CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

onsdag

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, och för Kf2, SSY310, ~~torsdagen~~ 15 april 2015.

Tid: Kl 14.00 - 18.00

Lokal: V-salar

Examinator: Claes Breitholtz

Tentamensresultaten meddelas senast den 6 maj genom personligt e-mail. Granskning av rätt-ning är möjlig den 7 och 8 maj, 12.30 -13.00, på plan 5 i E-huset (mot Hörsals-vägen). Var vänlig iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 20 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 8 poäng
betyg FYRA: minst 12 poäng
betyg FEM : minst 16 poäng

<u>Tillåtna hjälpmedel</u>:

1. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
2. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
3. Typgodkänd kalkylator.

LYCKA TILL!

1. Betrakta det linjära systemet G med insignalen u, utsignalen y och överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+s)(2+s)}$$

a) Ange en tillståndsmodell på observerbar kanonisk form för systemet G.

1 poäng

b) Bestäm matrisen K i en observatör, så att observatörens egenvärden blir $-2+i, -2-i$.

1 poäng

2. Betrakta det linjära tidsinvarianta systemet med följande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{\theta \cdot e^{-\tau s}}{1-\theta \cdot e^{-2\tau s}} \quad \text{där } 0 < \theta < 1, \tau > 0$$

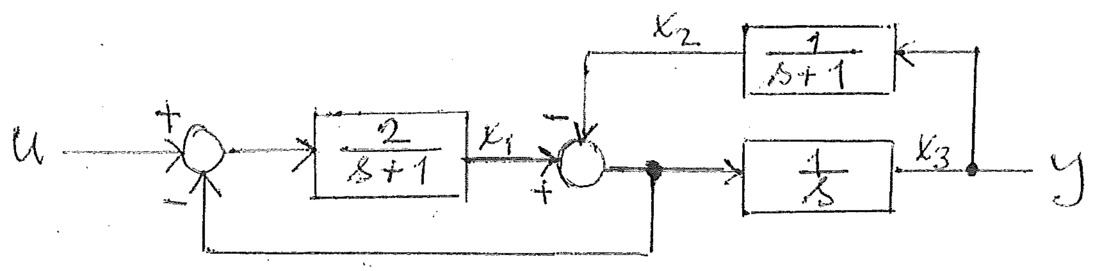
a) Visa med ett enkelt blockdiagram att G i sig kan uppfattas som ett återkopplat system. Lågförstärkningssatsen säger: Om produkten av överföringsfunktionerna i en sluten krets, som alla var för sig är stabila, är till beloppet mindre än ett för alla frekvenser $\omega \geq 0$, så är det återkopplade systemet stabilt. Använd satsen till att bedöma stabiliteten av G.

2 poäng

b) Beräkna och upprita svaret på ett enhetssteg (från tiden noll) för systemet G för tidsintervallet $0 < t < 8$ sekunder, då vi antar att $\theta = 0,6$ och $\tau = 1$. Bestäm även stegsvarets exakta slutvärde (om detta existerar).

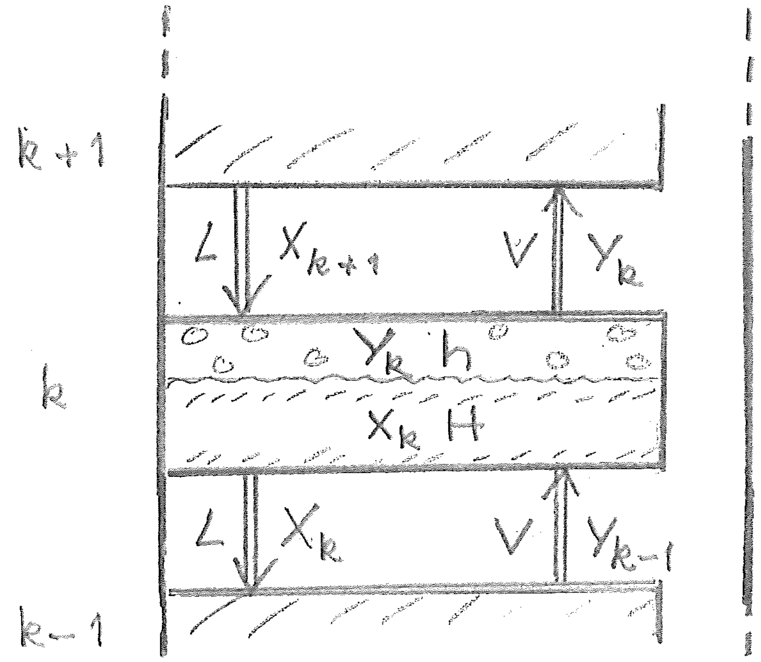
2 poäng

3. Ett system beskrivs av nedanstående blockdiagram, där tre tillståndsstorheter definierats. Avgör, efter formulering av tillståndsmodellen, om detta system är styrbart och observerbart.



3 poäng

4. Figuren nedan visar en botten i en binär destillationskolonn. Ingen "feed" eller "withdraw" i vare sig vätskefas eller gasfas finns på denna botten, som kan antas placerad mitt i den övre delen av tornet (rectifier section).



Vi antar konstanta "molar holdups" H och h, i vätskefas och i gasfas, respektive. Det nedåtströmmande vätskeflödet, L, och det uppåtströmmande gasflödet, V, antas också konstanta. Under (förenklade) antaganden kan materialbalanser för molbråken avseende den flyktigare komponenten i vätskefas, X_k, respektive i gasfas, Y_k, för denna botten uppställas:

$$\frac{d}{dt}(HX_k) = V(Y_{k-1} - Y_k) + L(X_{k+1} - X_k)$$

$$\frac{d}{dt}(hY_k) = V(f(X_k) - Y_k)$$

där f(...) är jämviktskurvan ("equilibrium function") för blandningen i fråga. Om vi exempelvis antar en blandning av bensen och toluene, kan denna funktion approximativt skrivas:

$$f(X_k) \approx 2X_k/(1 + X_k)$$

Parametervärden: H = 20 kmol, h = 5 kmol, L = 4 kmol/min, V = 8 kmol/min
Stationärvärdena för instorheterna är $Y_{k-1} = 0{,}70$ och $X_{k+1} = 0{,}60$.
Stationärvärdena för tillståndsstorheterna är $X_k = 0{,}56$ och $Y_k = 0{,}72$.

Inför beteckningarna: $\Delta X_k = x_1$, $\Delta Y_k = x_2$, $\Delta Y_{k-1} = u_1$ och $\Delta X_{k+1} = u_2$ och bestäm A och B i en linjär tillståndsmodell, som gäller nära arbetspunkten. Är det linjäriserade systemet stabilt?

4 poäng

5. Ett system som beskrivs av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s/2}}{10s}$$

skall regleras med en P-, PI-, PD-, eller PID-regulator så att följande specifikationer uppfylls:

(1) Systemets utsignal skall följa en ***rampformad*** referens utan kvarstående fel mellan utsignal $y(t)$ och referens $r(t) = r_0 \cdot t \cdot \sigma(t)$ där r_0 är konstant och $\sigma(t)$ betecknar ett enhetssteg.

(2) Den frekvens där kretsöverföringens argument är -180° skall vara minst 2,5 rad/minut.

(3) Systemets amplitudmarginal, A_m, skall vara minst 6 dB.

Välj och motivera lämplig regulatortyp, och beräkna dess parametervärden så att ovanstående specifikationer uppfylls.

4 poäng

6. En exoterm reaktor har (mycket approximativt) följande överföringsfunktion från kyleffekt till reaktortemperatur:

$$G(s) = \frac{\mu}{s - \nu} \quad \text{där } \mu > 0, \nu > 0$$

Systemet skall styras med en P-regulator $K(s) \equiv \kappa$ på så sätt att största värdet av beloppfunktionen $|K(j\omega)S(j\omega)|$ (där S betecknar känslighetsfunktionen) blir så litet som möjligt. Vad blir detta minimala värde, och vilken regulatorparameter κ bör då väljas?

3 poäng

Laplace-transformen

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i} F(s)e^{st}ds$$

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = sF(s) - f(0) \qquad \mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-D)\} = e^{-sD}F(s) \qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)F(s)\} = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cdot f(t)\} = F(s+a) \qquad \mathcal{L}\{t\cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = 1/s \qquad \mathcal{L}\{\rho(t)\} = 1/s^2 \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \text{(steg, ramp, impuls)}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2} \qquad \mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \qquad \mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad \mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

Z-transformen

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^\infty f(k)z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) - f(-1)$$

$z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n = 0$ har samma antal rötter inom $|z| = 1$i z-planet som,

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + ... + a_{n-1}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_n$$

har inne i vänstra halvan av w-planet. (Möbiustransformen)

$$\mathcal{Z}\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z-1} \qquad \mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a} \qquad \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1 \qquad \text{(steg, exponent, impuls)}$$

$$\lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z) \qquad \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

LTI-modeller

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad Y(s) = G(s)U(s)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i) \qquad Y(z) = H(z)U(z)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad g(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t)$$

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + A^2t^2/2! + A^3t^3/3! + \ldots = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t), \qquad \Phi(0) = I, \qquad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \qquad \Phi(t)\Phi(r) = \Phi(t + r)$$

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)Bu(\tau)\, d\tau$$

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} + d$$

Styrbar kanonisk form:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_{n-1}\ b_n]x(t) + d \cdot u(t)$$

Observerbar kanonisk form:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1\ 0\ \cdots\ 0\ 0]x(t) + d \cdot u(t)$$

Styr- och observerbarhet beror av rang(S) respektive av rang(O):

$$S = [B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B], \qquad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Routh-Hurwitz' stabilitetskriterium

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ s^{n-2} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ s^{n-2} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^1 & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{l} c_1 = \frac{a_1a_2 - a_3}{a_1} \\ c_2 = \frac{a_1a_4 - a_5}{a_1} \\ c_3 = \cdots \\ d_1 = \frac{c_1a_3 - c_2a_1}{c_1} \\ c_2 = \cdots \end{array}$$

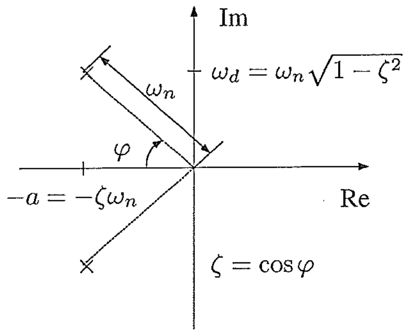
Antal teckenbyten i vänstra kolumnen ger antalet positiva poler

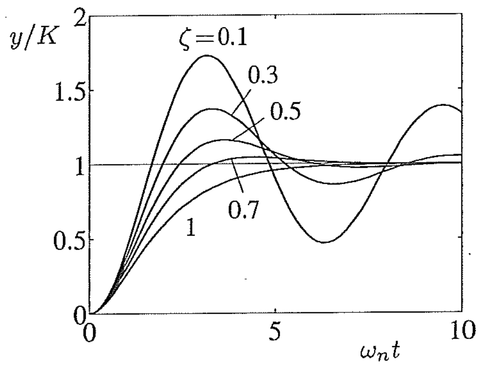
Tidssvar

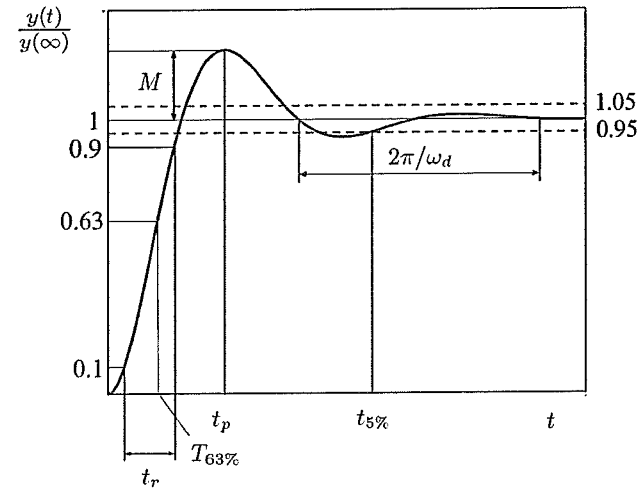
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

$$s = -a \pm j\omega_d \quad \text{där} \quad \begin{cases} a = \zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

$$y(t) = K(1 - e^{-at}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \varphi)) \quad \text{där} \quad \varphi = \arccos(\zeta)$$







$$t_r \approx \frac{1}{\omega_n}(1 + 0.3\zeta + 2\zeta^2) \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad M = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

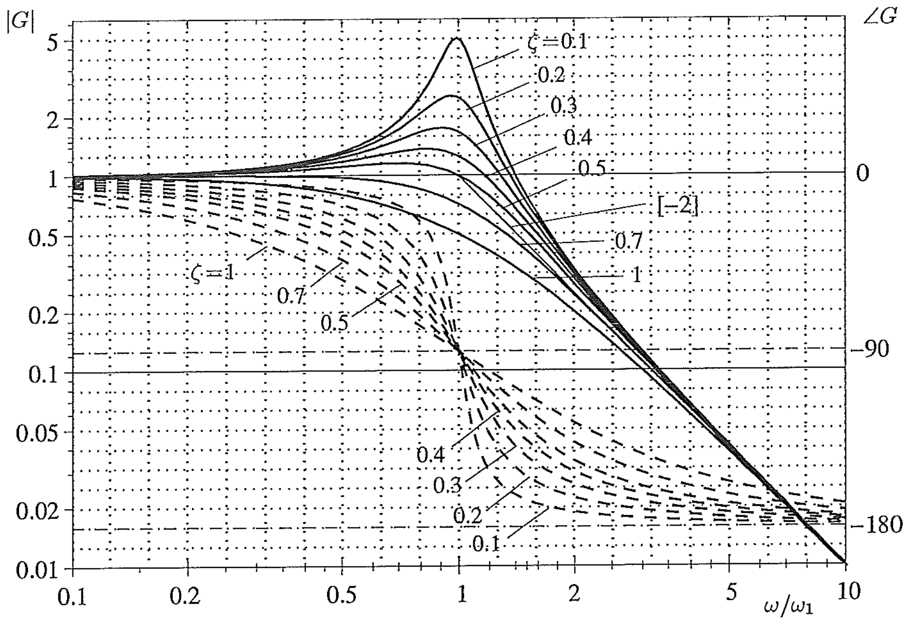
$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Bode-diagram

$$G(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_1}$$

ω	$\omega_1/4$	$\omega_1/2$	ω_1	$2\omega_1$	$4\omega_1$
Korrektion	$\frac{1}{\sqrt{1.0625}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.25}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.25}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.0625}}$
Korrektion$_{\mathrm{dB}}$	−0.2 dB	−1.0 dB	−3 dB	−1.0 dB	−0.2 dB

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_1 + (s/\omega_1)^2}$$



Nyquist

$Z = P + N$

$Z =$ antal instabila poler för slutna systemet

$P =$ antal instabila poler för öppna systemet

$N =$ antal varv i bildplanet runt kritiska punkten

Regulatordesign

Känslighetsfunktioner:

$$T = \frac{L}{1+L}, \qquad S = \frac{1}{1+L}, \qquad L = GF$$

$$G_0 = (1+\Delta G)G, \qquad \text{Robust stabilitet för } |\Delta G| < 1/T, \quad \forall\omega > 0$$

Tillståndsåterkoppling:

$$u(t) = L_r r(t) - Lx(t)$$

r stegformad ger att $y \to r$ då $t \to \infty$ för

$$L_r = \left[C(BL-A)^{-1}B\right]^{-1}$$

$$\dot{x}(t) = (A-BL)x(t) + BL_r r(t), \qquad y(t) = Cx(t)$$

Observatör

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)\right]$$

skattningsfel (utan störningar)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A-KC)\tilde{x}(t)$$

Lagfilter (fasretarderande):

$$F(s) = \frac{1+Ts}{\alpha+Ts}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Leadfilter (fasavancerande):

$$F(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \beta = \frac{1-\sin\varphi_{max}}{1+\sin\varphi_{max}}, \quad \varphi_{max} \text{ uppnås för } \frac{1}{T\sqrt{\beta}}$$

Regulatorer:

$$F_P(s) = K_p$$

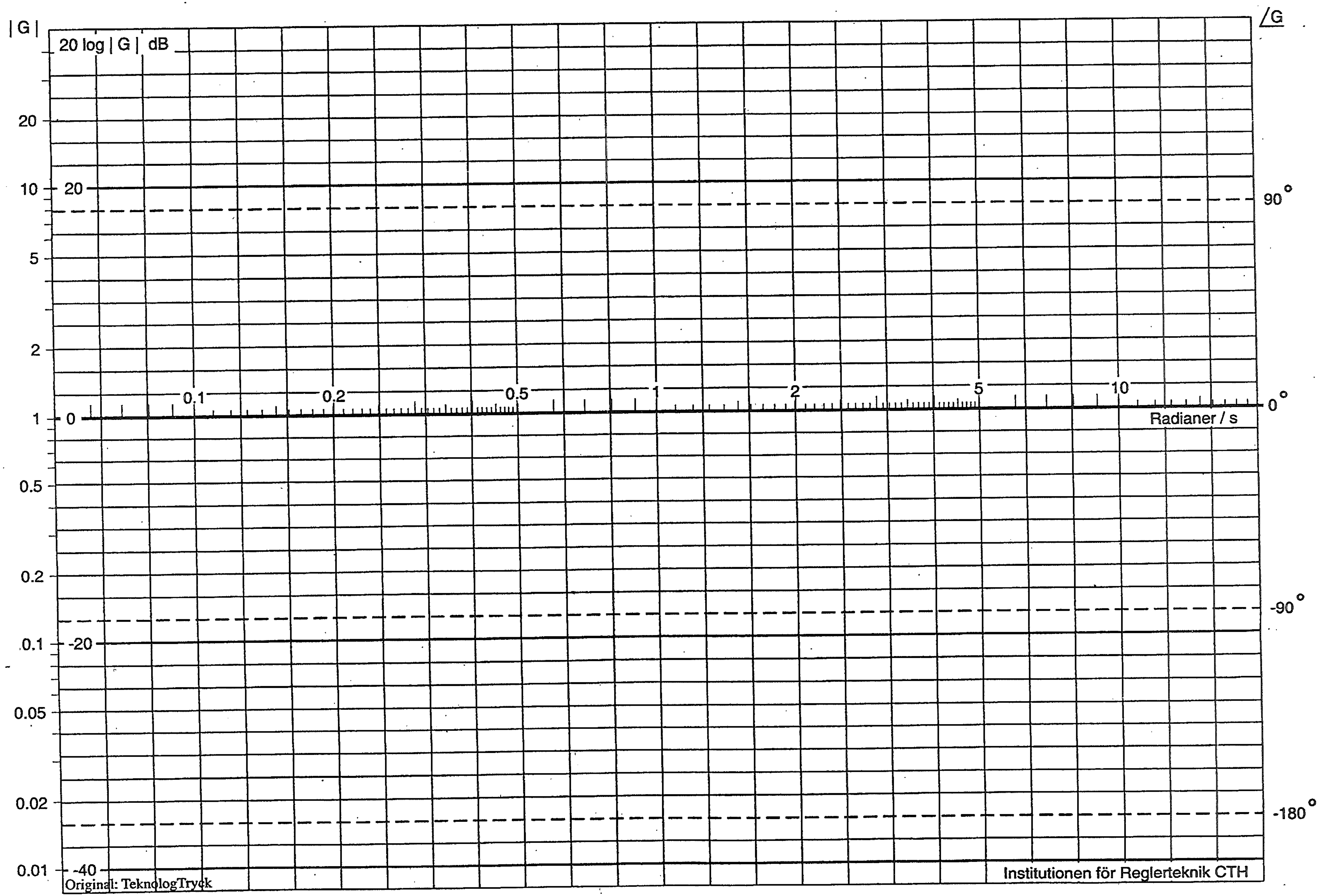
$$F_I(s) = K_i/s$$

$$F_{PI}(s) = K_p + K_i/s = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$$

$$F_{PD}(s) = K_p + \frac{K_d s}{1+T_f s} = K_p(1 + \frac{T_d s}{1+T_f s})$$

$$F_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1+T_f s} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1+T_f s}\right)$$

$$F_{PID}(z) = K_p + \frac{K_i h}{z-1} + \frac{(K_d/T_f)(z-1)}{z - e^{-h/T_f}}$$


|G|
20 log |G| dB
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
Radianer / s
/G
90°
0°
-90°
-180°
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

CHALMERS

Anonymous code / Anonym kod: ERE 091-5

Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 1 + 0,5

Consecutive page no. / Löpande sid nr: 1

Question no. / Uppgift nr: 1

1. a) $G(s) = \frac{1-s}{(1+s)(2+s)}$

Förkortning ej möjlig $\Rightarrow$

$(1+s)(2+s) = s^2+3s+2$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ OK

$y(t) = [1 \quad 0] \cdot x(t)$

b) observatör egenvärden i $-2 \pm i$

$\Rightarrow \det(\lambda \cdot I - (A - K \cdot C)) = 0$ har lösn $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$

$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ $\quad K \cdot C = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix}$

$A - KC = \begin{pmatrix} -3-k_1 & 1 \\ -2-k_2 & 0 \end{pmatrix}$ (ok)

~~$\lambda I - KC$~~

$\lambda I - (A - KC) = \begin{pmatrix} \lambda+3+k_1 & -1 \\ 2+k_2 & \lambda \end{pmatrix}$

$\det = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+3+k_1) + (2+k_2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (3+k_1)\lambda + (2+k_2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3+k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(3+k_1)^2}{4} + 2 + k_2}$

$-\frac{3+k_1}{2} = -2 \Rightarrow k_1 + 3 = 4 \Rightarrow k_1 = 1$

$\frac{4^2}{4} + 2 + k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -7$ $\quad \Rightarrow K = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

$K = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

CHALMERS

Anonymous code / Anonym kod

ERE 091-5

Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)

Consecutive page no. / Löpande sid nr 2

Question no. / Uppgift nr 1

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3-k_1+k_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3-k_1+k_2}{2}\right)^2 - 2 - k_1 - 5k_2}$

$\Rightarrow \frac{3-k_1+k_2}{2} = 2 \Rightarrow k_1 = -1 + k_2$

$2^2 - 2 - k_1 - 5k_2 = -1 \Rightarrow 5k_2 = 2 + 1 - k_1$

$\Rightarrow k_2 = \frac{3-k_1}{5} \Rightarrow k_1 = -1 + \frac{3-k_1}{5}$

$\frac{6}{5}k_1 = -1 + \frac{3}{5}, \quad k_1 = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow k_2 = \frac{\frac{10}{3}}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow K = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

?

CHALMERS

Anonymous code / Anonym kod: ERE 091-5

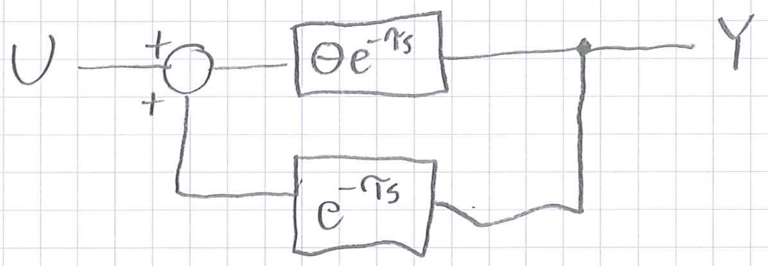
Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 2 + 1

Consecutive page no. / Löpande sid nr: 3

Question no. / Uppgift nr: 2

2. $G(s) = \dfrac{\theta \cdot e^{-\tau s}}{1 - \theta \cdot e^{-2\tau s}}$ $\quad 0<\theta<1 \quad \tau>0$

a)



$$Y = (U + e^{-\tau s} Y) \cdot \theta e^{-\tau s}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{\theta e^{-\tau s}}{1 - e^{-2\tau s}}$$

Lågförstärkningssatsen $\Rightarrow \underbrace{|\theta \cdot e^{-\tau i w}|}_{=\theta\ \forall w} \cdot \underbrace{|e^{-\tau i w}|}_{=1\ \forall w} = \theta < 1$ enl def.

(✓)

$\Rightarrow G$ är stabil. OK

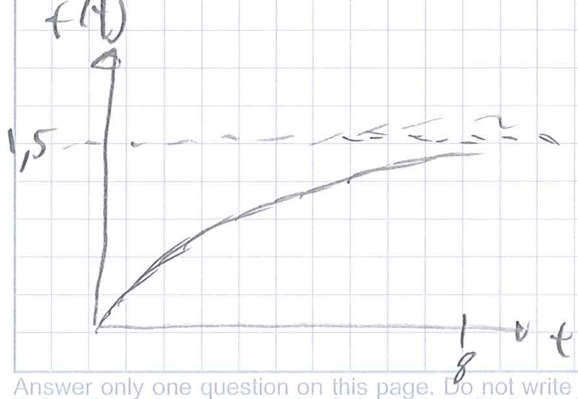
b)

$\theta = 0.6 \quad \tau = 1 \Rightarrow G(s) = \dfrac{0{,}6 e^{-s}}{1 - 0{,}6 e^{-2s}}$

steg $\mathcal{L} = \dfrac{1}{s}$ $\qquad \dfrac{1}{s} \cdot G(s) = \dfrac{0.6 e^{-s}}{s(1-0.6e^{-2s})}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{0{,}6 e^{s(t-1)}}{s(1-0.6e^{-2s})}\, ds$$

Visst, men det leder ingenstans.

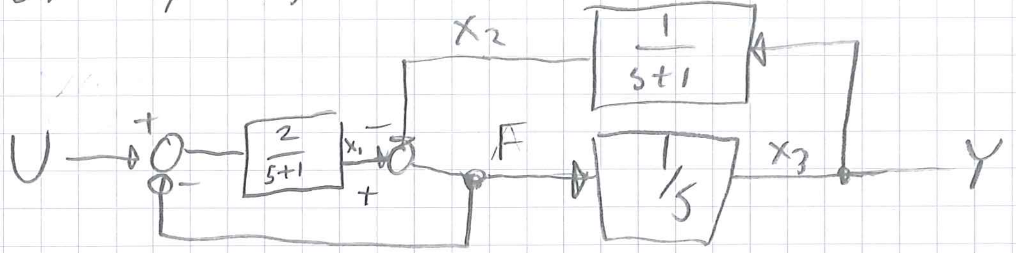


$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{0{,}6 e^{-s}}{1 - 0{,}6 e^{-2s}} = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5$$

OK

3. $Y = x_3$ (*)



i pkt F: $(U - s\cdot Y)\frac{2}{s+1} - Y\frac{1}{s+1} = s\cdot Y$

$\Rightarrow Y\cdot\left(s + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+1}\right) = U\cdot\frac{2}{s+1}$

$\Rightarrow \frac{Y}{U} = G(s) = \dfrac{\frac{2}{s+1}}{s + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+1}} = \dfrac{2}{s(s+1)+3} =$

$= \dfrac{2}{s^2+s+3}$ (använder dock inte)

Formulering av tillståndsmodellen

$X_3 = \frac{1}{s}(X_1 - X_2) \Rightarrow sX_3 = X_1 - X_2$ (1)

$X_2 = \frac{1}{s+1}X_3 \Rightarrow sX_2 = X_3 - X_2$ (2)

$X_1 = \left(-(X_1 - X_2) + U\right)\cdot\frac{2}{s+1} \Rightarrow$

$sX_1 = -2(X_1 - X_2) + 2U - X_1 = -3X_1 + 2X_2 + 2U$ (3)

(1)+(2)+(3) +(*) $\Rightarrow \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot x(t) + \begin{pmatrix} \cancel{1}\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}u(t)$ ✓

OK

med $y(t) = (0\ 0\ 1)\,x(t)$

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: ERE091 - 5	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 2,5	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 5 — Question no. / Uppgift nr: 3

Styrbart och observerbart ?

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$S = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{pmatrix} 1 & -\cancel{3}\,6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cancel{1}\,2 & -\cancel{3}\,6 \end{pmatrix}$$

$\det(S) = -1 \Rightarrow$ styrbart! OK

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (OK) \\ (OK) \\ (OK) \end{matrix}$$

$\det(O) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ ej observerbart!

OK

$$(1 \; -1 \; 0)\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (-3 \quad 3 \quad -1)$$

4.
$$\frac{d}{dt}(H \cdot X_k) = V(Y_{k-1} - Y_k) + L(X_{k+1} - X_k) = f_1$$

$$\frac{d}{dt}(h Y_k) = V \cdot (f(X_k) - Y_k) = f_2$$

$H = 26\,kmol$

$h = 5\,kmol$

$$f(X_k) \approx \frac{2X_k}{1+X_k}$$

$L = 4\,kmol/min$

$V = 8\,kmol/min$

arbetspkt: $\underset{}{\overset{u_1}{Y_{k-1}}} = 0{,}70$ $\quad \overset{u_2}{X_{k+1}} = 0{,}60$ – in

$\underset{x_1}{X_k = 0{,}56}$ $\quad \underset{x_2}{Y_k = 0{,}72}$ – tillstånd

---

$$\frac{\partial f_1}{\partial X_k} = -L \qquad \frac{\partial f_1}{\partial Y_k} = -V \qquad \frac{\partial f_1}{\partial Y_{k-1}} = V \qquad \frac{\partial f_1}{\partial X_{k+1}} = L$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X_k} = V\left(\frac{2}{1+X_k} + 2X_k \cdot \frac{-1}{(1+X_k)^2}\right) = \{i\ a.p.\} = 8 \cdot \left(\frac{2}{1{,}56} - \frac{2 \cdot 0{,}56}{1{,}56^2}\right) = 6.57$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Y_k} = -V \qquad \frac{\partial f_2}{\partial Y_{k-1}} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial X_{k+1}} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{L}{H} & -\frac{V}{H} \\ \frac{+6{,}57}{h} & -\frac{V}{h} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{V}{H} & \frac{L}{H} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}20 & -0{,}40 \\ 1{,}315 & -1{,}6 \end{pmatrix} \text{ OK} \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ OK}$$

CHALMERS

Anonymous code / Anonym kod: ERE091-5

Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 4

Consecutive page no. / Löpande sid nr: 7

Question no. / Uppgift nr: 4

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0{,}20 & -0{,}40 \\ 1{,}31 & -1{,}6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t)$$

- Stabilt?

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow (\lambda+0{,}2)(\lambda+1{,}6) + 0{,}4 \cdot 1{,}31 = 0$$

$$= \lambda^2 + 1{,}8\lambda + \underbrace{0{,}32 + 0{,}524}_{=0{,}84} = 0$$

Andragradspolynom med koeff. > 0 ⇒ Stabilt system

(koeff > 0 gäller även högre ordn. men det räcker ej då.)

$$\lambda_{1,2} = -0{,}9 \pm \sqrt{0{,}81 - 0{,}84} = -0{,}90 \pm 0{,}17i$$

$\lambda_1 = -0{,}90 + 0{,}17i \quad \lambda_2 = -0{,}90 - 0{,}17i$

$|\lambda_{1,2}| = 0{,}839$

⇒ Stabilt! $\lambda_{1,2}$ ligger i VHP

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: EREO91 - 5	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 8 — Question no. / Uppgift nr: 5

5. Systemet ska klara en rampformad referens ⟹ PD-regulator räcker.

Från att ha gjort tidigare uppg vet jag att PD-regulatorer klarar rampformade insignalsförändringar utan kvarstående fel.

PD-regulator: $F(s) = K_p\left(\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}\right)$

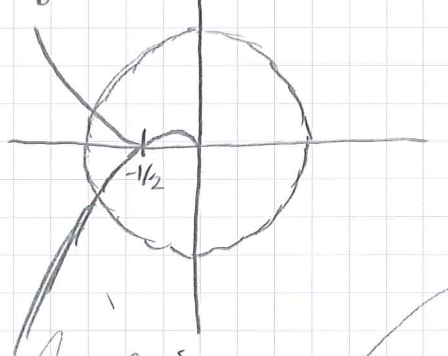
Fel val! Regulatorn måste ha en integration

$$F \cdot G = L(s) = \frac{K_p}{10} \cdot \frac{e^{-s/2}(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)\,s}$$

dessutom glömde du processens pol i origo!

$\omega_0 = 2{,}5$ rad/min

6 dB = 2 ggr förstärkn.



$$L(i\omega) = \frac{K_p}{10}\left(\frac{e^{-\frac{i\omega}{2}} \cdot (1+\tau_1 i\omega)(1+\tau_2 i\omega)}{1-(\tau_2\omega)^2}\right) = \frac{K_p}{10(1-(\tau_2\omega)^2)} e^{-\frac{i\omega}{2}} \cdot (1+i\omega(\tau_1+\tau_2) - \tau_1\tau_2\omega^2)$$

$$= \frac{K_p}{10(1-(\tau_2\omega)^2)} \cdot \left(\cos -\frac{\omega}{2} + i\sin -\frac{\omega}{2}\right) \cdot \left(1-\tau_1\tau_2\omega^2 + i\omega(\tau_1+\tau_2)\right)$$

$$= \frac{K_p}{10(1-(\tau_2\omega)^2)}\left[\cos\frac{\omega}{2}\cdot(1-\tau_1\tau_2\omega^2) + \sin\frac{\omega}{2}\cdot\omega(\tau_1+\tau_2) + i\left(-\sin\frac{\omega}{2}(1-\tau_1\tau_2\omega^2) + \cos\frac{\omega}{2}\cdot\omega(\tau_1+\tau_2)\right)\right]$$

$\mathrm{Re}(L(i\omega_0)) = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(L(i\omega_0)) = 0$

1

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr
	ERE091-5	1	9
			Question no. / Uppgift nr: 5

$$|L(i\omega)| = \frac{K_p}{10}\cdot\frac{\sqrt{1+\tau_1^2\omega^2}}{\sqrt{1+\tau_2^2\omega^2}} \qquad \angle L(i\omega) = -\frac{\omega}{2} + \arctan\tau_1\omega - \arctan\tau_2\omega$$

$$\angle L(i\cdot 3) = -\pi = -\frac{3}{2} + \arctan\tau_1\cdot 3 - \arctan\tau_2\cdot 3$$

väljer $\tau_1 = 1$ $\Rightarrow -\pi + \frac{3}{2} + 1{,}25 = -\arctan\tau_2\cdot 3$

$\Rightarrow \arctan\tau_2\cdot 3 = 0{,}392 \Rightarrow \tau_2 = 0{,}138$

$$|L(i\cdot 3)| = \frac{1}{2} = \frac{K_p}{10}\cdot\frac{3{,}16}{1{,}08} \Rightarrow K_p = 1{,}71$$

Din design ger: $\omega_\pi \approx 4{,}7 > 2{,}5$ (OK)
$A_m \approx 18$ dB > 6

$\Rightarrow K_p = 1{,}5$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0{,}138$

uppfyller inte kraven! (se nedan!)

Men som sagt, du gjorde fel, eftersom $L(s)$ "grundkravet" ej var uppfyllt

$$G(s)F(s) = \frac{e^{-2s}}{Ts}\cdot K_p\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s} = L(s)$$

$$\tilde{e} = \tilde{r} - L\tilde{e} \Rightarrow \tilde{e} = \frac{\tilde{r}}{1+L}$$

Om vi antar att K_p, τ_1 och τ_2 valts så att återkopplade systemet är stabilt, fås att

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot\tilde{e}(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{r_0}{s^2} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{r_0}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s} =$$

$L(s) \to \frac{K_p}{Ts}$ för "små" s

$$= \lim_{s\to 0}\frac{r_0}{s+K_p/T} = \frac{r_0 T}{K_p} \neq 0,$$ dvs ingen PD-regulator uppfyller kraven!

Du skulle satsat på PI (eller PID, men det behövs ej här).

CHALMERS

Anonymous code / Anonym kod: ERE091-5

Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 0

Consecutive page no / Löpande sid nr: 10

Question no. / Uppgift nr: 6

6. $G(s) = \frac{\mu}{s-\nu}$ $\quad \mu > 0, \nu > 0$

$K(s) = k$

För vilka k är Systemet överhuvudtaget stabilt?

$K(s)\cdot G(s) = L(s) = \frac{k\mu}{s-\nu}$

$S(j\omega) = \frac{1}{1+L(j\omega)} = \frac{j\omega - \nu}{j\omega - \nu + k\mu}$

$|K(j\omega)\cdot S(j\omega)| = \left|\frac{k(j\omega-\nu)}{j\omega - \nu + k\mu}\right|$ ska minimeras i sitt maximum

Vem säger att ett lokalt minimum existerar?

$\frac{k\sqrt{\omega^2+\nu^2}}{\sqrt{\omega^2+(k\mu-\nu)^2}} = f(\omega)$

$f'(\omega) = 0 = \frac{k\,2\omega}{2\sqrt{\omega^2+\nu^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2+(k\mu-\nu)^2}} + k\sqrt{\omega^2+\nu^2}\cdot\frac{-1\cdot 2\omega}{2(\omega^2+(k\mu-\nu)^2)^{3/2}}$

$= \frac{k\omega\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\nu^2}} - k\omega\sqrt{\omega^2+\nu^2}\cdot(\omega^2+(k\mu-\nu^2))}{\sqrt{\omega^2+(k\mu-\nu)^2}} = 0$

$\Rightarrow 1 = (\omega^2+\nu^2)(\omega^2+(k\mu-\nu^2))$

$\Rightarrow (\omega^2)^2 + k\mu\omega^2 + \nu^2(k\mu-\nu^2) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = -\frac{k\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{(k\mu)^2}{4} - \nu^2(k\mu-\nu^2)}$

med detta ω^2 får $f(\omega)$ sitt största värde,

men om vi sätter $k=0$ blir detta värde $=0$.