Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik SSY310/ERE091

Den 1 juni 2017 em

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar (☎1785, `kulcsar@chalmers.se`)
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på projektarbete och laboration, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
$10 \ldots 12.5$	3
$13 \ldots 15.5$	4
$16 \ldots 20$	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:
   - Egenhändigt skrivet ”formelblad” **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden. Tentamensresultat meddelas den 15 juni (pingpong.chalmers.se) och granskning av tentamensresultaten sker den 15 juni kl. 10:00-11:00 i E-huset på våning 6, Blå Rummet, 6414.

Lycka till!

Uppgifter

1. Svara kortfattat på följande frågor.

   a) Definiera och förklara kort begreppen *linjär* och *tidsinvariant*? (**1 poäng**)
   Linear systems obey the principle of signals superposition (scalability and additivity property). Time invariance; given an input sequence that is answered by the system. If the same but time shifted pattern input is applied, the same but time shifted output answer is obtained.

   b) Är en tillståndsbeskrivning unik? Motivera kort. (**1 poäng**)
   Not. There exists infinitely many state space realization to capture an input-output behaviour. State transformation creates relationship among them.

   c) Förklara kort hur Nyquists förenklade stabilitetskriterium används. (**1 poäng**)
   Create $L(s) = G(s)C(s)$. The system model does not have open loop unstable poles. Then, the closed loop will be stable if the Nyquist plot of $L(s)$ does not encircle the real -1 point. Polar plot for clarity.

   d) Förklara begreppen LEAD- och LAG-kompensator. (**1 poäng**)
   LAG compensator is a realistic PI, the steady state ($\omega \mapsto 0$) gain is finite (unlike ideal PI controller). LEAD compensator, realistic PD where high frequency magnitude is finite (unlike ideal PD with larger and larger magnitude amplifications). Their formulas and Bode plots.

2. Givet tre överföringsfunktioner $G_1(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+2}, G_2(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}, G_3(s) = \frac{1-s}{s^2+3s+2}$ med stegsvar och Bodediagram (se figur 1), matcha överföringsfuntionerna med stegsvar och Bodediagram. Motivera ditt val kortfattat. (**2 poäng**)

   A-D, B-F, C-E based on FVT and non-minimum phase properties, such as unstable zeros.

3. Givet en I-regulator $C(i\omega) = \frac{K}{i\omega}$ och ett system med frekvensfunktion $G(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2+\frac{1}{2}(i\omega)+1}$ (med enhetsåterföring, se figur 2).

   a) Bestäm K så att det återkopplade systemet får fasmarginal $\varphi_m = 45°$. (**2 poäng**)
   Set $K = 1$ first, the cross over frequency based on phase margining has to be set to $\varphi(\omega_c) = -180 + 45 = -135$ degree where $\omega_c \approx 0.78$, the value from magnitude diagram can be read as $A(\omega_c)|_{K=1}$dB. Lowering the magnitude diagram by $K \approx 0.4311$.

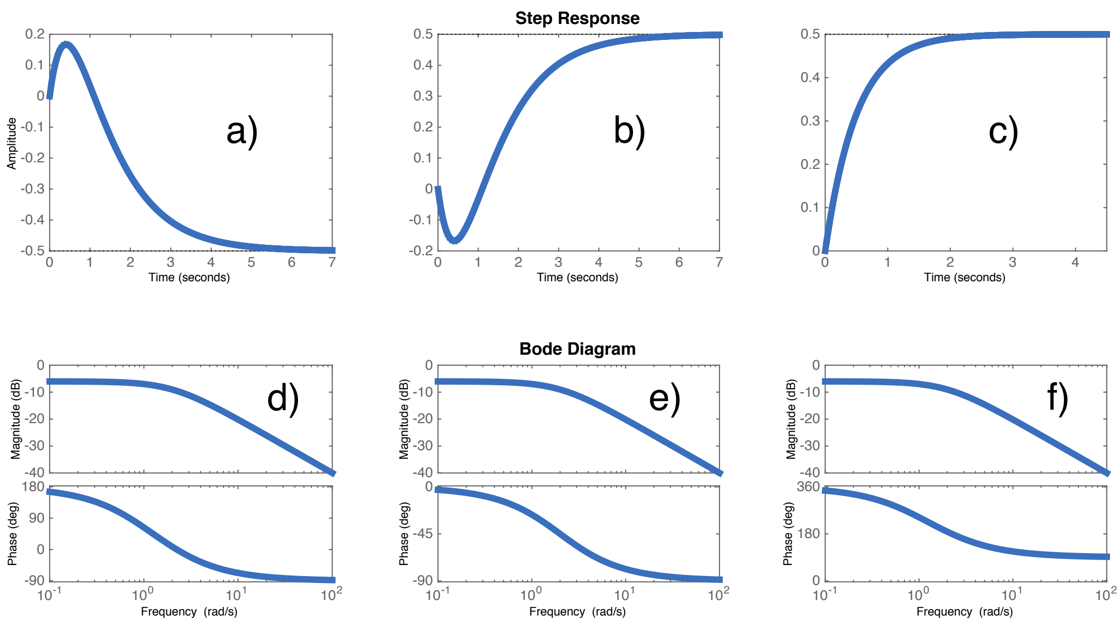
   b) Med ditt bestämda K, finn det återkopplade systemets steady-stateutsignal $y(\infty)$ då $r(\infty) = 1$. (**1 poäng**)
   The loop contains an integrator, and hence there wont be steady state error in output tracking. $y(\infty) = r(\infty)$.

   c) Vilken amplitudmarginal erhålls med K som i a)? (**1 poäng**)
   $\omega_p i = 1$ gives $A_m = \frac{1}{2K}, A_m|_{K=0.4311} = 1.16 \approx 1.3$ dB.

4. Givet en överföringsfunktion $G(s) = \frac{\alpha}{s-\beta}$ och en proportionell regulator $C(s) = \kappa$ (med enhetsåterföring, se figur 2), och $\infty > \alpha, \beta, \kappa > 0$ är reella skalärer:

   a) Bestäm de κ så att det slutna systemet är stabilt *och* åstadkommer asymptotisk referenssignalföljning $r(\infty) = y(\infty)$ (**1 poäng**)
   $T(s) = \frac{\kappa\alpha}{s-\beta+\kappa\alpha} \Rightarrow \kappa > \frac{\beta}{\alpha}$. FVT says (step response reference) $y(\infty) = \lim_{s\mapsto 0} sT(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\mapsto 0} \frac{\kappa\alpha}{s-\beta+\kappa\alpha} = \frac{\kappa\alpha}{\kappa\alpha-\beta}$ hence perfect tracking can only be reached if $\beta = 0$ that contradicts to the assumptions, no proportional κ can satisfy this. Note, $\beta = 0$ would mean a pure integrator in open loop.

   b) Det slutna systemet utsätts för en multiplikativ osäkerhet som är uppåt begränsad av $\delta_m(s) = \frac{\alpha s}{s+\beta}$. Under vilket villkor på κ är det slutna systemet robust stabilt? (**1 poäng**)



Figur 1: Plots

$|T(s)|\delta_m(s) < 1$, we solve it by small gain theorem (note, other solution may check cross over frequency and enforce multiplicative test accordingly). Here, $T(s)$ is a first order low pass lag, its maximum magnitude is reached while $s \mapsto 0$, $\max |T(s)| = \frac{\kappa\alpha}{\kappa\alpha-\beta}$. On the other hand, $\max \delta_m(s) = \lim_{s\mapsto\infty} \frac{\alpha}{1+\beta/s} = \alpha$. Consequently, $\frac{\kappa\alpha}{|\kappa\alpha-\beta|}\alpha < 1$ since $\kappa\alpha - \beta > 0 \Rightarrow \frac{\kappa\alpha}{\beta-\kappa\alpha}\alpha < 1$ $\kappa < \frac{\beta}{\alpha(1+\alpha)}$

c) Det slutna systemet utsätts för en additiv osäkerhet som är uppåt begränsad av $\delta_a(s) = \frac{\alpha s}{s+\beta}$. Under vilket villkor på κ är det slutna systemet robust stabilt? (**1 poäng**)
$|C(s)S(s)|\delta_a(s) < 1$, $C(s)S(s) = \kappa\frac{s-\beta}{s-\beta+\kappa\alpha}$ this admits a maximum while $s \mapsto 0 \Rightarrow$ hence the test $\frac{\kappa\beta}{\beta-\alpha\kappa}\alpha < 1$ yielding $\kappa < \frac{\beta}{\alpha(1+\beta)}$

5. Givet följande tillståndsmodell på styrbar kanonisk form:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

a) Bestäm om tillståndsrepresentationen är asymptotiskt stabil. (**1 poäng**)
Stable, $det(\lambda I_2 - A) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$ real part is negative.

b) Bestäm överföringsfunktionen. Analysera polerna; är systemet insignal-utsignalstabilt? Är det icke-minimumfas? (**1.5 poäng**) $G(s) = C(sI_2 - A)^{-1}B + D = \frac{s^2+3s+3}{s^2+2s+3} = \frac{b(s)}{a(s)}$ (do not forget to add

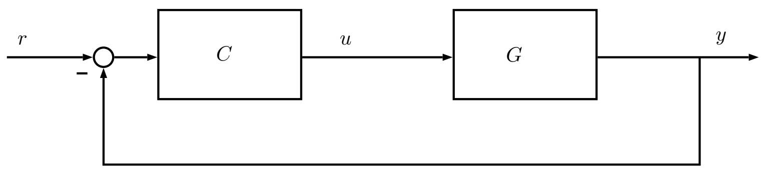
$D = 1!$), roots for $a(s)$ results in the same pole locations as the eigenvalues, it is IO stable too. It has 2 zeros but at LHP, $b(s) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1.5 \pm i0.866$, so the system is of minimum phase one.

c) Är tillståndsbeskrivningen av minimal ordning? (**1 poäng**)

It is controllable, (canonical form!), and observable since $rank \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = 2$. Hence the representation is of minimal order.

d) Bestäm en tillståndsåterkoppling, $u(t) = -Lx(t) + L_r r(t)$ som placerar det slutna systemets egenvärden i $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Bestäm ett förfilter L_r så att referenssignalen följs asymptotiskt felfritt. (**2 poäng**)

Open loop characteristics polynomial $\lambda(s) = s^2 + 2s + 3$, and the closed loop one as $\bar{\lambda}(s) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow \ell_1 = 3 - 2 = 1, \ell_2 = 2 - 3 = -1$. $L_r = (D - (C - DL)(A - BL)^{-1}B) = 2/3$



Figur 2: Återkopplat blockschema

6. Givet tillståndsmodell och viktfunktional enligt

$$\dot{x}(t) = 0.5x(t) + u(t)$$
$$J(u, x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x^2(\tau)Q + u^2(\tau) \right) d\tau$$

Bestäm Q, om det slutna systemets pol är -1 (**1.5 poäng**).

$A - B\bar{L} = A - BR^{-1}B^T\bar{P} = 0.5 - 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1\bar{P} = -1 \Rightarrow \bar{P} = 1.5$, based on the Ricatti equation (CARE), $0.5\bar{P} + 0.5\bar{P} + Q - \bar{P}^2 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 \Rightarrow Q = 1.5(1.5 - 1) = 0.75$