CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för TM2 (m fl), ERE091/SSY310, tisdagen 3 juni 2014.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: V-salar

Examinator: Claes Breitholtz

Lärare under tentamen: Claes Lindeborg (0705 655925)

Tentamensresultaten meddelas senast den 18 juni genom personligt e-mail. Granskning av rättning är möjlig den 19 och 20 juni, 12.15 -13.00, på plan 5 i E-huset (mot Hörsals-vägen). Var vänlig iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 20 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

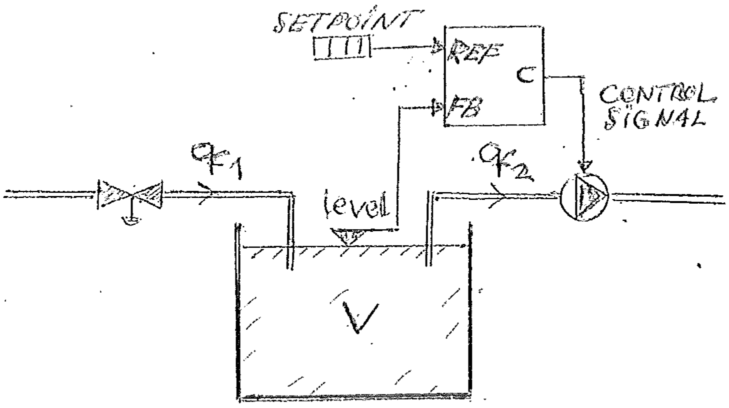
betyg TRE : minst 8 poäng
betyg FYRA: minst 12 poäng
betyg FEM : minst 16 poäng

<u>Tillåtna hjälpmedel</u>:

1. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
2. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
3. Typgodkänd kalkylator.

LYCKA TILL!

1. Betrakta systemet i figuren, där variationen i infödet q_1 är en störstorhet, medan variationen i utflödet q_2 är en styrstorhet. Karets bottenarea är 1 m^2.



a) Ställ upp en materialbalans som beskriver processen (dvs utan regulator) och ange den överföringsfuktion som relaterar variationer i utpumpat flöde Δq_2 till volymsvariationer ΔV .

1 poäng

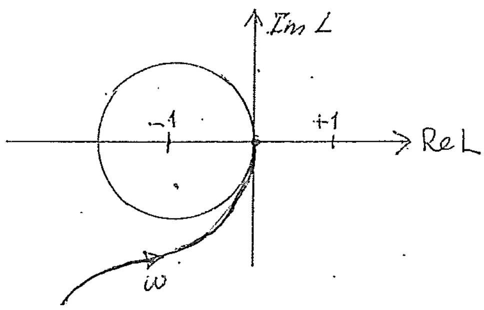
b) Föreslå och motivera valet av en regulator åt processen ovan, sådan att stegstörningar inte ger upphov till kvarstående fel, och där 45^o fasmarginal uppnås vid skärfrekvensen $\omega_c = 1$ rad/minut.

2 poäng

c) Skissera ett Bodediagram (såväl fas- som beloppkurva) över resulterande kretsöverföring, där det tydligt framgår att fasmarginalen uppnås vid begärd skärfrekvens.

2 poäng

2. En viss typ av reglersystem kan ha egenskapen att kretsöverföringens Nyquistkurva alltid ligger utanför en cirkel med radien ett och centrum i punkten $-1 + i \cdot 0$. Ange lägsta möjliga värde på fasmarginalen i ett sådant fall. Vilket största värde på känslighetsfunktionens belopp kan då förväntas?



3 poäng

3. Ett linjärt tidsinvariant system beskrivs av tillståndsmodellen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \text{ och } y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

där *u* är en <u>känd</u> insignal, medan *w* är en <u>icke mätbar</u> störning

a) Avgör om systemet är observerbart och bestäm observatörsmatrisen, *K*, så att resulterande observatörens båda egenvärden blir -1.

3 poäng

b) Antag att störningen är en rektangulär puls med mycket stor höjd, mycket kort varaktighet och ytan ett, som inträffar vid tiden noll. Beräkna skattningsfelet som funktion av tiden. Det är ett rimligt antagande att skattningsfelet var noll omedelbart innan störningen inträffade.

2 poäng

Ledning Om $f(t)$ är en kontinuerlig funktion och $\delta(t)$ är Dirac's "impulsfunktion" så gäller:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

4. Betrakta överföringsfunktionen (som kan uppkomma i samband med fysikaliska system som beskrivs av linjära partiella differentialekvationer):

$$G(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 4s + 5}}$$

a) Bestäm viktfunktionen $g(t)$. Använd $L\{e^{-bt} \cdot f(t)\} = F(s+b)$, samt utnyttja sambandet

$$L^{-1}\left\{1/(\sqrt{s^2 + a^2})\right\} = J_0(at)$$

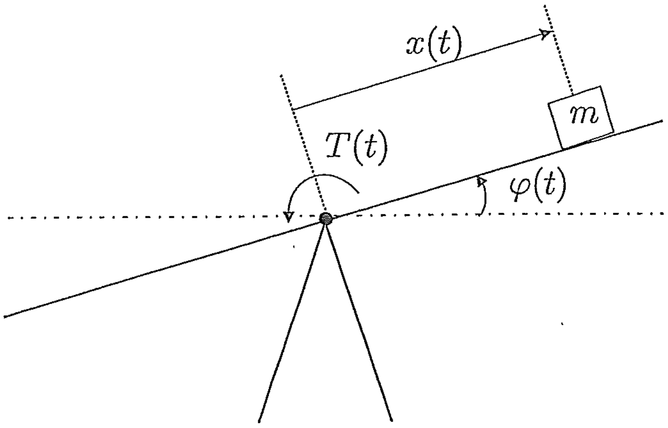
1 poäng

b) Visa att det givna systemet med viktfunktionen $g(t)$ är insignal-utsignalstabilt.

2 poäng

Ledning $J_0(x)$, $x \geq 0$ är en sk ***Besselfunktion***, en oscillatorisk, relativt svagt dämpad funktion, vars maximala värde är $J_0(0) = 1$ och vars minimala värde är $J_0(3,9) \approx -0,40$.

5. Figuren nedan visar ett arbetsstycke med massan *m* som förflyttas på ett lutande plan.



Låt avståndet till rotationscentrum vara *p* och vinkeln mellan horisontalplanet och det lutande planet vara φ. Arbetsstyckets position styrs med hjälp av ett ställdon, som kan leverera ett variabelt moment *T*, applicerat vid rotationscentrum. Följande momentbalans och kraftbalans beskriver systemets dynamik (g betecknar tyngdaccellerationen):

$$m \cdot p^2(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = T(t) - mg \cdot p(t) \cdot \cos[\varphi(t)]$$

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2}p(t) = -mg \cdot \sin[\varphi(t)] + m \cdot \left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)^2 \cdot p(t)$$

a) Betrakta jämviktspunkten i systemet där $p = p_0$, $\varphi = \varphi_0$, $T = T_0$. Om positionen p_0 anses given (men i princip godtycklig), bestäm vilka värden på φ_0 och T_0 som då motsvarar jämvikt, dvs då alla tidsderivator är noll?

1 poäng

b) Antag <u>små avvikelser</u> från jämviktstillståndet definierat av $p = p_0$, $\varphi = \varphi_0$, $T = T_0$ och inför tillståndsstorheterna $x_1 = \Delta p$, $x_2 = \Delta\dot{p}$, $x_3 = \Delta\varphi$, $x_4 = \Delta\dot{\varphi}$, styrstorheten $u = \Delta T$ samt utstorheten $y = \Delta p$. Ställ upp motsvarande linjära tillståndsmodell på standardformen $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ och avgör systemets stabilitet (insignal-utsignalstabilt, marginellt stabilt eller instabilt).

3 poäng

Laplace-transformen

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i} F(s)e^{st}ds$$

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = sF(s) - f(0) \qquad \mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-D)\} = e^{-sD}F(s) \qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)F(s)\} = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cdot f(t)\} = F(s+a) \qquad \mathcal{L}\{t\cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = 1/s \qquad \mathcal{L}\{\rho(t)\} = 1/s^2 \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \text{(steg, ramp, impuls)}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2} \qquad \mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \qquad \mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad \mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

Z-transformen

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) - f(-1)$$

$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$ har samma antal rötter inom $|z| = 1$i z-planet som,

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_n$$

har inne i vänstra halvan av w-planet. (Möbiustransformen)

$$\mathcal{Z}\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z-1} \qquad \mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a} \qquad \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1 \qquad \text{(steg, exponent, impuls)}$$

$$\lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z) \qquad \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

LTI-modeller

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad Y(s) = G(s)U(s)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(k-i)u(i) \qquad Y(z) = H(z)U(z)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad g(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t)$$

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + A^2t^2/2! + A^3t^3/3! + \ldots = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t), \qquad \Phi(0) = I, \qquad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \qquad \Phi(t)\Phi(r) = \Phi(t + r)$$

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)Bu(\tau)\, d\tau$$

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} + d$$

Styrbar kanonisk form:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_{n-1}\ b_n]x(t) + d \cdot u(t)$$

Observerbar kanonisk form:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1\ 0\ \cdots\ 0\ 0]x(t) + d \cdot u(t)$$

Styr- och observerbarhet beror av rang(S) respektive av rang(O):

$$S = [B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B], \quad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Routh-Hurwitz' stabilitetskriterium

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ s^{n-2} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ s^{n-2} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^1 & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$$c_1 = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}$$
$$c_2 = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}$$
$$c_3 = \cdots$$
$$d_1 = \frac{c_1 a_3 - c_2 a_1}{c_1}$$
$$c_2 = \cdots$$

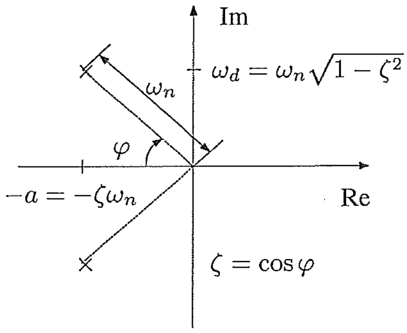
Antal teckenbyten i vänstra kolumnen ger antalet positiva poler

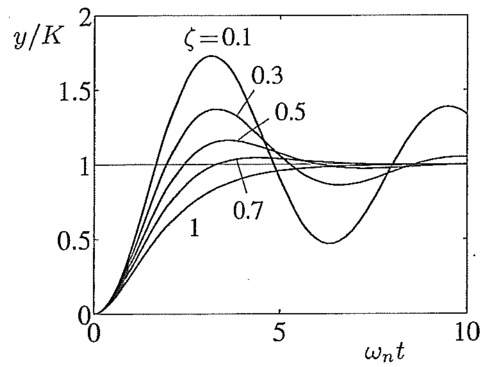
Tidssvar

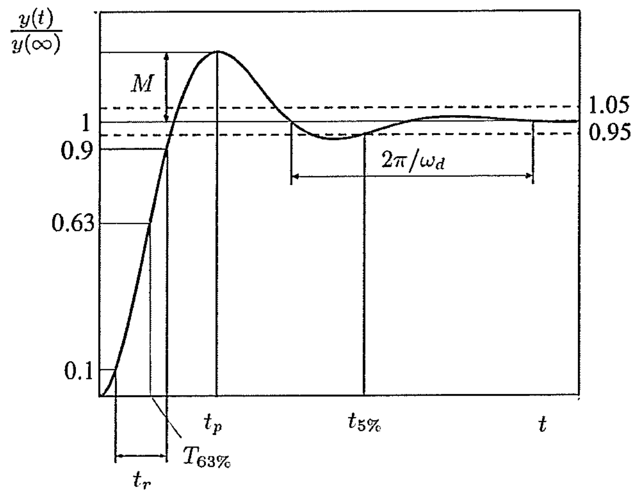
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

$$s = -a \pm j\omega_d \quad \text{där} \quad \begin{cases} a = \zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

$$y(t) = K(1 - e^{-at}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \varphi)) \quad \text{där} \quad \varphi = \arccos(\zeta)$$







$$t_r \approx \frac{1}{\omega_n}(1 + 0.3\zeta + 2\zeta^2) \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad M = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

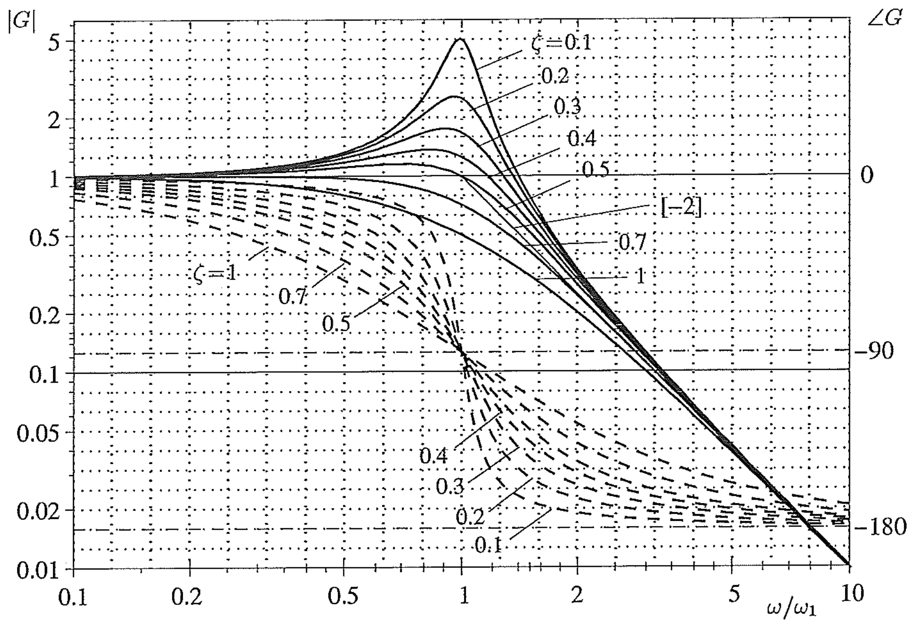
$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Bode-diagram

$$G(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_1}$$

ω	$\omega_1/4$	$\omega_1/2$	ω_1	$2\omega_1$	$4\omega_1$
Korrektion	$\frac{1}{\sqrt{1.0625}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.25}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.25}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.0625}}$
Korrektion$_{\text{dB}}$	−0.2 dB	−1.0 dB	−3 dB	−1.0 dB	−0.2 dB

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_1 + (s/\omega_1)^2}$$



Nyquist

$Z = P + N$

$Z =$ antal instabila poler för slutna systemet

$P =$ antal instabila poler för öppna systemet

$N =$ antal varv i bildplanet runt kritiska punkten

Regulatordesign

Känslighetsfunktioner:

$$T = \frac{L}{1+L}, \qquad S = \frac{1}{1+L}, \qquad L = GF$$

$$G_0 = (1 + \Delta G)G, \qquad \text{Robust stabilitet för } |\Delta G| < 1/T, \quad \forall \omega > 0$$

Tillståndsåterkoppling:

$$u(t) = L_r r(t) - Lx(t)$$

r stegformad ger att $y \to r$ då $t \to \infty$ för

$$L_r = \left[C(BL - A)^{-1}B\right]^{-1}$$

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + BL_r r(t), \qquad y(t) = Cx(t)$$

Observatör

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)\right]$$

skattningsfel (utan störningar)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - KC)\tilde{x}(t)$$

Lagfilter (fasretarderande):

$$F(s) = \frac{1+Ts}{\alpha + Ts}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Leadfilter (fasavancerande):

$$F(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \beta = \frac{1 - \sin\varphi_{max}}{1 + \sin\varphi_{max}}, \quad \varphi_{max} \text{ uppnås för } \frac{1}{T\sqrt{\beta}}$$

Regulatorer:

$$F_P(s) = K_p$$

$$F_I(s) = K_i/s$$

$$F_{PI}(s) = K_p + K_i/s = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$F_{PD}(s) = K_p + \frac{K_d s}{1 + T_f s} = K_p\left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\right)$$

$$F_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + T_f s} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\right)$$

$$F_{PID}(z) = K_p + \frac{K_i h}{z-1} + \frac{(K_d/T_f)(z-1)}{z - e^{-h/T_f}}$$

Extratentamen för TM2 mfl 3 juni 2014 / EB

1. a) $\dot{V}(t) = q_{f_1}(t) - q_{f_2}(t)$ eller

$\Delta\dot{V} = \Delta q_{f_1} - \Delta q_{f_2}$ (differentiell materialbalans)

$$s\Delta\tilde{V}(s) - \underbrace{\Delta V(0)}_{=0} = \Delta\tilde{q}_{f_1}(s) - \Delta\tilde{q}_{f_2}(s) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{G_2(s)}} = \frac{\Delta\tilde{V}(s)}{\Delta\tilde{q}_{f_2}(s)} = \underline{\underline{-\frac{1}{s}}}$$ (Δq_{f_1} sätts till noll pga superpositionen!)

b) Noll kvarst. fel $\Rightarrow$ integralverkan (dvs I, PI, PID)
I fungerar inte här, så förstavalet är PI!

$$-F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \Rightarrow L(s) = \frac{K_p s + K_i}{s^2}$$

För att kompensera processens minustecken!

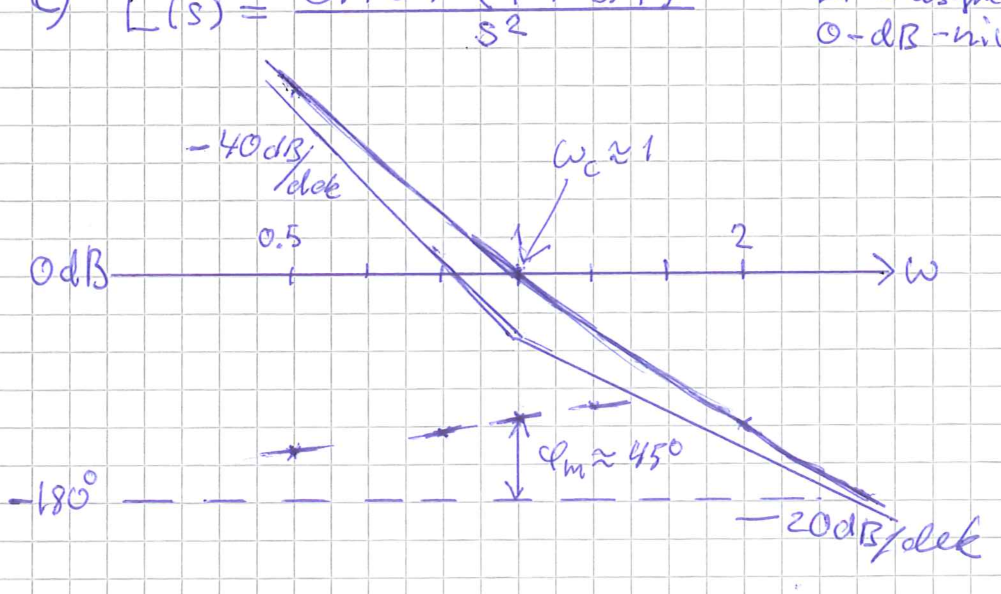
$$\varphi_m = \pi + \arg L(i\omega_c) = \pi - \pi + \arctan\left(\frac{K_p\omega_c}{K_i}\right)$$

$\varphi_m = 45°$ och $\omega_c = 1 \Rightarrow K_p = K_i$

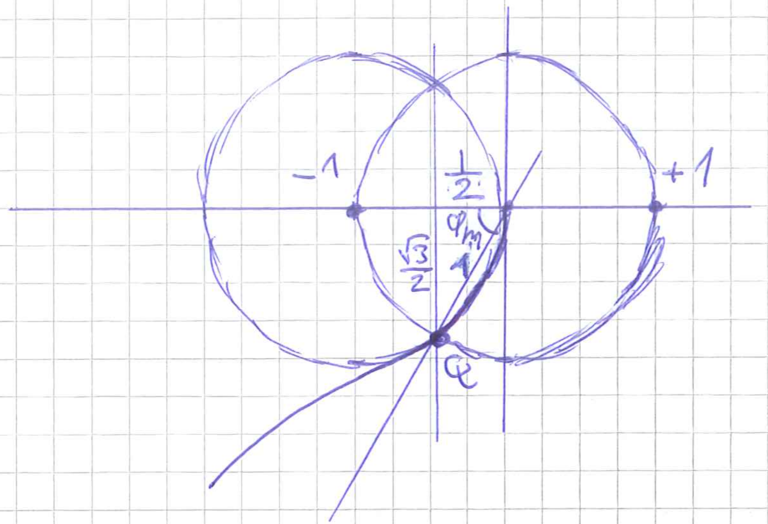
$$|L(i\omega_c)| = \frac{|K_p i + K_p|}{|-1|} = \frac{K_p\sqrt{2}}{1} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dvs $$\underline{\underline{F(s) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{s}\right)}}$$

c) $$L(s) = \frac{0.707\,(1 + s/1)}{s^2}$$ LF-asymptoten skär 0-dB-nivån



2.



Om N-kurvan passerar rätt innanför cirkeln med radien ett centrerad i $-1+i0$, kommer den att passera skärningen mellan denna cirkel och enhetscirkeln i pkten Q. Elementär trigonometri visar att $\tan\varphi_m = \sqrt{3}$, dvs $\varphi_m = 60°$ eller mer om N-kurvan passerar genom en närliggande punkt.

$$S = \frac{1}{1+L} \Rightarrow |S(i\omega_c)| = \frac{1}{|1+|L(i\omega_c)|e^{i\arg L(i\omega_c)}|}$$

$|L(i\omega_c)| = 1$ (enl. def.)

$\arg L(i\omega_c) = \varphi_m - 180°$ (enl. def.)

$$|S(i\omega_c)| = \frac{1}{|1+\cos(\varphi_m - 180°) + i\sin(\varphi_m - 180°)|} =$$

$\cos(\varphi_m - 180°) = \cos\varphi_m \cdot \cos 180° + \sin\varphi_m \cdot \sin 180° = -\cos\varphi_m$

$\sin(\varphi_m - 180°) = \sin\varphi_m \cos 180° - \cos\varphi_m \cdot \sin 180° = -\sin\varphi_m$

$$= \frac{1}{|1-\cos\varphi_m - i\sin\varphi_m|} = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos\varphi_m}} \leq \frac{1}{\sqrt{2-\frac{2}{2}}} = 1$$

$|S(i\omega_c)| \leq 1$ för sådana system.

3. a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$

$y = (1 \quad -1) x \qquad (1 \quad -1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)$

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ full rang $\Rightarrow$ Observerbart!

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K[y - C\hat{x}] =$$
$$= (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}(1 \quad -1) = \begin{pmatrix} -k_1 & k_1+1 \\ -k_2-1 & -1+k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + k_1 & -(k_1+1) \\ k_2+1 & \lambda+1-k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (1 + k_1 - k_2)\lambda +$$
$$+ k_1 - \cancel{k_1 k_2} + \cancel{k_1 k_2} + k_2 + k_1 + 1 =$$
$$= \lambda^2 + (k_1 - k_2 + 1)\lambda + 2k_1 + k_2 + 1 \equiv (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 - k_2 + 1 = 2 \\ 2k_1 + k_2 + 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3k_1 + 2 = 3 \Rightarrow k_1 = 1/3$$
$$k_2 = -2k_1 = -2/3$$

$$\therefore K = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}x = Ax + Bu + N \cdot w \\ \frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K[y - C\hat{x}] \\ \tilde{x} = x - \hat{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\tilde{x} = A\tilde{x} + \\ + Nw - KC\tilde{x} \end{array}$$

eller

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = (A - KC)\tilde{x} + Nw \Rightarrow$$

$$\tilde{x}(t) = e^{(A-KC)t} \cdot \underbrace{\tilde{x}(0)}_{=0} + \int_0^t e^{(A-KC)\tau} N \underbrace{w(t-\tau)}_{\approx \delta(t-\tau)} d\tau \approx$$

$$\approx e^{(A-KC)t} \cdot N$$

3. b forts)

$$A - KC = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ -1/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

$$e^{(A-KC)t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{[sI - (A-KC)]^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} s+\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & s+\frac{5}{3} \end{pmatrix}^{-1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\begin{pmatrix} s+5/3 & 4/3 \\ -1/3 & s+1/3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\tilde{x}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{pmatrix} s+5/3 & 4/3 \\ -1/3 & s+1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{pmatrix} 4/3 \\ s+1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2}\begin{pmatrix} 4/3 \\ (s+1) - 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} 4/3 \cdot t \cdot e^{-t} \\ e^{-t} - 2/3 \cdot t \cdot e^{-t} \end{pmatrix}}}$$

4. a) $G(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+4s+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{(s+2)^2+1}} = \mathcal{L}\{g(t)\}$

$$\underline{\underline{g(t)}} = \underbrace{e^{-2t} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\}}_{\text{Enligt dämpningssatsen}} = \underline{\underline{e^{-2t} \cdot J_0(t)}}$$

b) Systemet insignal-utsignalstabilt om $\int_0^\infty |g(t)|\,dt$ konv.

$$\int_0^\infty |g(t)|\,dt = \int_0^\infty e^{-2t} |J_0(t)|\,dt \leq \int_0^\infty e^{-2t}\,dt =$$

$$= \Big[\frac{e^{-2t}}{-2}\Big]_0^\infty = 1/2 < \infty \Rightarrow$$

<u>Systemet är insignal-utsignalstabilt!</u>

5. a) Jämviktspkt $(\rho_0, \varphi_0, T_0) \Rightarrow$ Samtliga tidsderivator sätts till noll:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = T_0 - mg\rho_0 \cdot \cos\varphi_0 \\ 0 = -mg \cdot \sin\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T_0 = mg\rho_0$$

dvs ρ_0 fri konstant $\Rightarrow \varphi_0 = 0$ och $T_0 = mg\rho_0$

b) $$m\rho_0^2 \Delta\ddot{\varphi} = \Delta T - mg \cdot \Delta\rho$$

$$\cancel{m}\, \Delta\ddot{\rho} = -\cancel{m}g \cdot \Delta\varphi$$

Här har använts att $\cos\Delta\varphi \approx 1$ och $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ (små vinklar) och kvadrater på Δ-storheter (och dess derivator) har ignorerats (termen har satts till noll).

Inför tillståndsstorheter $x_1 = \Delta\rho$, $x_2 = \Delta\dot{\rho}$, $x_3 = \Delta\varphi$, $x_4 = \Delta\dot{\varphi}$ och styrstorhet $u = \Delta T$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u/(m\rho_0^2) - (g/\rho_0^2)x_1 \end{cases} \qquad y = \Delta\rho = x_1$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{\rho_0^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m\rho_0^2} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

5, b (forts.) Polerna ges av $\det(sI - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & g & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ +\frac{g}{P_0^2} & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^4 + \begin{vmatrix} 0 & g & 0 \\ 0 & s & -1 \\ +\frac{g}{P_0^2} & 0 & s \end{vmatrix} =$$

$$= s^4 - g\left(-\frac{g}{P_0^2}\right) = s^4 + \frac{g^2}{P_0^2} = s^4 + \nu^4 =$$

$$= (s+\nu)\underbrace{(s^3 - \nu s^2 + \nu^2 s - \nu^3)}_{\text{Rouths kriterium } \Rightarrow}$$

$s = -\nu$
(stabil pol)

s^3	1	ν^2
s^2	$-\nu$	$-\nu^3$
s	ε	0
1	$-\nu^3$	0

$\Rightarrow$ <u>Instabilt system</u>

(En eller flera poler i HHP.)

($s^3 - \nu s^2 + \nu^2 s - \nu^3 = s(s^2+\nu^2) - \nu(s^2+\nu^2) =$
$= (s-\nu)(s^2+\nu^2)$

Systemet har alltså poler för $s = \nu$, $s = -\nu$ och $s = \pm i\nu$ där $\nu = \sqrt{g/P_0}$.)