

Tentamen i reglerteknik SSY310/ERE091

Torsdagen den 4 juni 2015 kl. 14:00

1. Längd: 4 timmar.
2. Examinator: Balazs Kulcsar, 031-772 1785, kulcsar@chalmers.se
3. Nödvändigt villkor för att erhålla betyg på tentan är *i*) för SSY310 att ha godkänt på inlämningsuppgift 1-2, projektarbete och laboration 1-2, *ii*) för ERE091 att ha godkänt på laboration 1-2.
4. Tentamen omfattar 20 poäng (med 0.5 poängs upplösning). Tabell 1 visar betygsgränserna.

Tabell 1: Betygsgränser

Poäng	Betyg
≤ 9.5	underkänt
10...12.5	3
13...15.5	4
16...20	5

5. Följande hjälpmedel tillåts:

- Egenhändigt skrivet "formelblad" **A4 format, ett blad** med anteckningar skrivna för hand på **EN** sida (inga kopior tillåtna).
- Miniräknare (icke-programerbar, ej grafritande, tömt minne innan tentamensstart).
- Beta, Physics handbook.

Förbjudet att använda: andra böcker, föreläsninganteckningar, telefon, surfplatta, dator el. liknande.

6. Lärare besöker tentamenslokalen under första och sista timmen av tentamenstiden. Tentamensresultat meddelas den 12 juni 2015 (pingpong.chalmers.se). Granskning av tentamensresultaten sker den 15 juni kl. 10:00-11:00 i E-huset på våning 5, rum 5320.

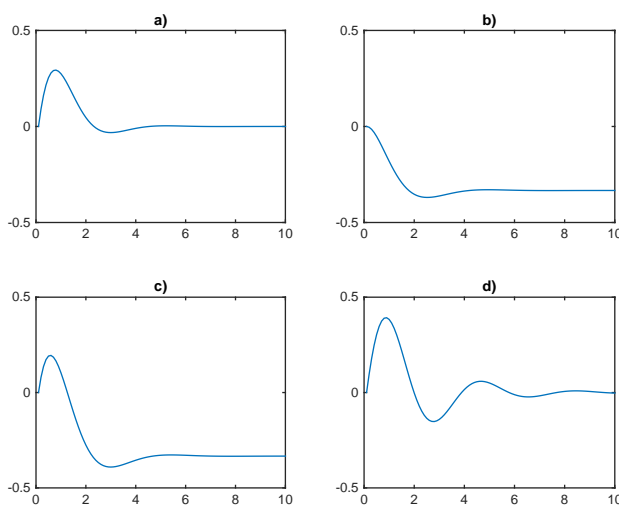
Lycka till!

Uppgifter

1. Svara kortfattat på följande frågor.

- a) Förklara för- och nackdelarna med att använda en PD-regulator. Vilken är skillnaden mellan en ideal och realiserbar PD-regulator? (1 poäng)
- b) Förklara begreppen strikt kausalt system och tidsinvariant system. (1 poäng)
- c) Ställ upp ett linjärt tidsinvariant system på observerbar kanonisk tillståndsform {observer canonical state-space representation}. (1 poäng)

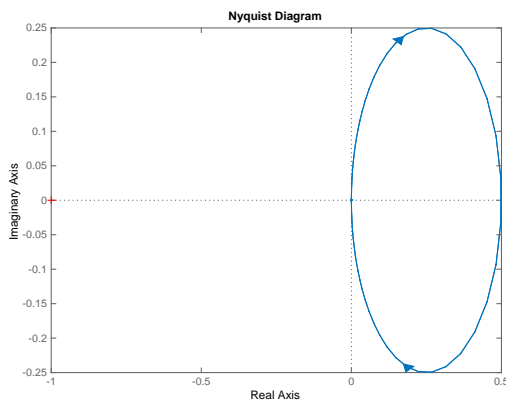
2. Para ihop och förklara!



Figur 1: Stegsvår

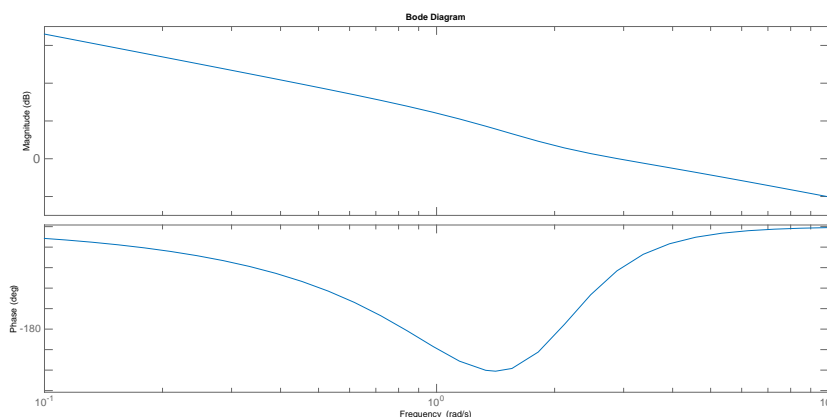
Para ihop följande överföringsfunktioner med stegsvaren i figur 1 (förklara kortfattat ditt val!).

$$G_1(s) = \frac{1}{-s^2-2s-3}, G_2(s) = \frac{s}{s^2+s+3}, G_3(s) = \frac{1-s}{-s^2-2s-3}, G_4(s) = \frac{s}{s^2+2s+3}. \quad (2 \text{ poäng})$$



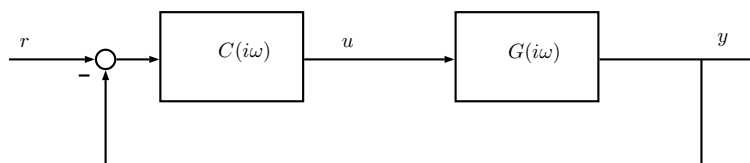
Figur 2: Nyquistdiagram

3. Givet ett systems Nyquistdiagram $G(i\omega)$ för icke-negativa ω där $G(i0) = G(i\infty) = 0$, se figur 2.
- (a) Para ihop en av följande frekvensfunktioner med diagrammet i figur 2 (motivera kortfattat ditt svar),
 $G_1(i\omega) = \frac{i\omega}{(i\omega)^2 + 2i\omega + 1}$, $G_2(i\omega) = \frac{i\omega}{2i\omega + 1}$, $G_3(i\omega) = \frac{1}{2(i\omega)^2 + i\omega}$, $G_4(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^3 + 2(i\omega)^2 + i\omega}$. (1 poäng)
- (b) Med den valda frekvensfunktionen $G(i\omega)$ från a)-uppgiften, hitta den ändliga and nollskilda frekvensen ω_1 som gör att $\varphi(\omega_1) = 0$ (ingen fasförskjutning). (1 poäng)
4. (*) I figur 3 ses Bodediagrammet för en kretsförstärkning {loop frequency function} $L(i\omega)$ (enhetsåterföring {unity closed-loop feedback} tillämpas). $L(i\omega)$ har inga instabila nollställen. Är det återkopplade systemet stabilt? Motivera ditt svar! (2 poäng)



Figur 3: Bodediagram för kretsförstärkningen

5. Givet en integrerande regulator $C(i\omega) = \frac{1}{T_i i\omega}$ och ett system med frekvensfunktion $G(i\omega) = \frac{2}{2i\omega + 5}$ (med enhetsåterföring, se figur 4). Bestäm T_i så att det återkopplade systemet får fasmarginalen $\varphi_m = 45^\circ$. (Använd bifogat lin-log papper). (2 poäng)



Figur 4: Återkopplad uppställning

6. Givet en systembeskrivning där nominella överföringsfunktionen $G_n(s) = \frac{1}{s+1}$ och övre gränsen för multiplikativa osäkerheten $d_m = \frac{s}{0.5(0.33s+1)}$. Vilken av följande två proportionella regulatorer ger robust stabilitet åt det återkopplade systemet, $K_1 = 20$ eller $K_2 = \frac{1}{20}$? (Enhetsåterföring tillämpas, använd bifogat lin-log papper) (2 poäng)
7. Givet en andra ordningens minimal tillståndsrepresentation på diagonal form

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

a) Bestäm $r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2$ om styrbarhetsmatrisen {controllability matrix} $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ och observerbarhetsmatrisen {observability matrix} $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (1 poäng)

b) Är tillståndsrepresentationen internt stabil? Rita ett blockschema för systemet där förstärkningar och signaler inkluderas. (1 poäng)

c) Beräkna autonoma systemets ($u(t) = 0$) utsignal $y(1)$ då $x_0 = [0.1 \ 1]^T$. (1 poäng)

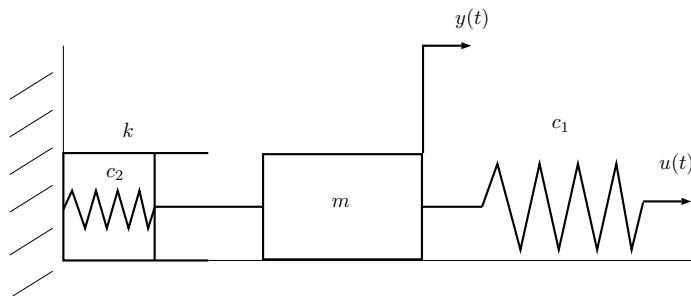
8. Givet systemet i figur 5 där $m = 1\text{kg}, c_1 = 1\text{N/m}, c_2 = 1\text{N/m}, k = 3\text{Ns/m}$.

a) Bestäm överföringsfunktionen från $u(t)$ till $y(t)$. (1 poäng)

b) Baserat på överföringsfunktionen, ställ upp en tillståndsmodell för systemet på styrbar kanonisk form {controller canonical state-space representation}. (1 poäng)

c) Bestäm en tillståndsåterkoppling {state feedback} $u(t) = -Lx(t)$ så att polerna för det återkopplade systemet placeras i $p_1 = p_2 = -1$. (1 poäng)

d) Tillämpa istället styrlagen $u(t) = -Lx(t) + L_r r(t)$ där L är återkopplingsmatrisen från c)-uppgiften. Bestäm värdet på L_r som försäkrar att $r_\infty = y_\infty$. (1 poäng)



Figur 5: Mekaniskt system

Solutions
(to ELE091/SSY310 Exam)

☺ = 1 point

Q1 a), speed up closed-loop, D adds phase and can increase stability margin / P_m . PD term can amplify high frequency noise and hence realistic PID (lead comp) can bound this increase. ☺

b) only past and current time related information influences the future. Independence of time, the system gives the same output (to the same input) ~~whatever~~ regardless of the time. ☺

c)
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$
 where $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$

$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x$

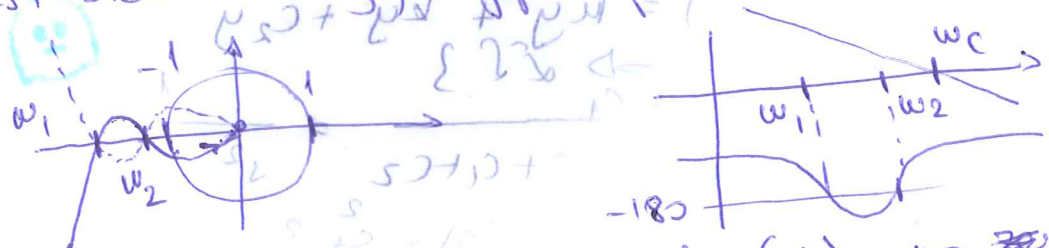
- observability is required ☺
- for state estimation ☺

Q2) $G_4 - a), G_1 - b), G_3 - c), G_2 - d,$ + motivation ☺ ☺

Q3) a) G_1 fits the plotted curve ☺
 b) $\Delta |G(i\omega)|_{\omega \neq 0} = 0 \Rightarrow \omega_1 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
 or $\frac{\text{Im } G(i\omega_1)}{\text{Re } G(i\omega_1)} = 0$

Q4) $\omega_1 = 0$ and $\omega_2 = 10$ $\Rightarrow \omega_c = 10$

key: Nyquist stab. theory, Nyquist plot



\Rightarrow it does not encircle (-1) , no unstable zeros
 \Rightarrow no unstable poles

STABLE system
closed loop

Q5, Linlog $\Rightarrow L(i\omega) = \frac{1}{T_i i\omega} \cdot \frac{2/5}{\frac{2i\omega}{5} + 1}$

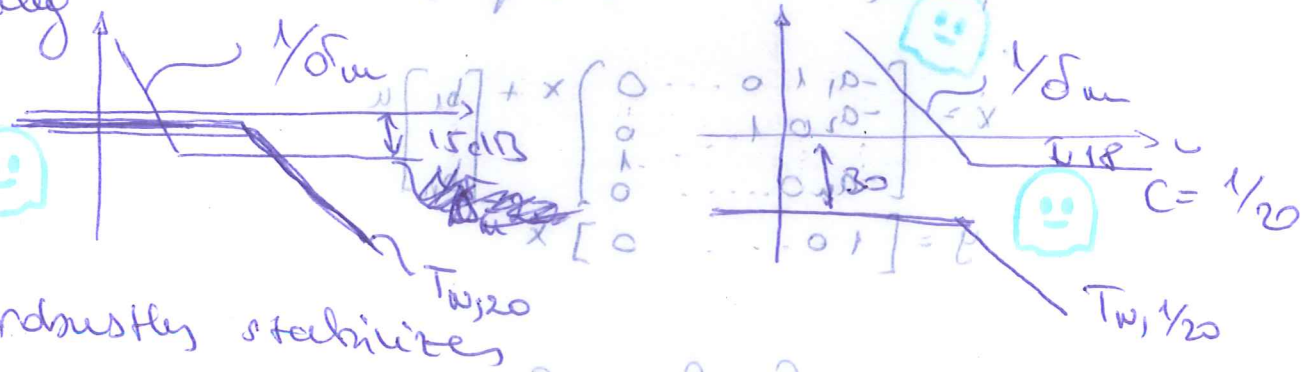
arg $\varphi(-135^\circ) \Rightarrow 2,5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ☺

$A_i^{dB} = \frac{1}{T_i}^{dB} \approx +20 \text{ dB}$

$20 \log A_i = 20 \text{ dB}$

$A_i = 0$ (to the same input) $T_i = 0,1$ (to the same input)

Q6, Linlog



Q7, Proun a)

$S = [B \quad AB] \Rightarrow \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_1 d_1 \\ \tau_2 & \tau_2 d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

$\sigma = \begin{bmatrix} c & cA \\ CA & CA^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tau_1 = 1 \\ \tau_2 = 2 \end{cases}$

c) $y(t) = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = q_1 \cdot e^{2t} + q_2 \cdot e^{-3t}$ ☺

b) $\lambda_2 = 2 \Rightarrow$ unstable + block diagram ☺

Q8/ a)

$C_1(u-y) = ky + C_2 y \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{ms^2 + ks + C_1 + C_2} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ ☺

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $C = [0 \quad 1] \quad D = 0$ ☺

$\lambda(s) = s^2 + 3s + 2$
 $\tilde{\lambda}(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$
 $L = [\tilde{a}_1 - a_1 \quad \tilde{a}_2 - a_2] = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$ ☺

c) $A_{cl} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$L = [-1 \quad -1]$ ☺
 $w = -Lx + Lr \cdot \tau \Rightarrow L_r = (-C \cdot A_{cl}^{-1} B)^{-1} \cdot [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +1$ ☺