Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik SSY310/ERE091

Den 25 augusti 2017 fm

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar (☎1785, `kulcsar@chalmers.se`)
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på projektarbete och laboration, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
$10 \ldots 12.5$	3
$13 \ldots 15.5$	4
$16 \ldots 20$	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:
   - Egenhändigt skrivet ”formelblad” **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden. Tentamensresultat meddelas och granskning av tentamensresultaten sker den 6 september (pingpong.chalmers.se).

Lycka till!

Uppgifter

1. Svara kortfattat på följande frågor.

   a) Vad är den huvudsakliga skillnaden mellan insignal-utsignalstabilitet och intern stabilitet för LTI-tillståndsmodeller? (**1 poäng**)

   IO stability uses the transfer function, the pole polynomial's root to decide on stability. With internal stability concept we analyze the stability of the state space representation. An IO stable model is not necessary internally stable.

   b) Definiera likhetstransformationsmatrisen för LTI-tillståndsmodeller. Hur kopplar den ihop ekvivalenta tillståndsrepresentationer? (**1 poäng**)

   $\tilde{x}(t) = Tx(t)$ with T being invertible. T modifies the state space basis, but leaves the input output behavior intact. $\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}$, D is unchanged.

   c) Förklara kort hur Nyquists förenklade stabilitetskriterium används. (**1 poäng**)

   Create $L(s) = G(s)C(s)$. The system model does not have open loop unstable poles. Then, the closed loop will be stable if the Nyquist plot of $L(s)$ does not encircle the real -1 point. Polar plot for clarity.

   d) Vad menas med att en överföringsfunktion är icke-minimumfas? Ge exempel! (**1 poäng**)

   Whenever the phase changes more than the minimum amount, i.e. $-\frac{\pi}{2}(n-m)$, we call it non-minimum phase model. E.g. rational transfer functions with unstable zeros or pure (irrational) transfer delay.

2. Givet Nyquistkurvan (endast positiva frekvenser är utritade!) och stegsvaret för en LTI-modell i Figur 1.

   a) Vilken överföringsfunktion är plottad: $G_1(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}, G_2(s) = \frac{s}{s^2+3s+2}$, $G_3(s) = \frac{-1}{s+5}$, $G_4(s) = \frac{1-s}{s^2+3s+2}, G_5(s) = \frac{1}{s-5}$? Motivera ditt val kortfattat. (**1 poäng**)

   G_2, based on extremal value, step response shape, FVT

   b) Finn den frekvens ($0 < \omega_0 < \infty$) vid vilken det inte uppstår någon fasförskjutning mellan insignal och utsignal. Använd Nyquistkurvan i Figur 1. (**1 poäng**)

   $\varphi(\omega) = 0 \Rightarrow Im(G(i\omega_0)) = 0$. After finding the Im part of $G(i\omega) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}$

   c) Bestäm och skissa utsignalen i tidsplanet med ω_0 från b) om $u(t) = sin(\omega_0 t)$. (**1 poäng**)

   Replacing ω_0 and calculating the length of the complex vector, $|A(\omega_0)| = 0.33$ is obtained, hence $y(t) = 0.33sin(\sqrt{2}t)$.

3. Givet en *P-regulator* och ett system med frekvensfunktion $G(i\omega) = \frac{\frac{10}{3}}{(\frac{10}{3}i\omega+1)(\frac{5}{3}i\omega+1)}$ (med enhetsåterföring, se figur 2).

   a) Bestäm regulatorn så att det återkopplade systemet får fasmarginal $\varphi_m = 30°$. (**2 poäng**)

   $C = K$, with standard phase margining technique $\varphi(\omega_c) = -180 + 30 = -150$ degree where $\omega_c \approx 1.67$. From about the magnitude diagram we can read $K \approx 5$.

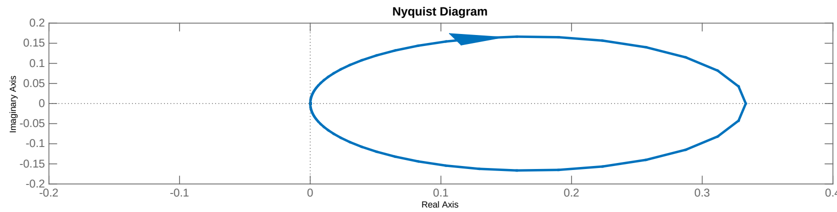
   b) Med ditt bestämda K, finn det återkopplade systemets steady-stateutsignal $y(\infty)$ då $r(\infty) = 1$. (**1 poäng**)

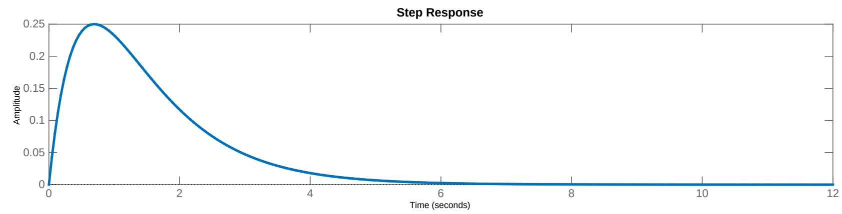
   With FVT applied on the closed loop transfer function $y(\infty) = \lim_{s \mapsto 0} sT(s)\frac{1}{s}$, we get $\frac{50}{53}$.

   c) Vilken amplitudmarginal erhålls med regulatorn som i a)? (**1 poäng**)

   Infinite

4. Givet en överföringsfunktion $G(s) = \frac{2}{s+6}$ och en proportionell regulator $C(s) = 2$ (med enhetsåterföring, se figur 2):





Figur 1: Nyquist and step response plots

a) Är det nominella slutna systemet stabilt? (**1 poäng**)
Yes, the nominal closed loop pole transfer function get the form $T_n(s) = \frac{4}{s+10}$, so $p = -10$ being stable.

b) Det slutna systemet utsätts för en multiplikativ osäkerhet som är uppåt begränsad av $\delta_m(s) = \frac{s}{0.1s+1}$. Är det robust stabilt med den givna regulatorn? (**1 poäng**)
Not, e.g. by plotting Bode diagrams there is a frequency range at which $|T(i\omega)|\delta_m(i\omega) < 1$ is not held with $K = 2$.

c) Använd lågförstärkningssatsen för att bestämma alla robust stabiliserande proportionella regulatorförstärkningar $0 < K < \infty$. (**1 poäng**)
$|T(i\omega)|\delta_m(i\omega) < 1$, $\max T(s) = \lim_{s\mapsto 0} T(s)$ and $\max \frac{1}{\delta_m(s)} = \lim_{s\mapsto\infty} \frac{1}{\delta(s)} \Rightarrow K < \frac{1}{3}$

5. Givet följande tillståndsmodell,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

a) Är tillståndsmodellen stabil? Bestäm motsvarande överföringsfunktion. (**1 poäng**)
Eigenvalues are at $-1, +2$ and hence it is not internally stable (positive real value). $G(s) = \frac{8}{s+1}$, note, it is IO stable!

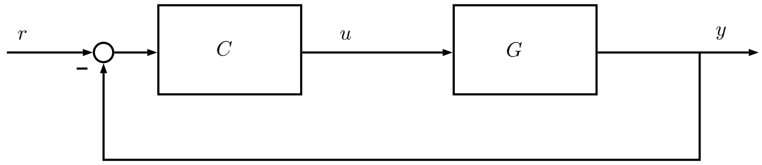
b) Är tillståndsmodellen styrbar och observerbar? (**1 poäng**)
Yes, the system model is controllable $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $det\mathcal{R} \neq 0$ .Not, the second state can not be observed. Observability matrix looses rank, $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Med $u(t) = 0$, bestäm $y(10)$ om $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$(**1 poäng**)

$y(10) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-10} & 0 \\ 0 & e^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 9.08 \cdot 10^{-5}$

d) Diskretisera den givna modellen med samplingsintervallet $T_s = 1$s och bestäm de diskreta matriserna, A_d, B_d, C_d, D_d (**2 poäng**)

With the discretization algorithm, $A_d = \begin{bmatrix} 0.3679 & 0 \\ 0 & 7.389 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 2.528 \\ 3.195 \end{bmatrix}, C_d = C, D_d = 0$



Figur 2: Återkopplat blockschema

6. Givet tillståndsmodell och viktfunktional enligt

$$\dot{x}(t) = 0.5x(t) + u(t)$$
$$J(u, x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(x^2(\tau)Q + u^2(\tau)\right) d\tau$$

Bestäm Q, om det slutna systemets pol är -1 (**1 poäng**).

$A - B\bar{L} = A - BR^{-1}B^T\bar{P} = 0.5 - 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1\bar{P} = -1 \Rightarrow \bar{P} = 1.5$, based on the Ricatti equation (CARE), $0.5\bar{P} + 0.5\bar{P} + Q - \bar{P}^2 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 \Rightarrow Q = 1.5(1.5 - 1) = 0.75$