Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik SSY310/ERE091

Den 6 oktober 2017 em

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar (☎1785)
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på projektarbete och laboration, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
$10 \ldots 12.5$	3
$13 \ldots 15.5$	4
$16 \ldots 20$	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:
   - Egenhändigt skrivet ”formelblad” **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden. Tentamensresultat meddelas och granskning av tentamensresultaten sker den 20 oktober (pingpong.chalmers.se).

Lycka till!

Uppgifter

1. Svara kortfattat på följande frågor.

   a) Givet en SISO-modell $Y(s) = G(s)U(s)$ med en rationell överföringsfunktion $G(s)$, hur undersöks modellens stabilitet? Beskriv kortfattat 2 olika metoder. (**1 poäng**)

   Enumerate and briefly explain only two items out of the following list; (i)the transfer function's poles are at LHP, (ii) its impulse response function $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ is absolute integrable, (iii) $g(t)$ asymptotically tends to zero with time, (iv) Routh's stability criteria.

   b) Vad uttrycks i slutvärdessatsen (antag en stabil modell)? Beskriv satsens innebörd och användning. (**1 poäng**)

   Steady-state behaviour can be obtained from Laplace domain when evaluating a limit, $\lim_{t\mapsto\infty} y(t) = \lim_{s\mapsto 0} sG(s)U(s)$. Easy way to analyze steady state behavior without directly calculating any time function (such as step or impulse).

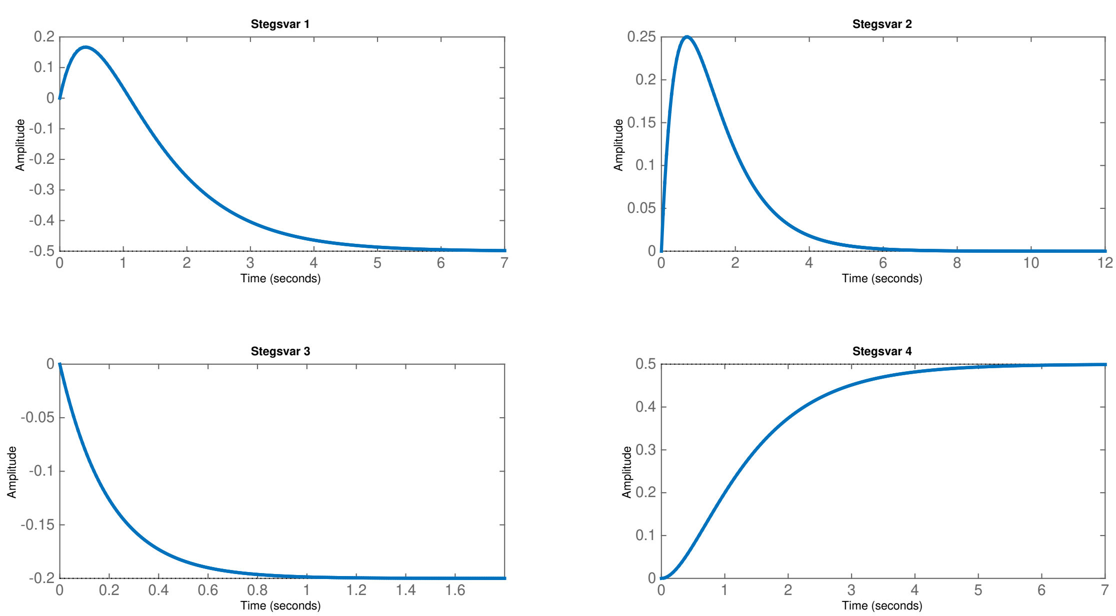
   c) Vad är en LEAD- respektive LAG-kompensator (i kontexten PID-regulator)? (**1 poäng**)

   LEAD and LAG compensators are the realistic versions of PD and PI controllers, respectively. We add an extra lag term in both cases in order to compensate some side effects of the controllers. In case of LEAD we avoid amplifying high frequency signals (e.g. noise) and in case of LAG the steady state infinite magnitude is limited by.

   d) Vad menas med att en överföringsfunktion är icke-minimumfas? Ge exempel! (**1 poäng**)

   Whenever the phase changes more than the minimum amount, i.e. $-\frac{\pi}{2}(n-m)$, we call it non-minimum phase model. E.g. rational transfer functions with unstable zeros or pure (irrational) transfer delay.

2. Para ihop och förklara!



Figur 1: Stegsvar

I figur 1 visas stegsvar som tillhör dynamiska system. Para ihop ett stegsvar med följande överföringsfunktioner (motivera kortfattat ditt val!). $G_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$, $G_2(s) = \frac{s}{s^2+3s+2}$, $G_3(s) = \frac{-1}{s+5}$, $G_4(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$. (**2 poäng**)

G_1- Stegsvar 4,G_2- Stegsvar 2, G_3- Stegsvar 3, G_4- Stegsvar 1

3. Givet överföringsfunktionen $G(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+1)}$,

   a) Vad blir utsignalen $y(t)$ (när alla transienter klingat av) då insignalen är $u(t) = \sin(2t)$ (**1 poäng**)
   $y(t) = A(\omega)sin(\omega t - \varphi(\omega))$, the delay ($\tau = 2$) does not modify the magnitude hence if $\omega = 2$, $A(2) = \frac{1}{2\sqrt{2^2+1}}$, $\varphi(2) = -2 \cdot 2 - arctan\frac{1}{2}$, therefore $y(t) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \sin(2t - 4 - arctan\frac{1}{2})$.

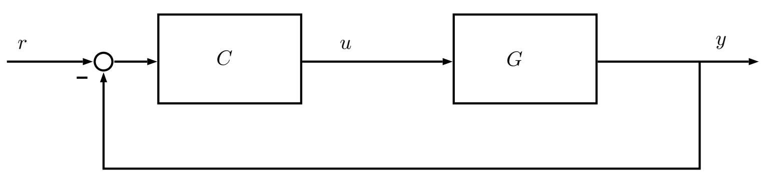
   b) Skissa Bodediagrammet för motsvarande frekvensfunktion (lin-logpapper finns bifogat men är inte obligatoriskt) (**1 poäng**).
   Magnitude plot is not influenced by delay, it follows the shape of $G_0(i\omega) = \frac{1}{i\omega+1}$. The shape of phase plot is constantly decreasing from about 0 rad with $-\tau\omega = 4$ below $-\frac{\pi}{2}$ rad. We know its value at $\omega = 2$ from a)

4. Givet en *P-regulator* och ett system med frekvensfunktion $G(i\omega) = \frac{\frac{10}{3}}{(\frac{10}{3}i\omega+1)(\frac{5}{3}i\omega+1)}$ (med enhetsåterföring, se figur 2).

   a) Bestäm regulatorn så att det återkopplade systemet får fasmarginal $\varphi_m = 30°$. (**2 poäng**)
   $C = K$, with standard phase margining technique $\varphi(\omega_c) = -180 + 30 = -150$ degree where $\omega_c \approx 1.67$. From about the magnitude diagram we can read $K \approx 5$.

   b) Med ditt bestämda K, finn det återkopplade systemets steady-stateutsignal $y(\infty)$ då $r(\infty) = 1$. (**1 poäng**)
   With FVT applied on the closed loop transfer function $y(\infty) = \lim_{s\mapsto 0} sT(s)\frac{1}{s}$, we get $\frac{50}{53}$.

   c) Vilken amplitudmarginal erhålls med regulatorn som i *a*)? (**1 poäng**)
   Infinite



Figur 2: Återkopplat blockschema

5. Givet följande tillståndsbeskrivning:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} x(t)$$

   med $0 < |\alpha| < \infty$,

   a) Är tillståndsmodellen både styrbar och observerbar för alla värden på α? (**2 point**)
   No,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{3}{2\alpha} - 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\mathcal{R}) = 0 \Rightarrow \text{ not reachable if } \alpha = -1$$
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{\alpha} \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\mathcal{O}) = 0 \Rightarrow \text{ not observable if } \alpha = 2$$

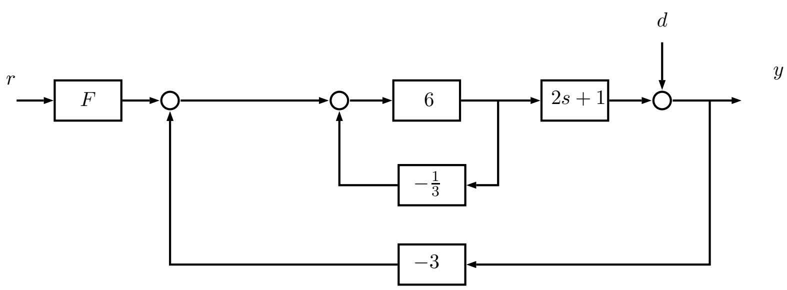
   b) Med $\alpha = 1$, bestäm motsvarande överföringsfunktion till tillståndsmodellen. (**1 point**)
   $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, $G(s) = \frac{4s}{s^2+1.5s-0.5}$

c) Med $\alpha = 1$, vad blir utsignalen i steady-state y_∞ då insignalen är ett enhetssteg? (**1 point**)
The open loop system is unstable, it will have no steady state value and thus ∞.

6. Figur 3 visar ett återkopplat blockschema.

a) Bestäm den känslighets- och den komplementära känslighetsfunktionen för det återkopplade systemet. (**1 poäng**)
$T(s) = \frac{12s+6}{12s+7}$, $S(s) = \frac{1}{12s+7}$

b) Beräkna värdet på förstärkningen F så att $r_\infty = y_\infty$. (**1 poäng**)
FVT from r to y makes $F = \frac{7}{2}$



Figur 3: Blockschema

7. Betrakta följande tidskontinuerliga system vars tillståndsrepresentation ges av,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= u(t)\\ J(u) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^T(t)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} x(t) + u^2(t)\right) dt.\end{aligned}$$

Bestäm den optimala (stationärtillstånds-LQR) tillståndsåterkoppling som minimerar $J(u)$ genom att tillämpa den lösningsstrukturen $\bar{P} = \begin{bmatrix}p_1 & 1\\ 1 & p_2\end{bmatrix}$. (**2 poäng**)

By using the CARE where $Q = I_2$, $R = 1$ and $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ with diagonally structured solution matrix, $P = \begin{bmatrix}p_1 & 1\\ 1 & p_2\end{bmatrix}$

$$A^TP + PA - PBR^{-1}BP + Q = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & 1\\ 1 & p_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p_1 & 1\\ 1 & p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}p_1 & 1\\ 1 & p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} 1 \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & 1\\ 1 & p_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}1 - (p_1+1)^2 & p_1 - (1+p_1)(1+p_2)\\ p_1 - (1+p_1)(1+p_2) & 3 - (p_1+1)^2\end{bmatrix} = 0$$

We can prove the there is solution in the formed claimed for P. This means, the structure of P is not flexible enough to carry out optimal solution

Solution to exercises: ERE091 & SSY310 2018

1 Exam solutions

6a

För den inre loopen har vi att

$$\tilde{Y}(s) = \frac{6}{3}\tilde{R}(s) = 2\tilde{R}(s).$$

Kretsöverföringen för hela systemets ges av $L(s) = 2 \cdot 3 \cdot (2s+1) = 12s+6$. Komplementära känslighetsfunktionen är då

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{12s+6}{12s+7},$$

och känslighetfunktionen

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{12s+7}.$$

6b

Det slutna systemet ges av

$$Y(s) = (-3Y(s) + FR(s)) \cdot 2 \cdot (2s+1) \Rightarrow Y(s) = \frac{2(2s+1)F}{12s+7}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2(2s+1)F}{12s+7}\frac{r_\infty}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{2(2s+1)}{12s+7}Fr_\infty = \frac{2}{7}Fr_\infty,$$

så $F = 7/2$ för att slutvärdet på utsignalen skall vara r_∞.

7

Om integralen

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + Ru^2(t)\right) dt$$

skall minimeras med avseende på tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + By(t),$$

fås lösningen via CARE

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

och den optimala tillståndsåterkopplingen ges av $L_u = R^{-1}BP$. I vårt fall har vi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1.$$

Från CARE får vi alltså,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (p_1+1)^2 & (p_1+1)(p_2+1) \\ (p_1+1)(p_2+1) & (p_2+1)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1-(p_1+1)^2 & p_1-(1+p_1)(1+p_2) \\ p_1-(1+p_1)(1+p_2) & 3-(p_2+1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta system är inte lösbart, så det går inte att finna ett P på den formen som efterfrågas.