CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, och för Kf2, SSY310, måndagen 2 juni 2014.

Tid: Kl 14.00 - 18.00

Lokal: M-salar

Examinator: Claes Breitholtz

Lärare under tentamen: Veronica Olesen (772 1728)

Tentamensresultaten meddelas senast den 18 juni genom personligt e-mail. Granskning av rättning är möjlig den 19 och 20 juni, 12.15 -13.00, på plan 5 i E-huset (mot Hörsals-vägen). Var vänlig iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 20 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 8 poäng
betyg FYRA: minst 12 poäng
betyg FEM : minst 16 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
2. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
3. Typgodkänd kalkylator.

LYCKA TILL!

1. Ett linjärt system beskrivs av följande differentialekvation med insignal u och utsignal y:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Formulera en tillståndsmodell på diagonalform (dvs med egenvärdena i diagonalen och övriga element i A-matrisen noll), som är både styrbar och observerbar. Kan detta problem lösas om något element i B-matrisen eller C-matrisen är noll?

2 poäng

2. En bil med totala massan M påverkas framför allt av två krafter $u(t)$ som är drivkraften från motorn, och $w(t)$ som är en bromsande kraft (t ex dynamisk friktion och luftmotstånd).

a) Ange överföringsfunktionen från drivkraften u till bilens hastighet v, då $w = 0$.

1 poäng

b) Ange överföringsfunktionen från drivkraften u till bilens acceleration a, då bromskraften w antas proportionell mot hastigheten v med proportionalitetskonstanten K.

1 poäng

c) Bromskraften w antas proportionell mot kvadraten på hastigheten v med proportionalitets-konstanten C. Betrakta. Ange överföringsfunktionen från små variationer i drivkraften, Δu, till små variationer i hastighet, Δv. Dessa kan anses vara nära den konstanta hastigheten v_0.

1 poäng

3. Ett system beskrivs av överföringsfunktionen $G(s) = e^{-s}/s$. Bestäm en regulator, där valet av regulatortyp skall motiveras, sådan att systemets fasmarginal φ_m blir 35° då skärfrekvensen ω_c är 1.6 rad/sek. I uppgiften ingår att verifiera att regulatorn uppfyller givna specifikationer.

2 poäng

4. En sensor med insignalen z och utsignalen y har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2}$$

där τ, ζ, ω_0 är kända och > 0. Bestäm matrisen K i en observatör, med båda egenvärdena $-\nu$. Sensorns skall här beskrivas av en tillståndsmodell på observerbar kanonisk form.

2 poäng

7. Ett system med överföringsfunktionen $G(s)$ skall regleras med P-regulatorn $F(s) = \kappa$.

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \cdot e^{-s/2}$$

Föreslå, genom att använda Nyquistskriteriet, lämplig förstärkning κ. För full poäng skall valet av κ tydligt motiveras utgående från Nyquistdiagrammet!

4 poäng

Laplace-transformen

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i} F(s)e^{st}ds$$

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = sF(s) - f(0) \qquad \mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-D)\} = e^{-sD}F(s) \qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)F(s)\} = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cdot f(t)\} = F(s+a) \qquad \mathcal{L}\{t\cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = 1/s \qquad \mathcal{L}\{\rho(t)\} = 1/s^2 \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \text{(steg, ramp, impuls)}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2} \qquad \mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a} \qquad \mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad \mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

Z-transformen

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) - f(-1)$$

$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$ har samma antal rötter inom $|z| = 1$i z-planet som,

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_n$$

har inne i vänstra halvan av w-planet. (Möbiustransformen)

$$\mathcal{Z}\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z-1} \qquad \mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a} \qquad \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1 \qquad \text{(steg, exponent, impuls)}$$

$$\lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty} F(z) \qquad \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

LTI-modeller

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad Y(s) = G(s)U(s)$$

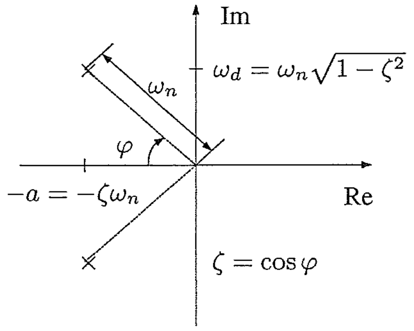
$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(k-i)u(i) \qquad Y(z) = H(z)U(z)$$

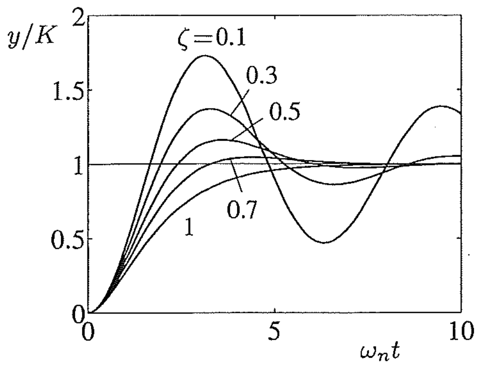
Tidssvar

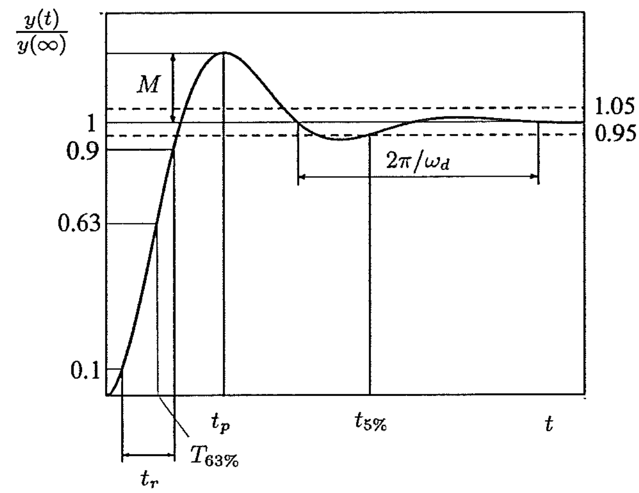
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

$$s = -a \pm j\omega_d \quad \text{där} \quad \begin{cases} a = \zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

$$y(t) = K(1 - e^{-at}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \varphi)) \quad \text{där} \quad \varphi = \arccos(\zeta)$$







$$t_r \approx \frac{1}{\omega_n}(1 + 0.3\zeta + 2\zeta^2) \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad M = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Regulatordesign

Känslighetsfunktioner:

$$T = \frac{L}{1+L}, \qquad S = \frac{1}{1+L}, \qquad L = GF$$

$$G_0 = (1+\Delta G)G, \qquad \text{Robust stabilitet för } |\Delta G| < 1/T, \quad \forall \omega > 0$$

Tillståndsåterkoppling:

$$u(t) = L_r r(t) - Lx(t)$$

r stegformad ger att $y \to r$ då $t \to \infty$ för

$$L_r = \left[C(BL-A)^{-1}B\right]^{-1}$$

$$\dot{x}(t) = (A-BL)x(t) + BL_r r(t), \qquad y(t) = Cx(t)$$

Observatör

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)\right]$$

skattningsfel (utan störningar)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A-KC)\tilde{x}(t)$$

Lagfilter (fasretarderande):

$$F(s) = \frac{1+Ts}{\alpha+Ts}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Leadfilter (fasavancerande):

$$F(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \beta = \frac{1-\sin\varphi_{max}}{1+\sin\varphi_{max}}, \quad \varphi_{max} \text{ uppnås för } \frac{1}{T\sqrt{\beta}}$$

Regulatorer:

$$F_P(s) = K_p$$

$$F_I(s) = K_i/s$$

$$F_{PI}(s) = K_p + K_i/s = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$$

$$F_{PD}(s) = K_p + \frac{K_d s}{1+T_f s} = K_p(1 + \frac{T_d s}{1+T_f s})$$

$$F_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1+T_f s} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1+T_f s}\right)$$

$$F_{PID}(z) = K_p + \frac{K_i h}{z-1} + \frac{(K_d/T_f)(z-1)}{z-e^{-h/T_f}}$$

5

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: EREC91-51	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 0,5	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 1 — Question no. / Uppgift nr: 1

Skriv $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}$ ← här skall ej ngn derivata finnas

$\ddot{y} = -5\dot{y} - 4y + \dot{u} + 2u \Rightarrow \dot{x}_2 = -5x_2 - 4x_1 + u_2 + 2u_1$

$\dot{x}_1 = x_2$ ger systemet

$\dot{X} = AX + Bu$ med $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$y = CX$ $\quad C = [1 \ 0]$

vi vill hitta transformatrisen T: $X = T\tilde{X}$

$\dot{X} = AX + Bu \Leftrightarrow T\dot{\tilde{X}} = AT\tilde{X} + Bu \Rightarrow \dot{\tilde{X}} = T^{-1}AT\tilde{X} + T^{-1}Bu$

$y = CX = CT\tilde{X}$ nytt system

$\dot{\tilde{X}} = \tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}u$, $y = \tilde{C}\tilde{X}$ med $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$, $\tilde{C} = CT$.

om $T = [g_1, g_2]$, g_1, g_2 egenvektorer till A gäller

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

Beräkna $\det(\lambda I - A) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & 5+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

$(\lambda + 2{,}5)^2 - 2{,}5^2 + 4 = 0 \quad \lambda = -2{,}5 \pm \sqrt{9/4} = \dfrac{-5 \pm 3}{2}$

$Ag_1 = \lambda_1 g_1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{bmatrix} = \dfrac{-8}{2}\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{bmatrix}$

0,5

$\begin{cases} g_{12} = -4g_{11} \\ -4g_{11} - 5g_{12} = -4g_{12} \end{cases} \Rightarrow g_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$Ag_2 = \lambda_2 g_2$ ger $\begin{cases} g_{22} = -g_{21} \\ -4g_{21} - 5g_{22} = -g_{22} \end{cases} \Rightarrow g_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

vi har alltså $T = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 4\sqrt{2} & -\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \dfrac{1}{30}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 4\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Ett test ger att $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Räknefel...

Dock blir systemet ej styrbart/observerbart om element i $\tilde{C}\tilde{B}$...

5

CHALMERS

Anonymous code / Anonym kod	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr
ERE091-51	3	2
		Question no. / Uppgift nr: 2

a) $F = ma = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{u}{M}$

Laplace ger $sV = \frac{U}{M} \Rightarrow \frac{V}{U} = \frac{1}{sM}$ är den sökta överföringsfunktionen.

b) $u - w = Ma \Leftrightarrow u - Kv = Ma \qquad u - K\int_0^t a\,dt = Ma$

$U - K\frac{A}{s} = MA \qquad U = A(M + \frac{K}{s})$

$\frac{A}{U} = \frac{1}{M + K/s} = \frac{s}{Ms + K}$ är den sökta överföringsfunktionen.

Slarv!

c) $u - w = Ma \Rightarrow u - cv^2 = Ma \Leftrightarrow \dot{v} = \frac{u - cv^2}{M} = f(v, u)$

vid hastigheten v_0 är $\dot{v} = 0$ ger $\frac{u_0 - cv_0^2}{M} = 0$

$\Rightarrow u_0 = cv_0^2$

$f(v_0 + \Delta v, u_0 + \Delta u) \approx f(v_0, u_0) + f'(v_0, u_0)\begin{bmatrix}\Delta v \\ \Delta u\end{bmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2cv}{M}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{M}$ vi får då

$\underbrace{\frac{d}{dt}(v_0 + \Delta v)}_{= \Delta\dot{v}} = \begin{bmatrix}-\frac{2cv_0}{M} & \frac{1}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta v \\ \Delta u\end{bmatrix} = -\frac{2cv_0}{M}\Delta v + \frac{\Delta u}{M}$

Slarv!

Laplace ger

$s\Delta V = -\frac{2cv_0}{M}\Delta V + \frac{\Delta U}{M} \Rightarrow \Delta V(s + \frac{2cv_0}{M}) = \frac{\Delta U}{M}$

$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta U} = \frac{1}{sM + 2cv_0}$, vilket är den sökta överföringsfunktionen.

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: ERE091-51	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 0	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 3
5			Question no. / Uppgift nr: 3

Regulator $F(s)$. $L(s) = G(s)F(s)$, $G(s) = e^{-s}/s$

vi har villkor $\begin{cases} |L(j\omega_c)| = 1 \\ \angle\{L(j\omega_c)\} = \varphi_m - 180^\circ \end{cases}$

φ_m, ω_c, G givna => vi behöver F med två parametrar, alltså väljer vi en PI-regulator.

$$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$\angle\{L(j\omega_c)\} = \angle\left\{K\left(1 + \frac{1}{T_i j\omega_c}\right)\frac{e^{-j\omega_c}}{j\omega_c}\right\} =$$

$$= \angle\{1 + T_i j\omega_c\} - \angle\{T_i j\omega_c\} + \angle\{e^{-j\omega_c}\} - \angle\{j\omega_c\} =$$

$$= \arctan\frac{T_i\omega_c}{1} - 90^\circ - \omega_c - 90^\circ = \varphi_m - 180^\circ$$

ger $T_i = \dfrac{\tan(\varphi_m + \omega_c)}{\omega_c} \approx -0{,}839$

Kommentar: Ovanligt med negativt värde...

Precis

$$|L(j\omega_c)| = \frac{|K||1 + T_i j\omega_c||e^{-j\omega_c}|}{|T_i j\omega_c||j\omega_c|} = K\frac{\sqrt{1 + T_i^2\omega_c^2}}{T_i\omega_c^2} = 1$$

ger $K = \dfrac{T_i\omega_c^2}{\sqrt{1 + T_i^2\omega_c^2}} \approx -1{,}28$

$$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{K}{T_i}\left(\frac{T_i s + 1}{s}\right) \approx 1{,}53\left(\frac{1 - 0{,}845s}{s}\right)$$

Dock uppfyller ej denna F att $\varphi_m = 35^\circ$.
Vi skulle behöva en fasavancerande länk eller PID-regulator.

Som du misstänkte så krävs PD-f

0p

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: ERE091-51	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 2	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 4 — Question no. / Uppgift nr: 4

5

observerbar kanonisk form av $H = \frac{1+\tau s}{1+2\zeta(s/\omega_0)+(s/\omega_0)^2} =$

$= \frac{\omega_0^2 \tau s + \omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$ ger oaff

$A = \begin{bmatrix} -2\zeta\omega_0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \omega_0^2\tau \\ \omega_0^2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

observatör $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y-\hat{y})$, $\hat{y} = C\hat{x}$

$\Rightarrow \dot{\hat{x}} = (A-KC)\hat{x} + Bu + Ky$ Poler/egenvärden:

$\det(\lambda I - A + KC) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda + 2\zeta\omega_0 + k_1 & -1 \\ \omega_0^2 + k_2 & \lambda \end{vmatrix} =$

$= (\lambda + 2\zeta\omega_0 + k_1)\lambda + \omega_0^2 + k_2 = \lambda^2 + \lambda(2\zeta\omega_0 + k_1) + \omega_0^2 + k_2 =$

$= (\lambda+\nu)(\lambda+\nu) = \lambda^2 + 2\lambda\nu + \nu^2$ matcha koefficienter:

$\begin{cases} 2\zeta\omega_0 + k_1 = 2\nu & \Rightarrow k_1 = 2(\nu - \zeta\omega_0) \\ \omega_0^2 + k_2 = \nu^2 & \Rightarrow k_2 = \nu^2 - \omega_0^2 \end{cases}$

<u>Svar:</u> vi får matrisen $K = \begin{bmatrix} 2(\nu - \zeta\omega_0) \\ \nu^2 - \omega_0^2 \end{bmatrix}$, observatören

$\dot{\hat{x}} = (A-KC)\hat{x} + Bu + Ky$, A,B,C enl. ovan.

2p

5

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: EREC91-51	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare): 4	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 5
			Question no. / Uppgift nr: 5

a) $G(s)=\frac{1}{s+a}$, $F(s)=K\frac{s+a}{s}$, $L(s)=G(s)F(s)$

Återkopplade systemet $T(s)=L(s)/(1+L(s))$

pol i $s=-2a$ ger $1+L(-2a)=0$

$L(s)=K\frac{s+a}{s}\cdot\frac{1}{s+a}=\frac{K}{s}$ ger $1+\frac{K}{-2a}=0 \Rightarrow K=2a$

0,5

$T=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{2a/s}{1+\frac{2a}{s}}=\frac{2a}{s+2a}$

Systemets stegsvar är $\frac{2a}{s(s+2a)}$,

transformeras till tidsplanet och vi får

$f(t)=-e^{-2at}+1$ ok

$f(t_1)=0,1 \Leftrightarrow 1-e^{-2at_1}=0,1$

$e^{-2at_1}=0,9 \quad t_1=\frac{\ln 0,9}{-2a}$

$f(t_2)=0,9 \Leftrightarrow 1-e^{-2at_2}=0,9 \Rightarrow e^{-2at_2}=0,1$

$\Rightarrow t_2=\frac{\ln 0,1}{-2a}$

$t_r=t_2-t_1=\frac{\ln 0,9-\ln 0,1}{2a}\approx\frac{1,1}{a}$ vilket är stigtiden

1,5

b) $G_0(s)=\frac{s+b+\Delta b}{(s+a)(s+b)}=(1+\Delta G(s))G(s)$

ger $\frac{s+b+\Delta b}{s+b}=1+\Delta G(s) \Rightarrow \Delta G(s)=\frac{\Delta b}{s+b}$ 0,5

Lågförstärkningssatsen säger $|\Delta G(i\omega)||T(i\omega)|<1$

$|T(i\omega)|=\left|\frac{2a}{2a+i\omega}\right|=\frac{2a}{\sqrt{4a^2+\omega^2}}$ $|\Delta G(i\omega)|=\left|\frac{\Delta b}{b+i\omega}\right|=$

$=\frac{|\Delta b|}{\sqrt{b^2+\omega^2}}$ båda maximalt stora för $\omega=0$

vi får $\frac{2a|\Delta b|}{2ab}<1 \Rightarrow |\Delta b|<b.$

Svar: $\Delta G(s)=\frac{\Delta b}{s+b}$ och $|\Delta b|_{max}=b.$

1,5

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(r,t) = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial}{\partial r} T(r,t)\right]$$

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(r,t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial r^2} T(r,t) + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r} T(r,t)$$

en Laplacetransformit ger

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} T(r,s) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} T(r,s) - \frac{\rho c_p s}{\lambda} T(r,s) = 0$$

Ok 1p

med lösning:

$$T = a I_0(\beta r) + b K_0(\beta r), \quad \beta = \sqrt{\frac{\rho c_p s}{\lambda}}$$

Ok 0,5p

$T(0,t) < \infty \Rightarrow b = 0$ Ok 0,5p

$T(0,s) = Y(s)$ ger $a = Y(s)$ Ok

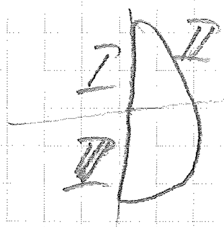
$T(R,s) = U(s) \Leftrightarrow Y(s) I_0(\beta(s) R) = U(s)$ Ok

vi får ~~att~~ den sökta överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = I_0(\beta(s) R)^{-1} = I_0\left(R\sqrt{\frac{\rho c_p s}{\lambda}}\right)^{-1}$$

2,5 p

$L(s)=F(s)G(s)=\frac{K}{s-1}e^{-s/2}$ har en pol i $s=1$ i HHP, alltså behövs fullständiga Nyquistkurvan.



I: $s=j\omega$, $\omega: 0\to\infty$

V: $s=Re^{i\theta}$, $\theta: \frac{\pi}{2}\to-\frac{\pi}{2}$, $R\to\infty$

III: $s=-j\omega$, $\omega: \infty\to 0$

Inga poler eller nollställen på kurvan!

I: $L(j\omega)=\frac{K}{j\omega-1}e^{-j\omega/2}=\frac{K(-1-j\omega)}{1+\omega^2}e^{-j\omega/2}$

$\omega=0$ ger $L(j\omega)=-K$

$\omega\to\infty$ ger $|L(j\omega)|\to 0$

Däremellan gäller $|L(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}}$ och

$\angle\{L(j\omega)\}=\arctan\omega+\pi-\frac{\omega}{2}$, vilket jag inte kan visualisera. Istället för att iterera fram för vilka ω-värden $L(j\omega)$ byter kvadrant samt dess storlek, beräknas real- och imaginärdelar numeriskt.

Betrakta $\frac{L(j\omega)}{K}=-\frac{1+j\omega}{1+\omega^2}e^{-j\omega/2}=$

$=-\frac{1+j\omega}{1+\omega^2}\left(\cos\frac{\omega}{2}-j\sin\frac{\omega}{2}\right)=\frac{-\left(\cos\frac{\omega}{2}+\omega\sin\frac{\omega}{2}\right)+j\left(\sin\frac{\omega}{2}-\omega\cos\frac{\omega}{2}\right)}{1+\omega^2}$

Tabell på nästa sida.

V: $\frac{L(Re^{i\theta})}{K}=\frac{1}{Re^{i\theta}-1}e^{-\frac{Re^{i\theta}}{2}}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$ oberoende av θ.

Hela kurvan avbildas på 0.

III: $\frac{L(-j\omega)}{K}=\frac{-\left(\cos\frac{-\omega}{2}-\omega\sin\frac{-\omega}{2}\right)+j\left(\sin\frac{-\omega}{2}+\omega\cos\frac{-\omega}{2}\right)}{1+\omega^2}=$

$=\frac{-\left(\cos\frac{\omega}{2}+\omega\sin\frac{\omega}{2}\right)-j\left(\sin\frac{\omega}{2}-\omega\cos\frac{\omega}{2}\right)}{1+\omega^2}=$

$=\mathrm{Re}\left\{\frac{L(j\omega)}{K}\right\}-j\,\mathrm{Im}\left\{\frac{L(j\omega)}{K}\right\}$ spegling i Im-axeln.

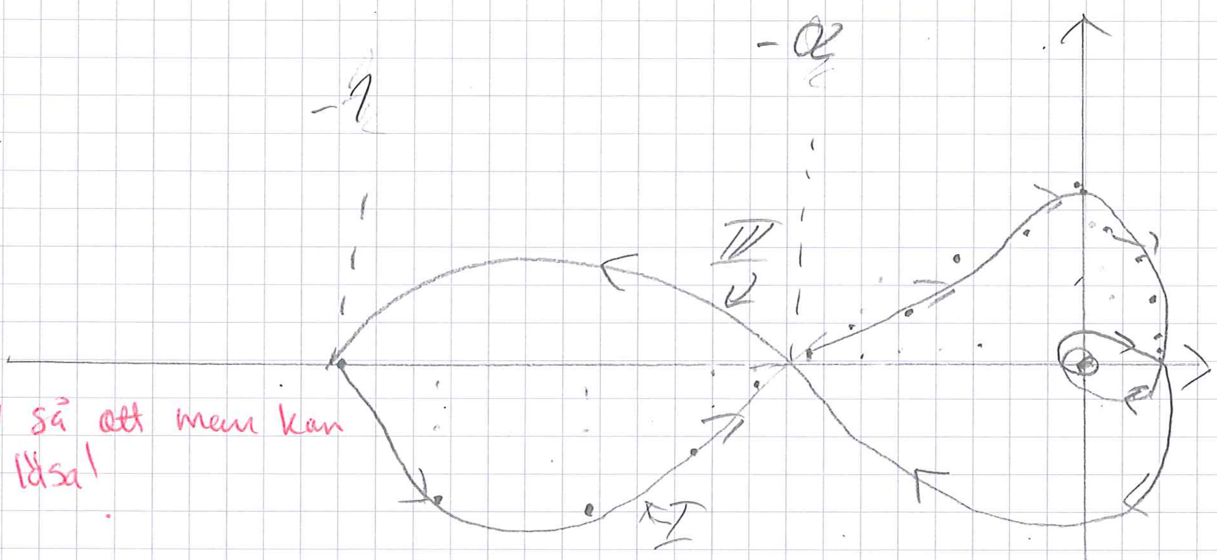
CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr
5	ERE091-51	4	8
			Question no. / Uppgift nr: 7

Tabell:

ω	$Re\left\{\frac{L(i\omega)}{k}\right\}$	$Im\left\{\frac{L(i\omega)}{k}\right\}$
0	-1	0
0,5	-0,874	-0,159
1	-0,678	-0,199
1,5	-0,539	-0,127
2	-0,444	-0,047
2,5	-0,37	0,0221
3	-0,306	0,0785
3,5	-0,246	0,1213
4	-0,189	0,1514
4,5	-0,135	0,1696
5	-0,084	0,177
5,5	-0,037	0,1748
6	3,67E-3	0,1643
6,5	0,0392	0,1469
7	0,0678	0,124
7,5	0,089	0,0925
8	0,1032	0,0688
8,5	0,1099	0,0395
9	0,1098	0,0112
9,5	0,1036	-0,014
10	0,0921	-0,037

Rita:

2



Skriv så att man kan läsa!

p=1 ni vill n=0 alltså -1 varv medurs kring -1, dvs 1 varv moturs.

? om $1 < K < \frac{1}{\alpha}$ är systemet stabilt. 2

$\alpha \approx 1/0{,}4 = 2{,}5$ enl. avläsning i tabellen.

α kan också beräknas som $\frac{1/K}{|L(i\omega_c)|}$ där ω_c anger lösningen till $Im\{L(i\omega)\}=0$.

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan