Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik, automation och mekatronik

Tentamen i reglerteknik SSY310/ERE091

Fredagen den 12 oktober 2018

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar (☎1088 Simon Pedersen)
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på projektarbete och laboration, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
$10 \ldots 12.5$	3
$13 \ldots 15.5$	4
$16 \ldots 20$	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:
   - Egenhändigt skrivet "formelblad" **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden. Tentamensresultat meddelas (pingpong.chalmers.se) och granskning av tentamensresultaten sker innan 2 veckor.

Lycka till!

Uppgifter

1. Svara kortfattat på följande frågor.

   a) Förklara för- och nackdelarna med att använda en PD-regulator. Vilken är skillnaden mellan en ideal och realiserbar PD-regulator (lead compensator)? (**1 poäng**)

   Speeds up closed-loop time behavior, adds extra phase that is beneficial for stability margin. PD terms can amplify high frequency signals (noises). Lead compensator limits high frequency magnitude.

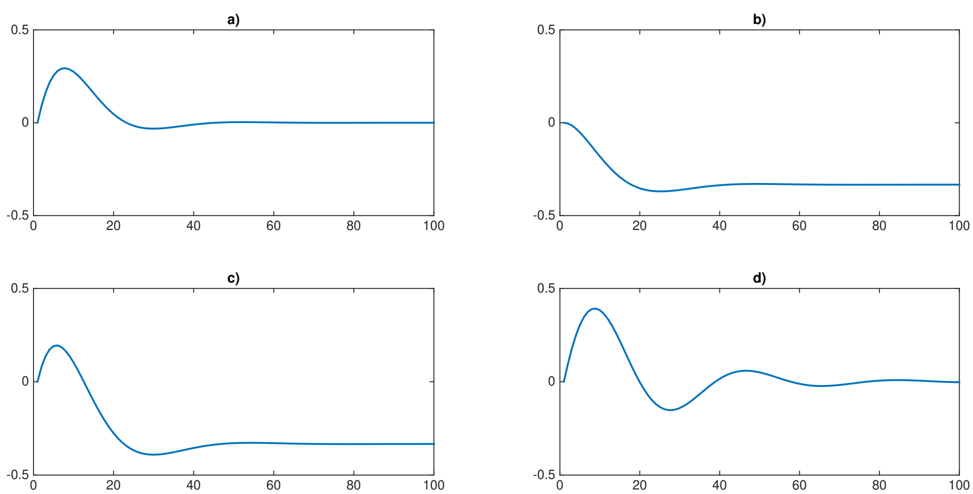
   b) Förklara begreppen strikt kausalt system och tidsinvariant system. (**1 poäng**)

   Causality means the present system answer does not depend on the future signal values, only present and past time instants influences them. Shift invariance w.r.t. time, $g(t) = g(t-\tau)$

   c) Ställ upp ett linjärt tidsinvariant system på observerbar kanonisk tillståndsform {observer canonical state-space representation}. (**1 poäng**)

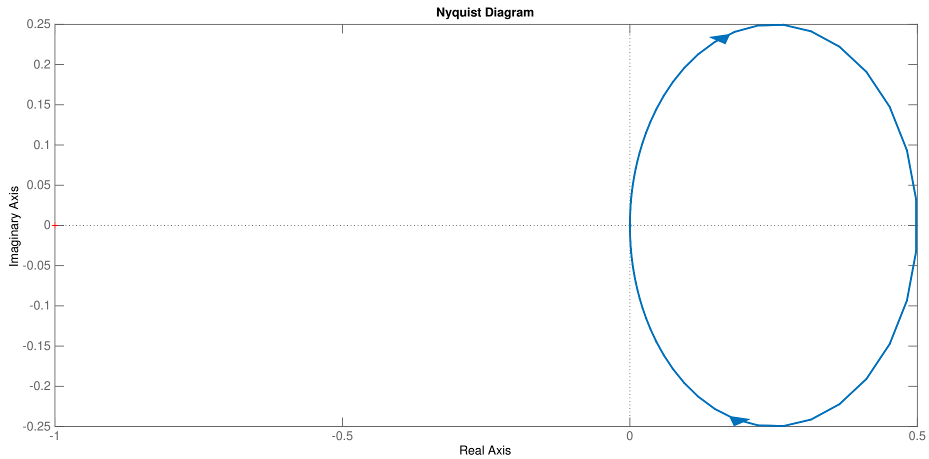
$$\dot{x} = A_o x(t) + B_o(t)u(t),\ y(t) = C_o x,\ A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & 1 \\ -a_n & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}, B_o = \begin{bmatrix} -b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2. Para ihop och förklara!



Figur 1: Stegsvar

Para ihop följande överföringsfunktioner med stegsvaren i figur 1 (förklara kortfattat ditt val!).
$G_1(s) = \frac{1}{-s^2-2s-3}$, $G_2(s) = \frac{s}{s^2+s+3}$, $G_3(s) = \frac{1-s}{-s^2-2s-3}$, $G_4(s) = \frac{s}{s^2+2s+3}$. (**2 poäng**)



Figur 2: Nyquistdiagram

3. Givet ett systems Nyquistdiagram $G(i\omega)$ för icke-negativa ω där $G(i0) = G(i\infty) = 0$, se figur 2.

   $G_4 - a)$, $G_1 - b)$, $G_3 - c)$, $G_2 - d)$, FVT, poles, non-minimum phase properties

   (a) Para ihop en av följande frekvensfunktioner med diagrammet i figur 2 (motivera kortfattat ditt svar), $G_1(i\omega) = \frac{i\omega}{(i\omega)^2+2i\omega+1}$, $G_2(i\omega) = \frac{i\omega}{2i\omega+1}$, $G_3(i\omega) = \frac{1}{2(i\omega)^2+i\omega}$, $G_4(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^3+2(i\omega)^2+i\omega}$. (**1 poäng**)
   G_1 fits the plotted curve, it is a second order differentiator Nyquist plot we can see (phase shift, FVT, IVT).

   (b) Med den valda frekvensfunktionen $G(i\omega)$ från a)-uppgiften, hitta den *ändliga and nollskilda* frekvensen ω_1 som gör att $\varphi(\omega_1) = 0$ (ingen fasförskjutning). (**1 poäng**)
   Find the frequencies at which the input will be in phase with the output, such that $\omega \neq 0$ or $\omega \neq \infty$. $\phi(i\omega_1) = \frac{Im\, G(i\omega_1)}{Re\, G(i\omega_1)} = 0$, take $Im\, G(i\omega_1) = 0$ and some it for ω_1 resulting $1rad/sec$.

4. I figur 4 ses Bodediagrammet för en kretsförstärkning {loop frequency function} $L(i\omega)$ (enhetsåterföring {unity closed-loop feedback} tillämpas). $L(i\omega)$ har inga instabila nollställen. Är det återkopplade systemet stabilt? Motivera ditt svar! (**2 poäng**)

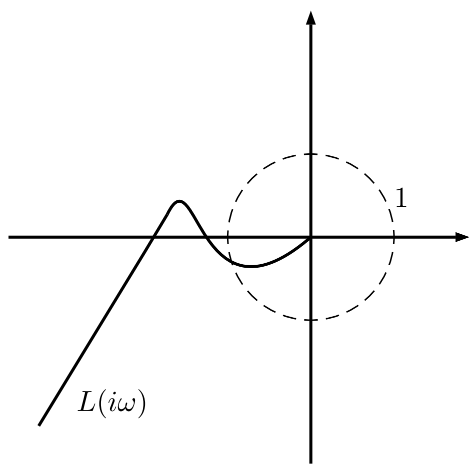
   One way to solve it, is to look into the Nyquist plot see 3 and conclude, that the loop transfer function has no encirclement of -1 point, and no unstable poles. That indicates the closed loop system being stable by Nyquist Theorem.

5. Givet en integrerande regulator $C(i\omega) = \frac{1}{T_i i\omega}$ och ett system med frekvensfunktion $G(i\omega) = \frac{2}{2i\omega+5}$ (med enhetsåterföring, se figur 5). Bestäm T_i så att det återkopplade systemet får fasmarginalen $\varphi_m = 45°$. (**2 poäng**)

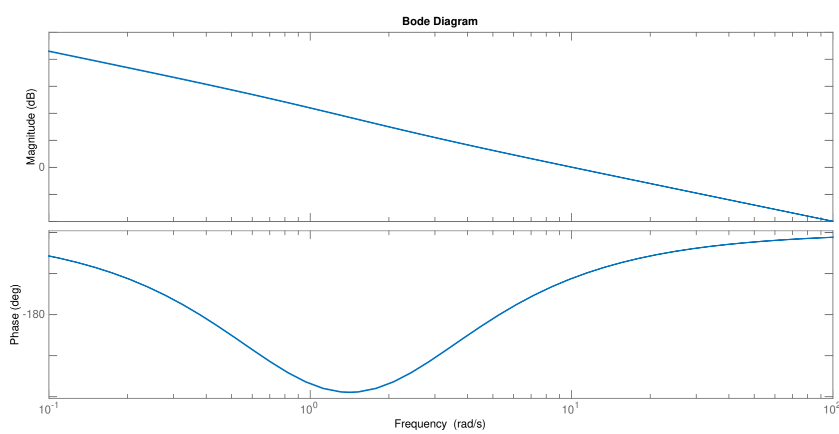
   $\varphi_m = 45° \Rightarrow \phi(\omega_1) = -135° \Rightarrow \omega_1 = 2.5rad/sec$ and $T_i = 1/10$

6. Givet en systembeskrivning där nominella överföringsfunktionen $G_n(s) = \frac{1}{s+1}$ och övre gränsen för multiplikativa osäkerheten $d_m = \frac{s}{0.5(0.33s+1)}$. Vilken av följande två proportionella regulatorer ger robust stabilitet åt det återkopplade systemet, $K_1 = 20$ eller $K_2 = \frac{1}{20}$? (**2 poäng**)

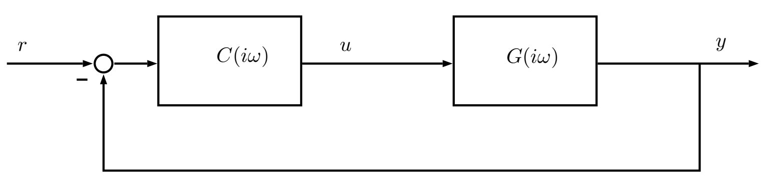
   By plotting the T_n, i.e. the nominal complementary transfer functions with proportinel controllers 1/20 and 20 and the inverse of the overbound on the multiplicative uncertainty δ_m, we can see 1/20 satisfies the condition.



Figur 3: $L(i\omega)$ in Nuquist coordinate frame, for positive frequencies.



Figur 4: Bodediagram för kretsförstärkningen



Figur 5: Återkopplad uppställning

7. Givet en andra ordningens minimal tillståndsrepresentation på diagonal form

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

a) Bestäm $r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2$ om styrbarhetsmatrisen {controllability matrix} $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ och observerbarhetsmatrisen {observability matrix} $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (**1 poäng**)

This means, Need $r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2$ if the controllability matrix is $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_1\lambda_1 \\ r_2 & r_2\lambda_2 \end{bmatrix}$ and $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, -3$ $r_{1,2} = 1, 2$.

b) Är tillståndsrepresentationen internt stabil? Rita ett blockschema för systemet där förstärkningar och signaler inkluderas. (**1 poäng**)

$y(1) = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}} x_0 = 0.1e^2 + e^{-3}$

c) Beräkna autonoma systemets ($u(t) = 0$) utsignal $y(1)$ då $x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \end{bmatrix}^T$. (**1 poäng**)

λ_2 is unstable + blockdiagram

8. Givet systemet

$$m\ddot{y}(t) + k\dot{y}(t) + c_2 y(t) = c_1(u(t) - y(t))$$

och $m = 1kg, c_1 = 1N/m, c_2 = 1N/m, k = 3Ns/m$.

a) Bestäm överföringsfunktionen från $u(t)$ till $y(t)$. (**1 poäng**)

$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

b) Baserat på överföringsfunktionen, ställ upp en tillståndsmodell för systemet på styrbar kanonisk form {controller canonical state-space representation}. (**1.5 poäng**)

$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) Bestäm en tillståndsåterkoppling {state feedback} $u(t) = -Lx(t)$ så att polerna för det återkopplade systemet placeras i $p_1 = p_2 = -1$. (**1.5 poäng**)

$L = \begin{bmatrix} 2-3 & 1-2 \end{bmatrix}$