Reglerteknik F2 (ERE091)/Kf2 (SSY310)

Exempeltenta

Maj 2015

Uppgifter

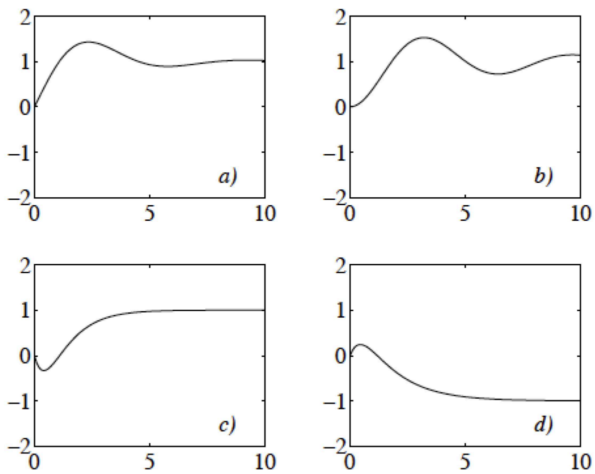
1. Svara kortfattat på följande frågor.

   a) Den komplexa funktionen $f(s)$ ges av $f(s) = L(s) + 1$ där $L(s) = C(s)G(s)$ är kretsförstärkningen. Vi vet att denna funktion är analytisk i hela högra halvplanet (HHP) för det komplexa talplanet (s). Vad kan du dra för slutsatser om det återkopplade systemets beteende? (**1 point**)

   b) Vad kan du utläsa från Rouths matris? (**1 point**)

   c) Förklara skillnaden mellan superpositionsprincipen (principle of superposition) och separationsprincipen (principle of separation)! (**1 point**)

2. Para ihop och förklara!

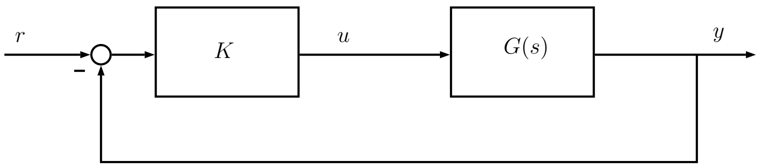


Figur 1: Step responses

Para ihop överföringsfunktionerna nedan med stegsvaren i figur 1. Motivera kortfattat ditt val!
$G_1(s) = \frac{2(1-s)}{(s+2)(s+1)}$, $G_2(s) = \frac{s-1}{(1+0.5s)(1.5s+1)}$, $G_3(s) = \frac{s+1}{1+0.8s+s^2}$, $G_4(s) = \frac{1}{s^2+0.4s+1}$. (**2 point**)

3. Givet en proportionell regulator med förstärkning K och en process med frekvensfunktionen $G(i\omega) = \frac{1}{i\omega+1}$ (med enhetsåterföring, se figur 2).

   a) Bestäm värdet på K om överkorsningsfrekvensen för $L(i\omega)$ är $\omega_c = 1.73\frac{rad}{sec}$! (**1 point**)



Figur 2: Återkopplat system

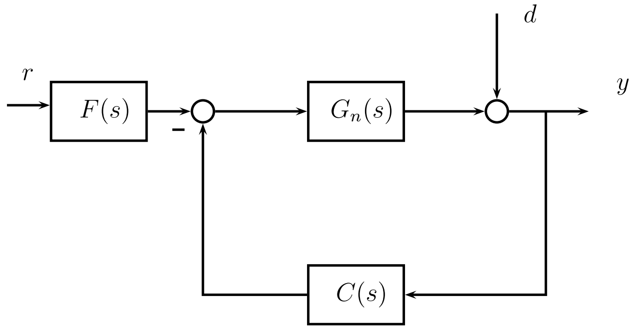
b) Med det tidigare beräknade värdet på K, rita Nyquistkurvan för $L(i\omega)$! (**1 point**)

c) Med det tidigare beräknade värdet på K, bestäm fas- och amplitudmarginal! (**1 point**)

d) Med det tidigare beräknade värdet på K, beräkna den komplementära känslighetsfunktionen. Bevisa att $3y_\infty = 2r_\infty$ där y_∞ och r_∞ är stationära värdet av utsignal respektive referenssignal.

4. Givet blockschemat i figur 2 med $G(s) = \frac{1}{s^2-2s-2}$. Bestäm ett icke-negativt värde på K som ger ett stabilt återkopplat system! (**1 point**)

5. Givet det återkopplade systemet i figur 3 med den nominella processen $G_n(s)$, regulatorn $C(s)$ och förfiltret $F(s)$



Figur 3: Blockschema över återkopplat system

där

$$G_n(s) = \frac{3(s+2)}{(s+1)(s+3)}, \quad C(s) = s+1, \quad F(s) = \frac{s}{3} + \frac{1}{3}$$

a) Bestäm känslighetsfunktionen och komplementära känslighetsfunktionen! (**1 point**)

b) Givet den nominella processen $G_n(s)$ och den multiplikativa osäkerheten

$$\Delta_m(s) = \frac{2s^2+8s+6}{6s+12}$$

beräkna den verkliga processens överföringsfunktion $G(s)$. (**1 point**)

c) Beräkna värdet av $\int_0^\infty log|S(i\omega)|d\omega$ där S är känslighetsfunktionen från a)-uppg. ($s = i\omega$). (**1 point**)

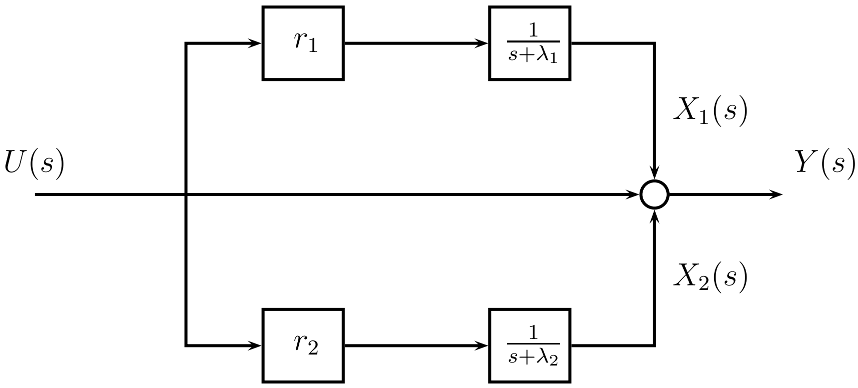
6. Givet följande tidskontinuerliga tillståndsmodell

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

a) Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$. (**1 point**)

b) Bestäm systemets poler och nollställen. (**1 point**)

7. Givet blockschemat över det öppna systemet i figur 4,



Figur 4: Blockschema över öppet system

a) Representera systemet på diagonal tidskontinuerlig tillståndsform. (**1 point**)

b) Hitta varje kombination av de icke kända parametrarna $r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2$ när villkoret för *observerbarhet* är uppfyllt. (**1 point**)

c) Givet $r_1 = r_2 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_1 = -2$ samt begynnelsetillståndsvektorn $x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Sätt $u = 0$. Lös den autonoma tillståndsekvationen och uttryck $y(t)$ analytiskt. (**1 point**)

8. $(*)$ Givet följande tidskontinuerliga dynamik

$$\dot{x}(t) = 2u(t)$$
$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(qx^2(t) + ru^2(t)\right) dt,$$

där $q, r > 0$. Hitta den optimala styrsignalen genom att använda algebraiska Ricatti ekvationen (Control Algebraic Ricatti Equation) parameteriserad i r och q. Vilket förhållande har parametrarna för viktning (d.v.s. q och r) om vi önskar flytta det återkopplade systemets pol till punkten -1? (**2 point**)

Sample exam solution (ERE091/SSY310)

1) Analytic RHP → no poles/zeros → all poles zeros of $f(s)$ is at LHP. We conclude closed loop stability
no unstable zeros, analytic

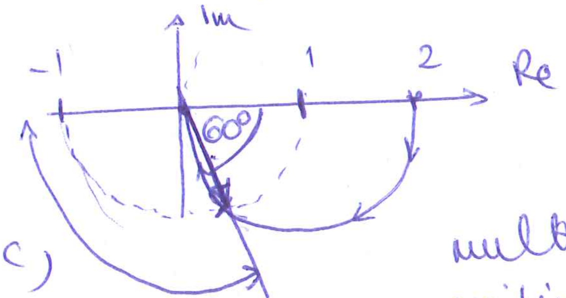
2) To determine system stability we can use the constant coeff of the pole polynomial, Routh stability condition is a „matrix".

3) Linearity in system theory vs. separable designed state-feedback gain and observer gain.

2) $G_1 - c$; $G_2 - d$; $G_3 - a$; $G_4 - b$

3) a) $|L(i\omega_c)|\Big|_{\omega_c = 1{,}73} = 1 \Rightarrow \frac{K}{i\omega_c + 1} = \frac{K(1 - i\omega_c)}{1 + \omega_c^2}$

b) $1 = \sqrt{\frac{K^2 + \omega_c^2}{(1+\omega_c^2)^2}} \rightarrow K > 0 \Rightarrow K = 2$

c) 

$\varphi_m = -180 + \varphi(\omega_c) = -120°$

g_m is ∞ since by multiplying the demi-circle by a positive scalar it never crosses -1 (it expands the steady state value only

d) $T = \frac{L}{1+L} = \frac{2}{i\omega + 3}$; $\lim_{t \to \infty} y_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s)$ FVT

$\Rightarrow 3 y_\infty = 2 r_\infty$

4)

$G_c(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} \Rightarrow \frac{K}{s^2 - 2s - 2 + K}$ → $s^2 - 2s - 2 + K \Big| = 0 \quad Re(p) < 0$

$p_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4(K-2)}}{2} \Rightarrow$

No K exists that stabilizes. At least 1 pole is positive ↯

~~Sample exam~~

5) a) $T_{\tilde{r}} = \dfrac{G_n C}{1+G_n C} = \dfrac{s+2}{4s+9}$; $S = \dfrac{1}{1+G \cdot C}$

b) $G = G_n(1+\Delta_m) = G_n + 2$

c) Given that $S = \dfrac{1}{1+GC}$ has no RHP poles the Bode integral is ∞.

6) a) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \dfrac{s^2+7s+7}{s^2+3s+2}$

b) two stable poles -2, -1
zeros $-5, 8$, -1.2

7)
a) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} u$

$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + u$

b) $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O} = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ then observability is met

c) $y(t)\Big|_{u=0} = C x(t) = C e^{At} \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$y(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}$

8) CARE: $AP + PA^T + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$

$A = 0$; $B = 2$; $Q/R = ?$ $\Rightarrow 0 \cdot P + P \cdot 0 + q = p^2 \cdot \dfrac{4}{r}$

$p^2 = \dfrac{q \cdot r}{4} \Rightarrow p = +\sqrt{\dfrac{qr}{4}} > 0$

Closed-loop $\dot{x} = (A - BK)x = (A - BR^{-1}B^TP)x = -1\, x(t)$

pole location

$\Rightarrow$ $\dot{x} = (0 - 4/r \cdot p)x =$

$-1 = -\dfrac{4}{r} \cdot \sqrt{\dfrac{qr}{4}} \longrightarrow q/r = 4$