Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik SSY310/ERE091

Den 26 augusti 2016 fm

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar (☎1785, `kulcsar@chalmers.se`)
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på inlämningsuppgift 1-2, projektarbete och laboration 1-2, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration 1-2.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
$10 \ldots 12.5$	3
$13 \ldots 15.5$	4
$16 \ldots 20$	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:
   - Egenhändigt skrivet ”formelblad” **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
   - Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
   - Beta, Physics handbook.

   Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsningsanteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.
6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden. Tentamensresultat meddelas den 2 september (pingpong.chalmers.se). Granskning av tentamensresultaten sker den 5 september kl. 10:00-11:00 i E-huset på våning 5, med Johan Karlsson.

Lycka till!

Uppgifter

1. Svara kortfattat på följande frågor.

   a) Betrakta ett ändlig-dimensionellt linjärt tidsinvariant system med ett impulssvar som är absolut integrerbart, dvs. $\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau < \infty$ är ändlig. Vilken systemegenskap följer detta påstående? (**1 poäng**)

   b) Vad är slutvärdessatsen? (**1 poäng**)

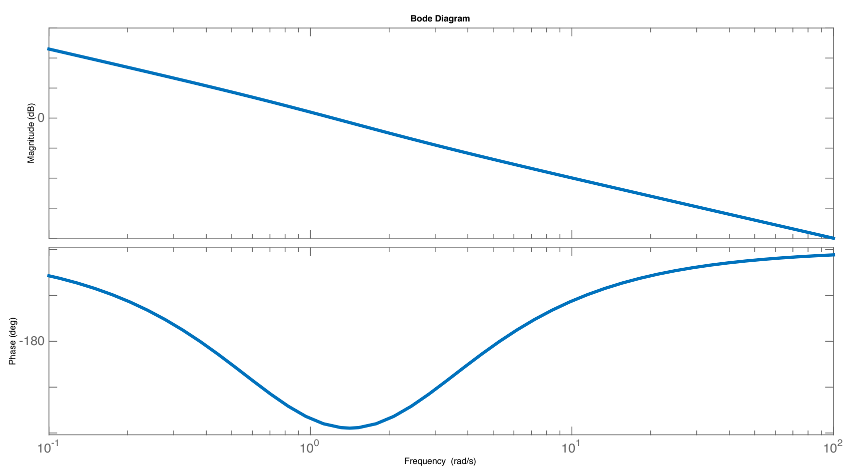
   c) Definiera amplitud-, fas- och stabilitetsmarginalerna. Hur lyder är kopplingen mellan stabilitetsmarginalen och känslighetsfunktionen? (**1 poäng**)

   d) Utred betydelsen av Bodes känslighetsintegral! (**1 poäng**)

2. Givet överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{s+\tau}$, visa att dess Nyquistdiagram är en halvcirkel med radien $\frac{1}{2\tau}$ omkring punkten ($\frac{1}{2\tau}$,0). (**2 poäng**).

3. Betrakta överföringsfunktionen $G(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+4)}$ och regulatorn $C(s) = K\frac{s+1}{s}$, med en konstant skalär $\infty > K \geq 0$, och en återkoppling enligt Fig. 2. Hitta alla värden på K som stabiliserar det återkopplade systemet. (**2 poäng**).

4. I figur 1 visas Bodediagrammet för kretsöverföringen $L(i\omega) = K_0 G(i\omega)$ (antag enhetsåterföring). $L(i\omega)$ har inga instabila nollställen. Är det slutna systemet stabilt? Motivera! (**2 poäng**)



Figur 1: Bodediagram över kretsöverföringen

5. Givet en PI-regulator $C(i\omega) = K(1+\frac{1}{i\omega})$ och ett system med frekvensfunktion $G(i\omega) = \frac{6i\omega}{(i\omega+1)((i\omega)^2+3(i\omega)+2)}$ (med enhetsåterföring, se figur 2).

   a) Bestäm K så att det återkopplade systemet får fasmarginal $\varphi_m = 30°$. (**2 poäng**)

   b) Med ditt bestämda K, finn det återkopplade systemets steady-stateutsignal y_∞ då $r_\infty = 1$. (**1 poäng**)

   c) Efter implementationen utsätts PI-regulatorn för en modellosäkerhet. Om den multiplikativa modellosäkerheten är uppåt begränsad av $d_m(s) = \frac{10s}{(s+0.5)}$, ger regulatorn $C(s)$ robust stabilitet? (**1 poäng**)

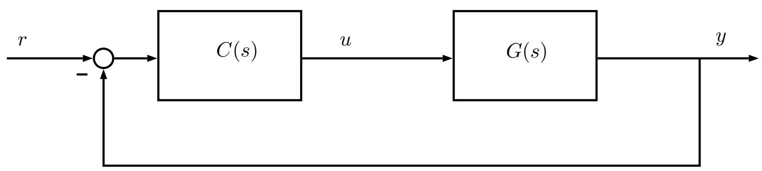
6. Givet en tillståndsmodell enligt

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}
$$

   a) Bestäm om tillståndsrepresentationen är asymptotiskt stabil samt dess överföringsfunktion! (**1 poäng**)

   b) Är tillståndsrepresentationen styrbar och observerbar? (**1 poäng**)

   c) Diskretisera den givna modellen med samplingsintervallet $T_s = 1$s och bestäm de diskreta matriserna, A_d, B_d, C_d, D_d (**2 poäng**)



Figur 2: Återkopplat blockschema

7. Givet tillståndsmodell och viktfunktional enligt

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= 0.5x(t) + u(t) \\
J(u,x) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^2(\tau)Q + u^2(\tau)R\right) d\tau
\end{aligned}
$$

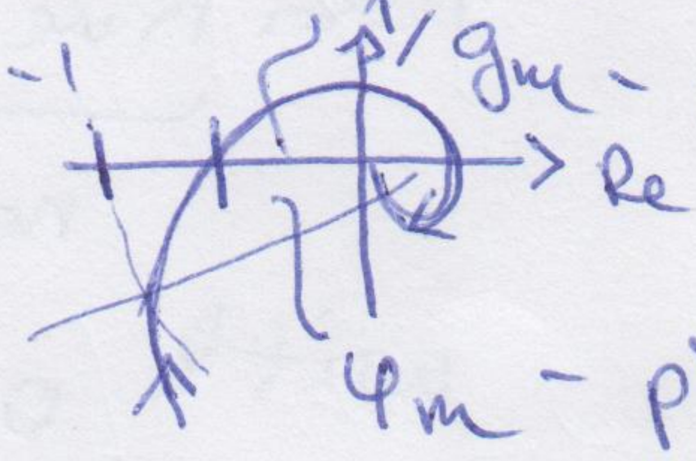
   Bestäm Q, R om vi vet att det slutna systemets optimala polplacering fås genom att spegla det öppna systemets pol i imaginäraxeln (**2 poäng**).

SSY310 & ERE091
Resit exam question solutions
August 2016

Q1) a) stability

b) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s)$

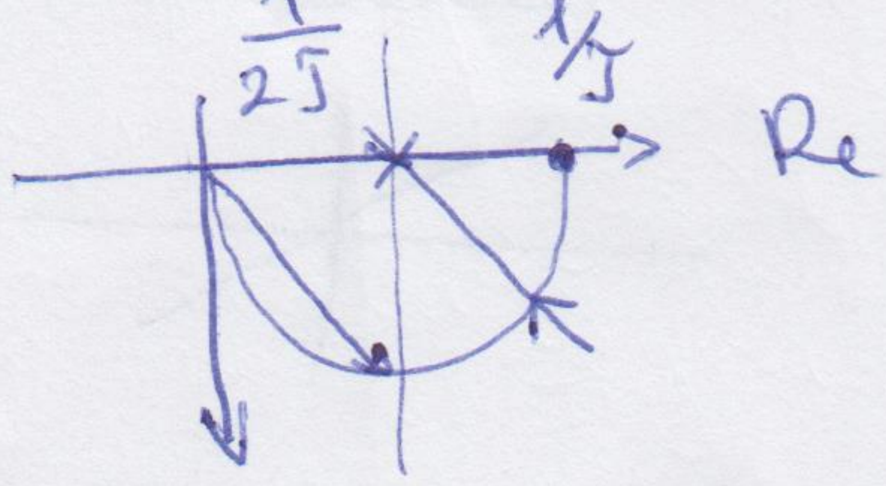
c)



$S_m = \max_{\omega} |S(i\omega)|$

d) distribution of "disturbance dust" waterbed effect + criteria/condition

Q2)



$$G(i\omega) = \frac{1}{i\omega + J}\cdot\frac{J - i\omega}{J - i\omega}$$

Find

$$Re\{G(i\omega)\} = \frac{J}{J^2+\omega^2} = x$$

Equation of a circle: $$Im\{G(i\omega)\} = \frac{-\omega}{J^2+\omega^2} = y$$

$$\underbrace{\left(x - \frac{1}{2J}\right)^2 + (y - 0)^2}_{\text{center of the circle}} = r^2$$

r radius

$$\left(x - \frac{1}{2J}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4J^2}$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{1}{4J^2} - 2x\frac{1}{2J} + y^2}_{\text{this is zero}} = \frac{1}{4J^2}$$

Q3) Routh stability criteria can be used

$$G_c(s) = \frac{G(s)\cdot C(s)}{1 + G(s)\,C(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

G_c closed loop TF

poles of $G_c(s)$?

$$a(s) = s^3 + (3+K)s^2 - (K+4)s - 2K$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -(K+4) \\ s^2 & 3+K & -2K \\ s^1 & \dfrac{K^2+5K+12}{3+K} & \\ s^0 & -2K & \end{array}$$

all positive

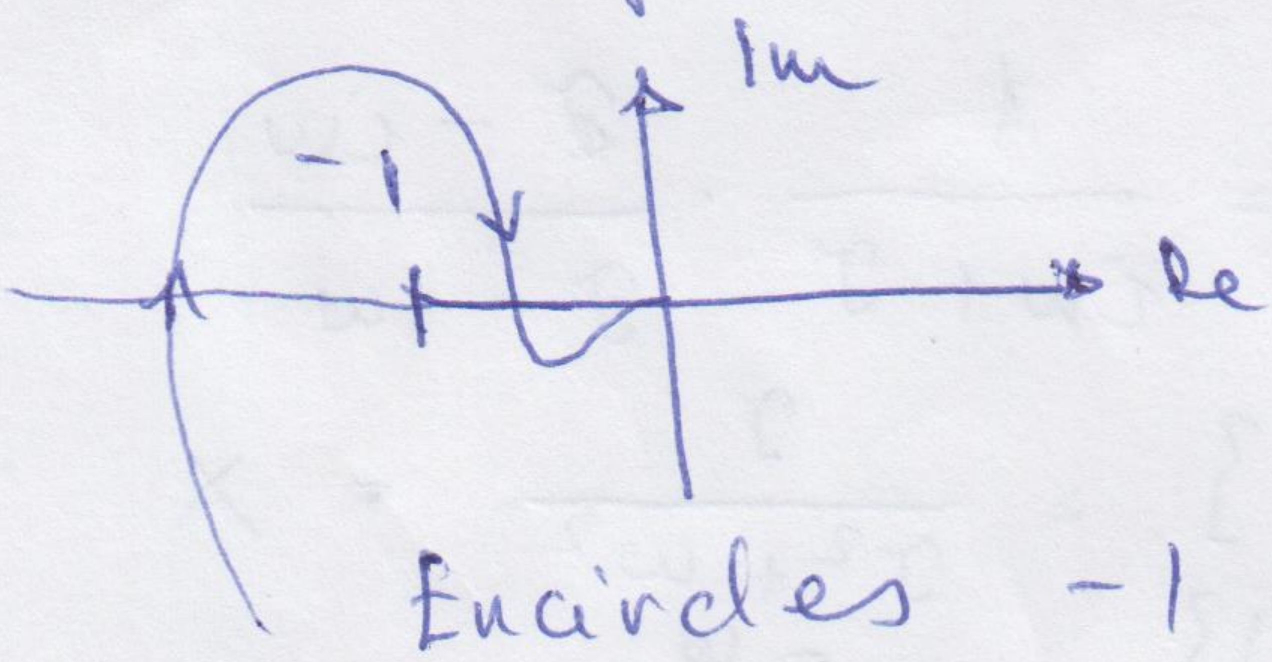
$K+3>0$

$-2K<0$

$\underbrace{\underbrace{K^2+5K}_{\text{positive}}+12<0}_{\text{never satisfied}}$

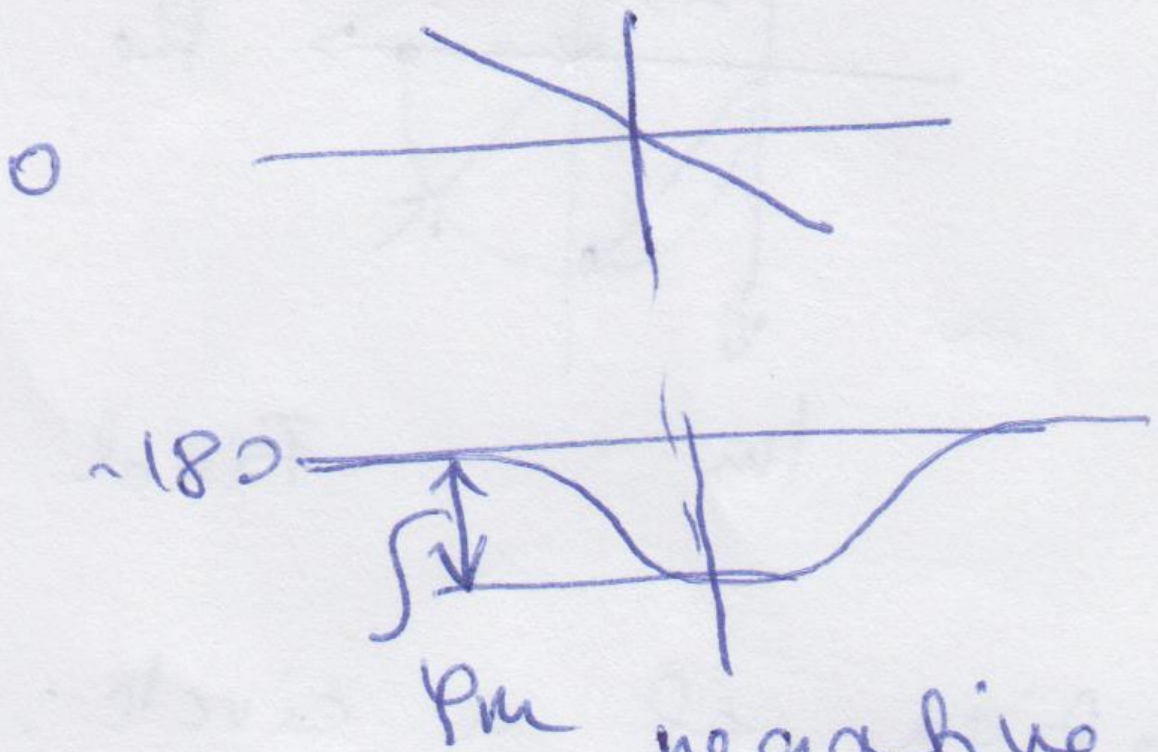
$\Rightarrow$ No K exists to meet these conditions, | with $0 \le K < \infty$

Q4) Nyquist



Encircles $-1 \Rightarrow$ unstable

or Bode



φm negative $\Rightarrow$ unstable

Q5)

Bode compensation

$$G_c(s) = \frac{6K}{(s+1)(s+2)+6K}\Bigg|_{K=1}$$

a)

$\varphi(\omega_c) = -150 \Rightarrow \omega_c \simeq 6{,}2$

$A(\omega_c)\Big|_{K=1} = -15\,dB$

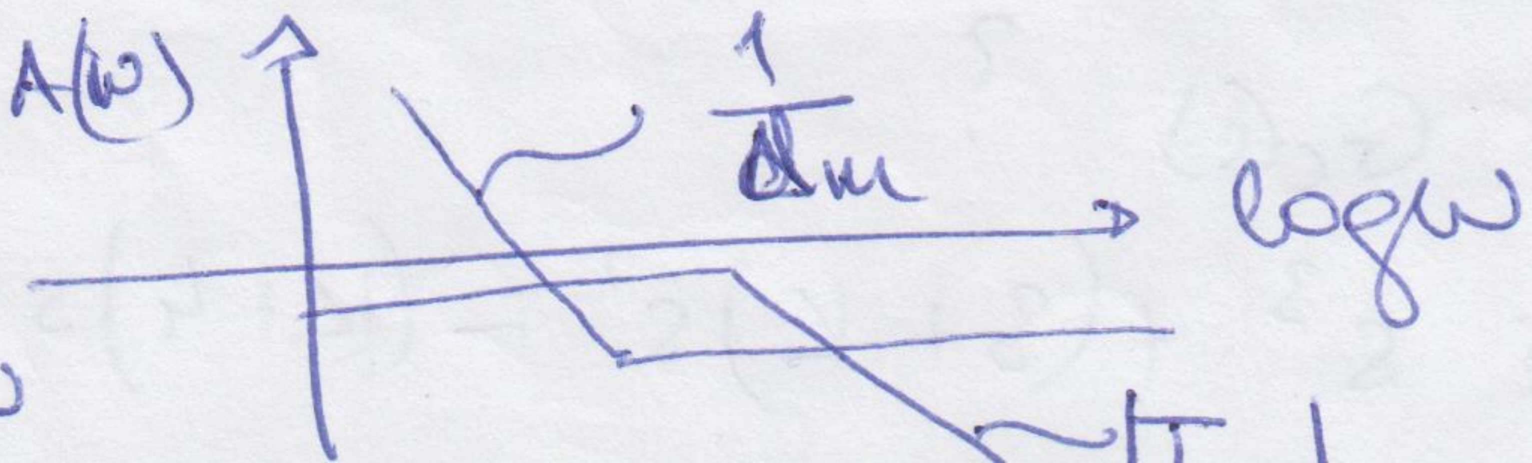
$20\log K = 15\,dB \Rightarrow K = 10^{\frac{15}{20}} \approx 5{,}6$ //

b)

$$y_\infty\Big|_{\substack{r(t)=1 \\ r_\infty=1}} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot G_c(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{33{,}5}{37{,}5}$$

c) Plot Bode and read robustly unstable

$|T_N| < \frac{1}{d_m} \quad \forall\omega$



$A = \begin{bmatrix} & \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $\text{eig } A = \{-1, -2\}$

a) negative real parts $\Rightarrow$ stable

b) $\text{rank}[\underbrace{B \quad AB}_{R}] = r \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R} \Rightarrow$ not controllable

$\rightarrow$ rank $R = 1$

c) $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ $\det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow$ full rank $\Rightarrow$ observable

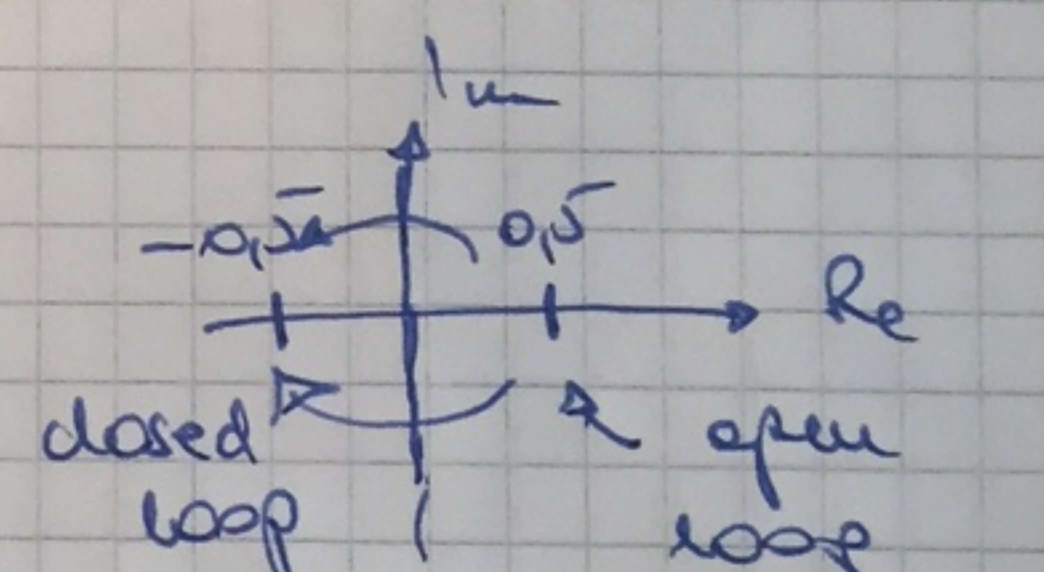
d) $A_d = e^{A \cdot T_s} = \begin{bmatrix} e^{-T_s} & 0 \\ 0 & e^{-2T_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$

$B_d = A^{-1}(e^{AT_s} - I)B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-1}-1 & 0 \\ 0 & e^{-2}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4(e^{-1}-1) \\ 0 \end{bmatrix} = -4(e^{-1}-1) = 4(1-e^{-1})$

$C_d = C = [2 \quad 3]$

$D_d = 0$



Q7) $A = 0{,}5$, $B = 1$

closed loop pole

$(A - B\bar{L}) = (0{,}5 - 1 \cdot \bar{L}) = -0{,}5$ $\leftarrow$ eigenvalue mirrored

$\Rightarrow \bar{L} = 1 = R^{-1} \cdot B \bar{P} \Rightarrow \bar{P} = R$

Ricatti

$A\bar{P} + \bar{P}A^T + Q - \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} = 0$

$0{,}5 R + 0{,}5 R + Q - R^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{R} 1 = 0$

$R - R + Q = 0 \Rightarrow Q = 0 , R = \bar{P}$