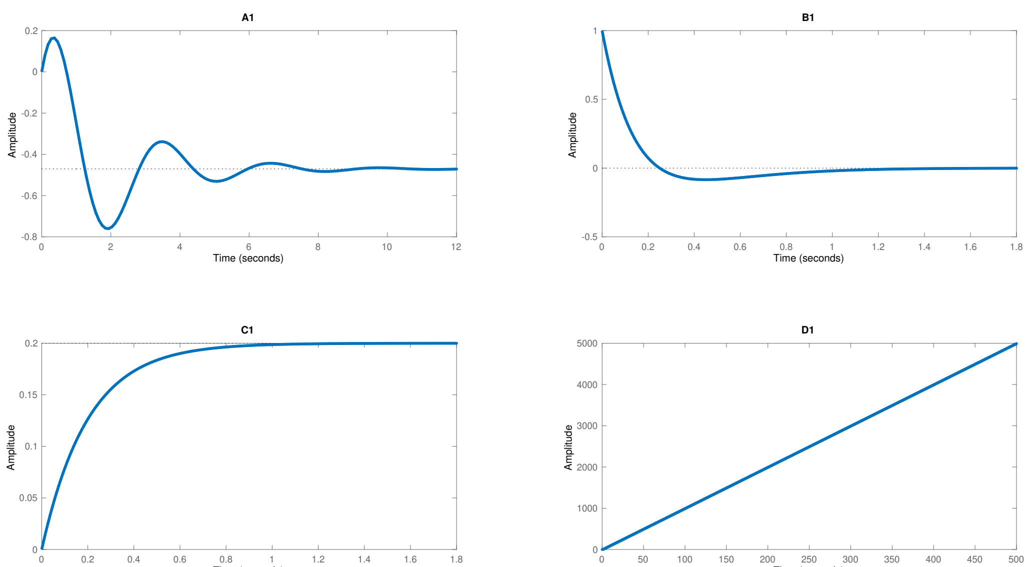
   a) Ange villkor för att en överföringsfunktion ska vara stabil och strikt kausal. (**1 poäng**)
   The differentiation degree in ODE based IO models is strictly larger than thereof the input one. In transfer functions, the pole polynomial has strictly larger degree than the zero polyniomial

   b) Ange om påståendet "en tillståndsbeskrivning är unik" är sant eller falskt och motivera kort. (**1 poäng**)
   False, the state space representation is not unique. There exist infinitely many state space model associated to an input and output pair.

   c) Definiera begreppen Lag- och Leadfilter och förklara fördelarna med att använda dessa. (**1 poäng**)
   Realistic PD and PD compensators, draw of their Bode diagrams. Benefits: realistic PD does not amplify arbitrary high frequency signals (e.g. input noise). Realistic PI has finite steady state amplification.

   d) Förklara metoden med egenvärdesplacering vid design av tillståndsåterkopplingar. (**1 poäng**)
   Given a pre-defined set of (stable) closed-loop eigenvalues, find the feedback gain that moves open loop eigenvalues to the predefined ones. The key is to use the difference of coefficients between the open and the closed loop characteristics equations in controller canonical form.

2. Para ihop stegsvar och bodediagram (motivera kortfattat) (**2 poäng**).

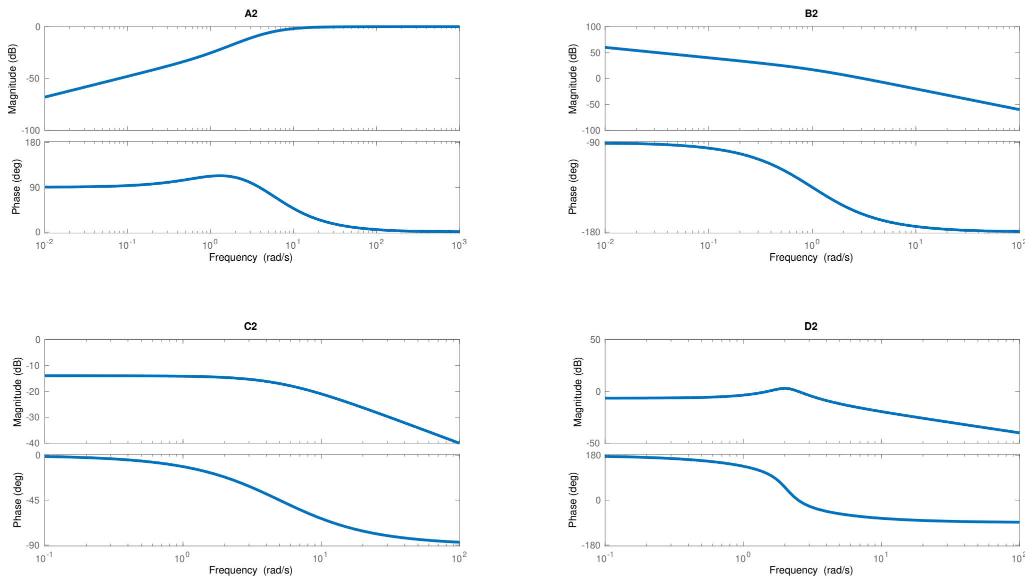



Figur 1: Stegsvar

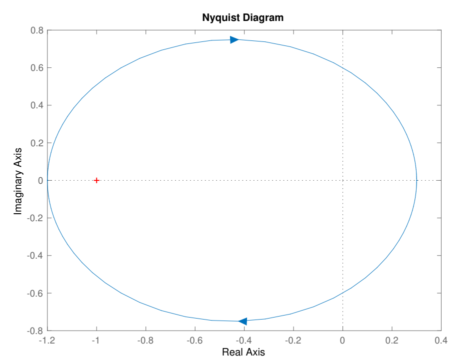
A1-D2, non-minimum phase, damping, B1-A2, FVT, C1-C2, FVT, D1-B2, integrator

3. Betrakta kretsöverföringen $L(s) = \frac{0.3s-2.4}{s+2}$. Rita Nyquistdiagram (**1 poäng**) och avgör stabiliteten vid enhetsåterkoppling. (**1 poäng**).
   See plot and conclusion in Fig. 3

4. Givet en *P-regulator* och $G(i\omega) = \frac{10i\omega+1}{5i\omega+1}$, kopplat som Figur 4.




Figur 2: Bodediagram



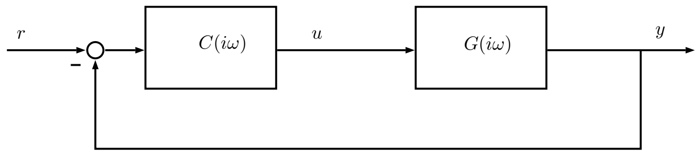

Figur 3: Nyquist plot, $L(s)$ encircling the point $-1$ hence the closed-loop is unstable

a) Beräkna regulatorparametern så att $\varphi_m = 45°$. (**2 poäng**)
There exists no $K_p$ that can ensure this phase margin, due to the fact that $L(s)$ changes phase around zero, hence $-135$ never can be reached with a proportional controller. Numerical calculations fails due to this.

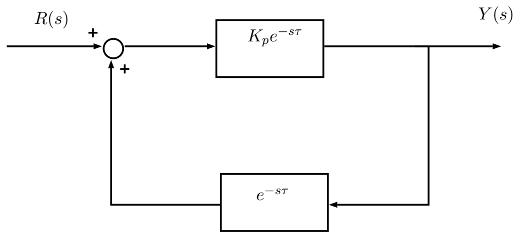
b) Hur stort blir det statiska reglerfelet $|y(\infty) - r(\infty)|/|r(\infty)|$? (**1 poäng**)
We can not design such a $K_p$. Other controllers, $K_p$ will have a steady state error..

c) Hur stor blir amplitudmarginalen med regulatorn i $a$)? (**1 poäng**)
Again, $K_p$ is not existing. With other $K_p$, amplitude margin will be infinitely large.

5. I Figur 5 visas ett återkopplat system. $K_p$ är en proportionell regulatorförstärkning. Bestäm de värden som $K_p$ kan anta för att det slutna systemet ska vara stabilt. Antag $\infty > K_p > 0$ och $\tau > 0$. (tips: lågförstärkningssatsen/Small Gain Theorem). (**1 poäng**)
According to small gain theorem $\max_s |K_p e^{-s\tau}| \cdot \max_s |e^{-s\tau}| < 1 \Rightarrow$ stable, since $|e^{-s\tau}| < 1$ and hence $K_p < 1$ makes the closed loop interconnection stable.




Figur 4: Återkopplat blockschema




Figur 5: Återkopplat system

6. Givet överföringsfunktionen $G(s) = \frac{s-\alpha}{s^2-\beta}$ med $\infty > \beta, \alpha > 0$.

   a) Bestäm om systemmodellen är stabil samt om detta ett minimumfas-system $\forall \alpha, \beta,\ \infty > \alpha, \beta > 0$. (**1 poäng**)
   Not,
   $$det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 - (\alpha+4)\lambda + 4(1+\alpha) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{(\alpha+4) \pm \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha}}{2}$$
   e.g. $\alpha \geq 0$ we get unstable eigenvalues, it is enough to show with one value to answer the question. Unstable for any $\beta$ in the range. Non-minimum phase model since for any $\alpha > 0$ it has unstable zero.

   b) Bestäm den observatörsförstärkning $K$ som ger observatören egenvärden i $\bar{\lambda}_1 = -1$ och $\bar{\lambda}_1 = -2$ oberoende av $\alpha, \beta$. (**2 poäng**)
   Observer canonical form is needed from the transfer function, open loop eigenvalues $\lambda^2 - \beta$ and $det(I\lambda - A + BK) = (\bar{\lambda}+1)(\bar{\lambda}+2) = \bar{\lambda}^2 + 3\bar{\lambda} + 2 \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 3 & 2+\beta \end{bmatrix}$, closed loop eigenvalues will be independent of $\alpha$ and $\beta$.

   c) Bestäm den tillståndsåterkopplingsmatris $L$ som placerar det slutna systemets egenvärden i $\bar{\lambda}_1 = -3$ och $\bar{\lambda}_1 = -4$ oberoende av $\alpha, \beta$. (**2 poäng**)
   Controller canonical form is needed from the transfer function, eigenvalue assignment, $L = \begin{bmatrix} 7 & 12+\beta \end{bmatrix}^T$, closed loop eigenvalues will be independent of $\alpha$ and $\beta$

7. Givet tillståndsrepresentationen och viktfunktionalen nedan,
   $$\dot{x}(t) = 0.5x(t) + u(t)$$
   $$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^2(\tau) + u^2(\tau)R\right) d\tau,$$
   bestäm det $R$ och $\bar{P}$ som resulterar i att den optimala egenvärdesplaceringen blir $-1$ vid tillståndsåterkoppling. (**2 poäng**)
   $$A = 0,5, \quad B = 1, \quad Q = 1, \quad \Rightarrow R = ?, \bar{P} = ?$$
   $$A - B\bar{L} = -1 = 0,5 - 1R^{-1}\bar{P}, \quad \bar{P} = 1,5R$$
   $$\bar{P}A + A^T\bar{P} - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} + Q = 0$$
   $$\bar{P} + 1 - \bar{P}\frac{1,5}{\bar{P}}\bar{P} = 0, \quad \bar{P} = 2, \quad R = \frac{4}{3}$$