Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik SSY310/ERE091

Den 31 augusti 2018 fm

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar (☎2163 Johan Kalrsson)
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på projektarbete och laboration, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
$10 \ldots 12.5$	3
$13 \ldots 15.5$	4
$16 \ldots 20$	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:
   - Egenhändigt skrivet ”formelblad” **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden.

Lycka till!

Upgifter

1. Svara kortfattat på följande frågor:

   a) Beskriv några fördelar med Rouths stabilitetskriterium (**1 poäng**)
   In case of IO stability, the coefficients of the characteristics polynomial can be used to conclude stability.

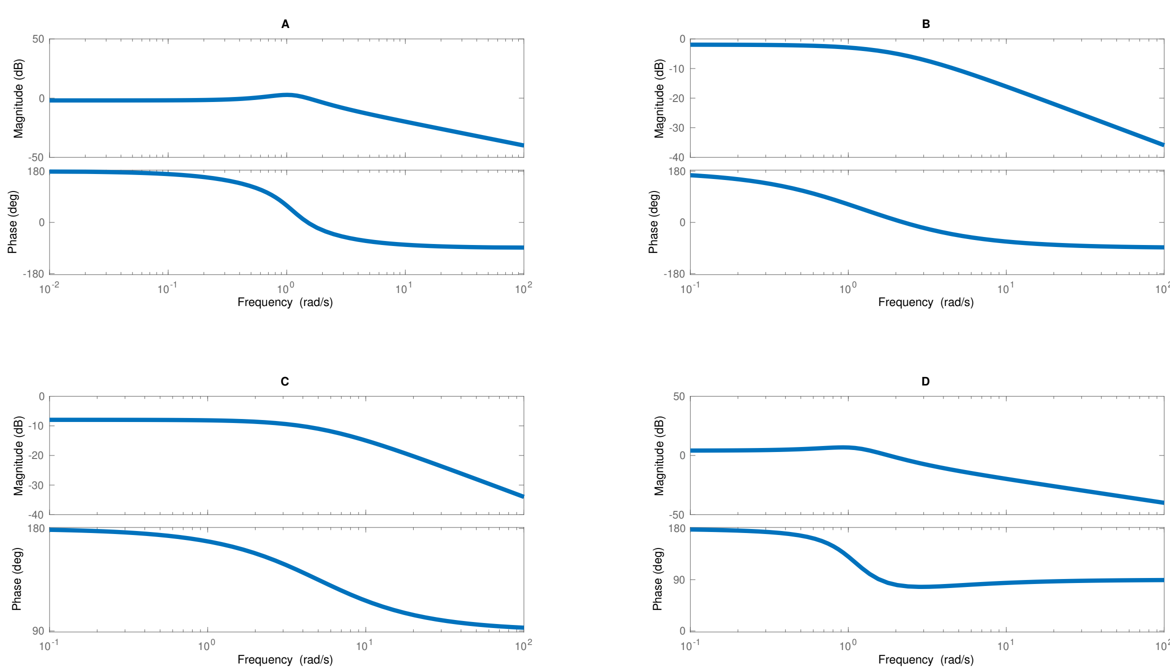
   b) Vad innebär det att en LTI-modell är observerbar? Hur kan observerbarheten undersökas? (**1 poäng**)
   Uniquely by means of measured input and output, we can reconstruct the state trajectory. Kalman rank condition test is a way to do so.

   c) Förklara det förenklade Nyquistkriteriet för stabilitet i återkopplade system (**1 poäng**).
   Based on the loop transfer function we can conclude the closed loop stability. Check the Nyquist plot and its encriclements.

   d) Givet en inverterbar koordinatbytesmatris T, hur påverkar koordinatbytet tillståndsmodellens överföringsfunktion? (**1 poäng**)
   TF is invariant to a similarity state transformation, so the same $G(s)$ stands for the equivalent state space representations. Proof is optional.

$$G(s) = \tilde{G}(s) = \tilde{C}(sI_n - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = CT^{-1}(sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}TB + D =$$
$$CT^{-1}\left(T(sI_n - A)T^{-1}\right)^{-1}TB + D = CT^{-1}(T^{-1})^{-1}(sI_n - A)^{-1}(T)^{-1}TB + D$$
$$C\,(sI_n - A)^{-1}\,B + D = G(s)$$

2. Para ihop och motivera.



Figur 1: Bodediagram

I figur 1 visas frekvensegenskaper hos några system. Vilket Bodediagram matchar vilket dynamiska systemet $G_1(s) = \frac{-2}{s+5}$ $G_2(s) = 1.6\frac{s-1}{s^2+2s+3}$, $G_3(s) = \frac{-s-2}{s^2+s+1.25}$, $G_4(s) = \frac{s-1}{s^2+s+1.25}$? (**2 poäng**)

$1C$ $2B$ $3D$ $4A$, non-minimum phase, final value theorem, relative damping

3. Givet en överföringsfunktion (öppet system) $G(s) = s-1$ och en P-regulator $C(s) = K_p$ med $0 < K_p < \infty$ (enhetsåterkoppling), bestäm ett K_p med hjälp av Nyquist som stabiliserar det sluta systemet (**2 poäng**).

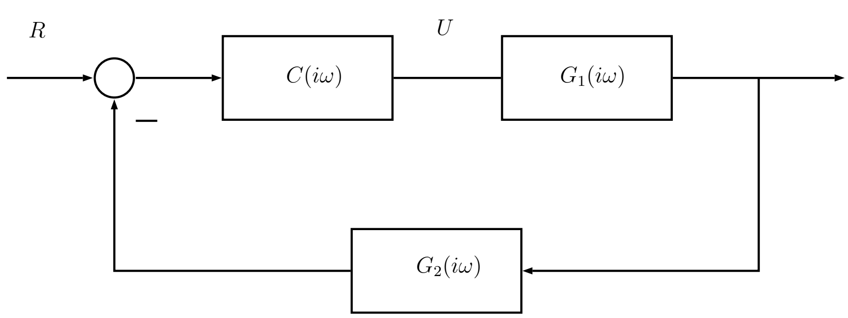
   Multiple solutions. Nyquist contour plot for $L(s) = k(s-1)$ (split the RHP and create the Nyquist curve) by the definition. The curve is a straight line parallel to the Im axis crossing the Re axis at $-K_p$. It shows that if $K_p < 1$ it is stable, no encirclement happens and the closed loop is stable.

4. Givet en *I-regulator*, en processmodell $G_1(i\omega) = \frac{0.5i\omega+2}{2i\omega+5}$ och en sensormodell $G_2(i\omega) = \frac{2}{3i\omega+4}$ i krets enligt figur 2:

   a) Bestäm regulatorparametern så att $\varphi_m = 35°$. (**2 poäng**)
   $C(i\omega) = \frac{A}{i\omega}$, with standard phase margining technique $\varphi(\omega_c) = -180 + 35 = -145$ degree where $\omega_c \approx 1.32$. From about the magnitude diagram we can read $A_i \approx 10$.

   b) Hur stort blir det statiska reglerfelet $y(\infty) - r(\infty)$? (**1 poäng**)
   The loop contains an integrator, so the error is zero between $r_\infty - y_{2,\infty} = 0$ and $r_\infty - y_{1,\infty}/2 = 0$ where y_1 is the output of $g_1 = \mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)\}$.

   c) Vilken amplitudmarginal ger regulatorn i a)? (**1 poäng**)
   $33dB$



Figur 2: Reglersystemets blockschema

5. Givet följande tillståndsmodell:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} x(t)$$

with $0 < |\alpha| < \infty$,

a) Rita ett blockschema som motsvarar tillståndsmodellen, inklusive eventuella integratorer, förstärkningar och signaler. (**1 poäng**)

b) Är tillståndsmodellen asymptotiskt stabil för alla α? (**1 poäng**)
Not (examples or interval as answers), $det(I\lambda - A) = \lambda^2 + 1.5\lambda - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow p_{1,2} = \frac{1}{2}(-1.5 \pm \sqrt{1.5^2 + 2\alpha})$, $\alpha > 0$, it always has a non strictly negative root.

c) Är tillståndmodellen både styrbar och observerbar för alla α? (**2 poäng**)
Not,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{3}{2\alpha} - 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\mathcal{R}) = 0 \Rightarrow \text{ not reachable if } \alpha = -1$$
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{\alpha} \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\mathcal{O}) = 0 \Rightarrow \text{ not observable if } \alpha = 2$$

d) Låt $\alpha = 1$ och bestäm överföringsfunktioen till tillståndsmodellen. (**1 poäng**)
$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, $G(s) = \frac{4s}{s^2+1.5s-0.5}$

e) Låt $\alpha = 1$. Vad blir steady state-utsignalen y_∞ då insignalen är ett steg? (**1 poäng**)
The open loop system is unstable, it will have no steady state value and thus ∞.

6. Betrakta följande tidskontinuerliga system vars tillståndsrepresentation ges av,

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + u^2(t) \right) dt.$$

Bestäm den optimala (stationärtillstånds-LQR) tillståndsåterkoppling som minimerar $J(u)$ genom att tillämpa den diagonala lösningsstrukturen $\bar{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix}$. (**2 poäng**)

By using the CARE where $Q = I_2$, $R = 1$ and $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ with diagonally structured solution matrix, $P = \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix}$ $p_1 = p_2 = \sqrt{3}$, $\bar{L} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$