CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, onsdagen 15 januari 2014.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: M-salar

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 29 januari genom personligt e-mail. Granskning av rättningen är möjlig den 30 och 31 januari, 12.15 -13.00, på plan 5 i E-huset (mot Hörsalsvägen), vid rum 5422 (Viktor Larsson). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 20 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 8 poäng
betyg FYRA: minst 12 poäng
betyg FEM : minst 16 poäng

<u>Tillåtna hjälpmedel</u>:

1. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
2. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
3. Typgodkänd kalkylator.

LYCKA TILL!

1. Vilka av följande överföringsfunktionerna representerar insignal/utsignal-stabila system?

$$G_1(s) = \frac{2}{2s+s^2},\ G_2(s) = \frac{2-s}{(2+s)^2},\ G_3(s) = \frac{2+s}{2+s^2},\ G_2(s) = \frac{s}{2+s+s^2}$$

Ange de korrekta alternativen och motivera svaret!

1 poäng

2. Betrakta följande linjära tillståndsmodell.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{och } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion.

(b) Är systemet styrbart och observerbart? Motivera svaret!

(c) Skriv tillståndsmodellen på styrbar kanonisk form.

(d) Är systemet ovan av minimumfastyp? Motivera svaret!

2 poäng

3. (a) Systemet i uppgift 2 skall styras genom tillståndsåterkoppling, där vi antar att vektorn x är känd vid varje tidpunkt t (dvs ingen observatör behövs i detta fall). Styrlagen har då formen:

$$u = L_{ref} \cdot r - Lx$$

Design av reglermatrisen L ledde till resultatet $L = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$. Bestäm återkopplade systemets egenvärden och avgör stabiliteten. Bestäm även förstärkningen L_{ref}, så att utsignalen y efter lång tid anpassas till en stegformad referenssignal.

2 poäng

(b) Antag samma system som ovan, men med skillnaden att vektorn x inte är känd, utan måste skattas med en observatör. Bestäm en observatörsmatris K sådan att observatörens egenvärden hamnar i $s_1 = -1$, $s_2 = -2$. Använd polplacering!

2 poäng

4. Betrakta ett reglersystem med kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

där K är en P-regulator. Skissera Nyquistkurvan och avgör utgående från Nyquists kriterium stabiliteten hos återkopplade systemet för de två fallen $K = 2{,}0$ och $K = 0{,}5$.

3 poäng

5. En tankreaktor behöver (i de flesta fall) en omrörare, för att undvika stora koncentrations- och temperaturgradienter i reaktorkaret. Omröraren består ofta av en "propeller" som roterar med hastigheten ω (varv/minut), och drivs av en elmotor vars elektriska styrspänning är u (Volt). Sambandet mellan ω och u kan uttryckas genom differentialekvationen

$$u - \frac{R}{K_T}\left[J\frac{d\omega}{dt} + \Gamma(\omega)\right] - K_E\omega = 0 \ , \ \Gamma(\omega) \approx K_G\omega^2$$

där motoraxeln och omröraren antas tillsammans ha tröghetsmomentet J (kg m^2), resistansen i elmotorns drivkrets är R (Ω), medan K_T och K_E är givna konstanta parametrar karakteristiska för elmotorn. Funktionen Γ representerar det bromsande momentet vid omrörningen. Vi antar ett kvadratiskt samband mellan detta moment och varvtalet, där parametern K_G anses känd.

a) Vilken konstant spänning u_0 krävs för att ge det konstanta varvtalet ω_0?

1 poäng

b) Visa att linjärisering nära ovanstående arbetspunkt leder till följande linjära modell, där Δu och $\Delta\omega$ är små variationer runt arbetspunkten:

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega = \left(\frac{K_T}{RJ}\right)\Delta u - \left(\frac{2\omega_0 K_G}{J}\right)\Delta\omega - \left(\frac{K_E K_T}{RJ}\right)\Delta\omega$$

1 poäng

c) Ange överföringsfunktionen som visar hur $\Delta\omega$ påverkas av Δu (vid arbetspunkten ovan), samt även ett uttryck för systemets tidskonstant. Hur beror denna av det valda varvtalet ω_0?

2 poäng

d) Antag (för enkelhets skull) att parametrarna ovan, dvs K_T, K_G, K_E, R, J, ω_0, är en SI-enhet. Bestäm en PI-regulator systemet, så att återkopplade systemets bandbredd blir 5 rad/sekund.

2 poäng

6. En exoterm reaktor har (mycket approximativt) följande överföringsfunktion från kyleffekt till reaktortemperatur:

$$G(s) = \frac{\mu}{s - \nu} \quad \text{där } \mu > 0, \nu > 0$$

För styrningen används P-regulatorn $F(s) \equiv \kappa$, dimensionerad så att måttet *J* blir så litet som möjligt, där vi definierar $J = \max_{\omega}|F(i\omega)S(i\omega)|$ och där $S(i\omega)$ är känslighetsfunktionen.

Bestäm det minimala värdet på måttet *J*, och motsvarande κ -värde.

4 poäng

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I REGLERTEKNIK FÖR F, ERE091, 15 JAN. 2014 / EB

1. G_1 har pol i origo ⇒ Inte insignal/utsignalstabilt
G_2 har dubbelpol i −2, endast ⇒ Insignal/utsignalstabilt
G_3 har båda poler på imag. axeln ⇒ Inte insignal/utsignalstabilt
G_4 har båda poler i VHP ⇒ Insignal/utsignalstabilt

2. (a) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{s^2}(1\ \ 0)\begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2}(s\ \ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{-s+1}{s^2}}}$

(b) Förkortn. mellan täljare och nämnare i $G(s)$ ej möjliga och nämnarens gradtal = dimensionen hos A-matrisen ⇒ Tillståndsmodellen minimal ordn ⇒ Både styr- och observerbart

(c) $G(s) = \frac{-s+1}{s^2+0\cdot s+0\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$

(d) Nej! $G(s) = \frac{1-s}{s^2} = \frac{1+s}{s^2} \cdot \frac{1-s}{1+s} \Rightarrow$

$|G(i\omega)| = \left|\frac{1+i\omega}{-\omega^2}\right| \cdot \underbrace{\left|\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right|}_{=1} = \left|\frac{1+i\omega}{-\omega^2}\right|$

dvs $G_{MF}(s) = \frac{1+s}{s^2}$ är motsv. minfassystem.

3. (a) Återk. systemets egenv. fås ur $\det(\lambda I - A + BL) =$

$$BL - A = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}(2\ \ 4) - \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&-5\\2&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda+2 & -5\\ 2 & \lambda+4\end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8 + 10 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = -1 + i}} \text{ och } \underline{\underline{\lambda_2 = -1 - i}}$$

$$\underline{\underline{L_{ref}}} = \left[C(BL-A)^{-1}B\right]^{-1} =$$

$$= \left[(1\ \ 0)\begin{pmatrix}-2&-5\\2&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]^{-1} = \left[\tfrac{1}{2}\underbrace{(1\ \ 0)\begin{pmatrix}4&5\\-2&-2\end{pmatrix}}_{=(4\ \ 5)}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}(-4+5)\right]^{-1} = \underline{\underline{2}}$$

(b) $\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K[y - C\hat{x}] = (A - KC)\hat{x} + \ldots$

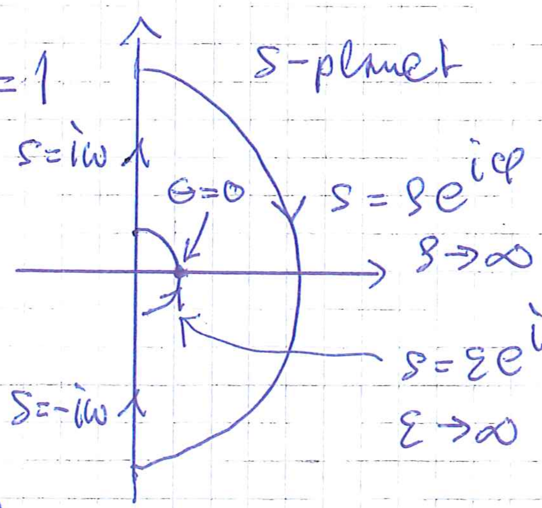
$$A - KC = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}(1\ \ 0) = \begin{pmatrix}-k_1&1\\-k_2&0\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A + KC) = \begin{vmatrix}\lambda+k_1 & -1\\ k_2 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2 \equiv$$

$$\equiv (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = 3,\ k_2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{K = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}}}$$

4. $L(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s-1)} \Rightarrow P = 1$



Låt först $K = 1$.

$s = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow$

$$L(s) = \frac{1 + \rho^{-1}e^{-i\varphi}}{\rho(1 - \rho^{-1}e^{-i\varphi})}e^{-i\varphi} \to 0$$

då $\rho \to \infty$.

4. (forts) $s = i\omega$ $\quad L(i\omega) = \dfrac{1+i\omega}{i\omega(-1+i\omega)} \cdot \dfrac{-1-i\omega}{-1-i\omega} =$

$$= \frac{-(1+i\omega)^2}{i\omega(1+\omega^2)} = \frac{-(1-\omega^2) - 2i\omega}{i\omega(1+\omega^2)} =$$

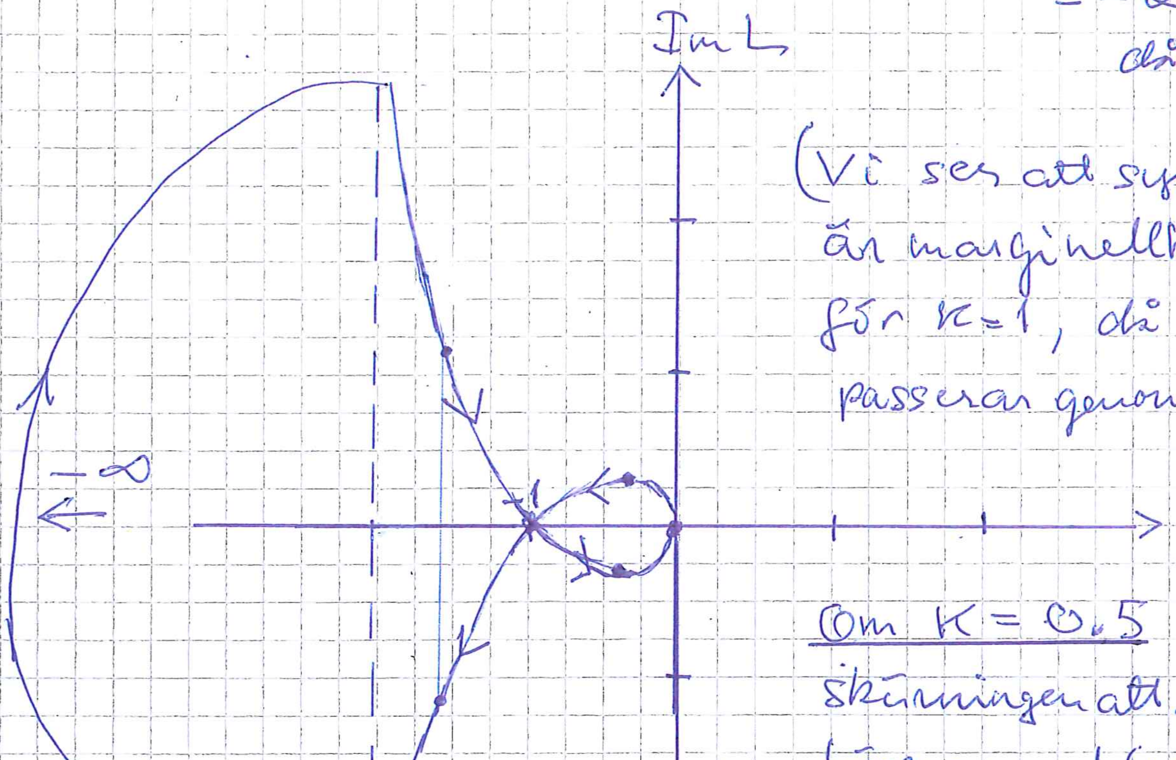
$$= -\frac{2}{1+\omega^2} + i\,\frac{1-\omega^2}{\omega(1+\omega^2)} = R + i\cdot I$$

ω	0	1/2	1	2	∞
R	-2	-1.6	-1	-0.4	0
I	∞	1.2	0	-0.3	0

$s = -i\omega \Rightarrow L(-i\omega) = R - iI$ (spegling!)

$$s = \varepsilon\cdot e^{i\theta} \Rightarrow L(s) = \frac{\varepsilon\cdot e^{i\theta}+1}{\varepsilon e^{i\theta}(\varepsilon\cdot e^{i\theta}-1)} \to \frac{-1}{\varepsilon}\cdot e^{-i\theta}$$

$= -\infty$ för $\theta = 0$ då $\varepsilon \to 0$.



(Vi ser att systemet är marginellt stabilt för $K=1$, då kurvan passerar genom -1.)

Om $K = 0.5$ kommer skärningen att vara till höger om -1 (vid $-1/2$) och vi får då $N = +1$ och $Z = N + P = 1 + 1 = 2$ dvs ett instabilt system. Om $K = 2$ ligger skärningen till vänster om -1 och $N = -1 \Rightarrow Z = -1 + 1 = 0 \Rightarrow$ Stabilt system.

5. (a) Konstant varvtal $\Rightarrow \dot{\omega}(t) \equiv 0 \Rightarrow$

$$\underline{u_0} = K_E\omega_0 + \frac{R}{K_T}\Gamma(\omega_0) = \underline{K_E\omega_0 + \frac{RK_G}{K_T}\omega_0^2}$$

(b) $$\frac{RJ}{K_T}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \frac{RK_G}{K_T}\cdot\omega^2 + K_E\omega = u$$

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ och $u = u_0 + \Delta u$ ($\Delta\omega$ och Δu små)

$$\Rightarrow \frac{RJ}{K_T}\Delta\dot{\omega} + \frac{RK_G}{K_T}\left[2\omega\right]_{\omega=\omega_0}\cdot\Delta\omega + K_E\cdot\Delta\omega = \Delta u$$

$$\Rightarrow \Delta\dot{\omega} = \frac{K_T}{RJ}\Delta u - \frac{2\omega_0 K_G}{J}\Delta\omega - \frac{K_E K_T}{RJ}\cdot\Delta\omega$$

(c) $$\left(s + \frac{2\omega_0 K_G}{J} + \frac{K_E K_T}{RJ}\right)\Delta\Omega(s) = \frac{K_T}{RJ}\Delta U(s)$$

$$\underline{G(s) = \frac{K_T}{RJs + 2\omega_0 K_G R + K_E K_T}}$$

$$G(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1} \quad \text{där} \quad \underline{\tau = \frac{RJ}{2\omega_0 K_G R + K_E K_T}}$$

Man ser att för varvtal "nära noll" är

$\tau = \frac{RJ}{K_E K_T}$ För högre ω_0 minskar τ monotont mot noll.

(d) $K_T, K_G, K_E, R, \omega_0 = 1$ SI-enhet vardera $\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{1}{s+3}, \quad F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \Rightarrow$$

$$L(s) = \frac{K_p s + K_i}{s(s+3)} \quad \text{Välj } K_p = \alpha \text{ och } K_i = 3\alpha$$

$$L(s) = \frac{\alpha(s+3)}{s(s+3)} = \frac{\alpha}{s} \Rightarrow T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\alpha}{s+\alpha}$$

$$\alpha = 5 \Rightarrow \omega_B = 5 \text{ rad/s} \Rightarrow \underline{\underline{F(s) = 5 + \frac{15}{s}}}$$

6. $G(s) = \frac{\mu}{s-\nu}$, $\mu > 0$ och $\nu > 0$

$F(s) \equiv K \Rightarrow L(s) = \frac{K\mu}{s-\nu}$

KE: $L(s)+1 = \frac{K\mu}{s-\nu} + 1 = 0 \Rightarrow$

$s - \nu + K\mu = 0 \Rightarrow s = \nu - \mu \cdot K < 0$

för stabilitet krävs då $\underline{K > \nu/\mu}$.

$S(s) = \frac{1}{L(s)+1} = \frac{1}{\frac{K\mu}{s-\nu}+1} = \frac{s-\nu}{s+\mu K-\nu}$

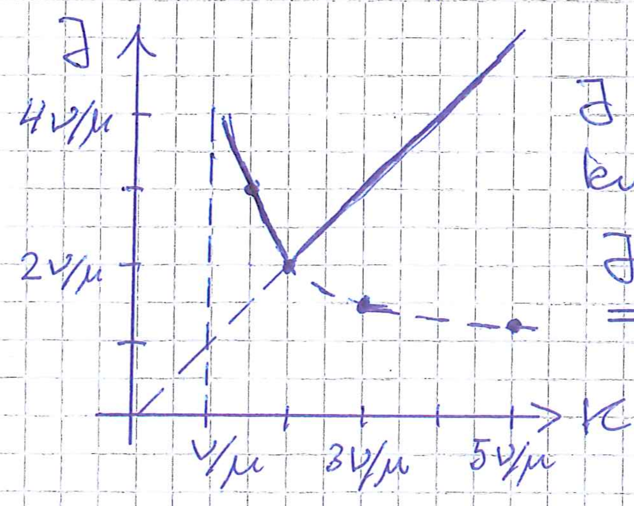
För $K > \nu/\mu$ fås:

$S(i\omega)F(i\omega) = \frac{K(i\omega - \nu)}{i\omega + \mu K - \nu}$ och

$|F(i\omega)S(i\omega)| = \frac{K\sqrt{\omega^2+\nu^2}}{\sqrt{\omega^2+(\mu K-\nu)^2}}$

$|FS|$ är en monoton funktion, med extremvärden för $\omega^2 = 0$ och $\omega^2 = \infty$, som är $\frac{K\nu}{\mu K - \nu}$ och K, respektive. Dvs J är då

$J = \max\left\{\frac{K\nu}{\mu K-\nu}, K\right\}$, där $\mu K - \nu > 0$



J är alltså heldragen kurva med minimipunkt $\underline{J_{min} = \frac{2\nu}{\mu} \text{ för } K^* = \frac{2\nu}{\mu}}$

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I REGLERTEKNIK FÖR F, ERE091, 15 JAN. 2014 / EB

1. G_1 har pol i origo ⇒ Inte insignal/utsignalstabilt
G_2 har dubbelpol i -2, endast ⇒ Insignal/utsignalstabilt
G_3 har båda poler på imag. axeln ⇒ Inte insignal/utsignalstabilt
G_4 har båda poler i VHP ⇒ Insignal/utsignalstabilt

2. (a) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = (1\ 0)\begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$= \frac{1}{s^2}(1\ 0)\begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2}(s\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-s+1}{s^2}$

(b) Förkortn. mellan täljare och nämnare i $G(s)$ ej möjliga och nämnarens gradtal = dimensionen hos A-matrisen ⇒ Tillståndsmodellen minimal ordning ⇒ Både styr- och observerbart

(c) $$G(s) = \frac{-s+1}{s^2+0 \cdot s+0 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [-1\ \ 1]x \end{cases}$$

(d) Nej! $G(s) = \frac{1-s}{s^2} = \frac{1+s}{s^2} \cdot \frac{1-s}{1+s} \Rightarrow$

$$|G(i\omega)| = \left|\frac{1+i\omega}{-\omega^2}\right| \cdot \underbrace{\left|\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right|}_{=1} = \left|\frac{1+i\omega}{-\omega^2}\right|$$

dvs $G_{MF}(s) = \frac{1+s}{s^2}$ är motsv. minfassystem.

3. (a) Återk. systemets egenv. fås ur $\det(\lambda I - A + BL) =$

$$BL - A = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}(2 \quad 4) - \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -5\\2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda+2 & -5\\2 & \lambda+4\end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8 + 10 =$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\lambda_1 = -1 + i} \text{ och } \underline{\lambda_2 = -1 - i}$$

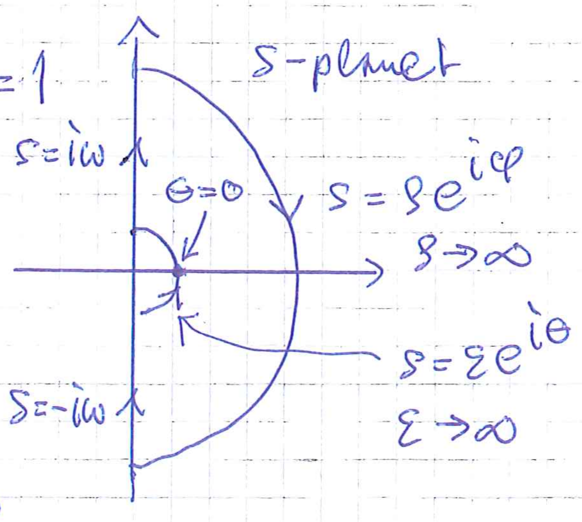
$$\underline{L_{ref}} = [C(BL-A)^{-1}B]^{-1} =$$
$$= \left[(1 \quad 0)\begin{pmatrix}-2 & -5\\2 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]^{-1} = \Big[\tfrac{1}{2}\underbrace{(1 \quad 0)\begin{pmatrix}4 & 5\\-2 & -2\end{pmatrix}}_{=(4 \quad 5)}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\Big]^{-1}$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}(-4+5)\right]^{-1} = \underline{\underline{2}}$$

(b) $\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K[y - C\hat{x}] = (A - KC)\hat{x} + \ldots$

$$A - KC = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}(1 \quad 0) = \begin{pmatrix}-k_1 & 1\\-k_2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A + KC) = \begin{vmatrix}\lambda+k_1 & -1\\k_2 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2 \equiv$$
$$\equiv (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_1 = 3,\ k_2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{K = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}}}$$

4. $L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)} \Rightarrow P = 1$



Låt först $K = 1$.

$s = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow$

$$L(s) = \frac{1 + \rho^{-1}e^{-i\varphi}}{\rho(1 - \rho^{-1}e^{-i\varphi})}e^{-i\varphi} \to 0$$
då $\rho \to \infty$.

4. (forts) $s = i\omega$ $\quad L(i\omega) = \dfrac{1+i\omega}{i\omega(-1+i\omega)} \cdot \dfrac{-1-i\omega}{-1-i\omega} =$

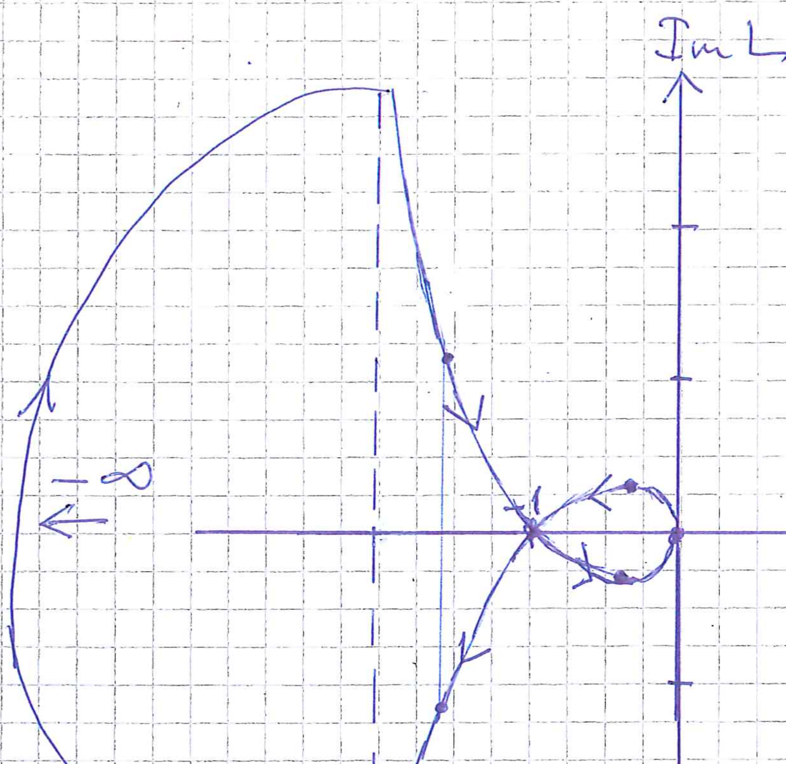
$$= \frac{-(1+i\omega)^2}{i\omega(1+\omega^2)} = \frac{-(1-\omega^2) - 2i\omega}{i\omega(1+\omega^2)} =$$

$$= -\frac{2}{1+\omega^2} + i\,\frac{1-\omega^2}{\omega(1+\omega^2)} = R + i \cdot I$$

ω	0	1/2	1	2	∞
R	-2	-1.6	-1	-0.4	0
I	∞	1.2	0	-0.3	0

$s = -i\omega \Rightarrow L(-i\omega) = R - iI$ (spegling!)

$s = \varepsilon \cdot e^{i\theta} \Rightarrow L(s) = \dfrac{\varepsilon e^{i\theta}+1}{\varepsilon e^{i\theta}(\varepsilon \cdot e^{i\theta}-1)} \to \dfrac{-1}{\varepsilon} \cdot e^{-i\theta}$
$= -\infty$ för $\theta = 0$
då $\varepsilon \to 0$.



(Vi ser att systemet är marginellt stabilt för $K=1$, då kurvan passerar genom -1.)

Om $K = 0.5$ kommer skärningen att vara till höger om -1 (vid $-1/2$) och vi får då $N = +1$ och $Z = N + P = 1 + 1 = 2$ dvs ett instabilt system. Om $K = 2$ ligger skärningen till vänster om -1 och $N = -1 \Rightarrow Z = -1+1 = 0 \Rightarrow$ Stabilt system.

5. (a) Konstant varvtal $\Rightarrow \dot{\omega}(t) \equiv 0 \Rightarrow$

$$\underline{u_{0}} = K_E\omega_0 + \frac{R}{K_T}\Gamma(\omega_0) = \underline{\underline{K_E\omega_0 + \frac{RK_G}{K_T}\omega_0^2}}$$

(b)
$$\frac{RJ}{K_T}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \frac{RK_G}{K_T}\cdot\omega^2 + K_E\omega = u$$

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ och $u = u_0 + \Delta u$ ($\Delta\omega$ och Δu små)

$$\Rightarrow \frac{RJ}{K_T}\Delta\dot{\omega} + \frac{RK_G}{K_T}\left[2\omega\right]_{\omega=\omega_0}\cdot\Delta\omega + K_E\cdot\Delta\omega = \Delta u$$

$$\Rightarrow \Delta\dot{\omega} = \frac{K_T}{RJ}\Delta u - \frac{2\omega_0 K_G}{J}\Delta\omega - \frac{K_E K_T}{RJ}\cdot\Delta\omega$$

(c)
$$\left(s + \frac{2\omega_0 K_G}{J} + \frac{K_E K_T}{RJ}\right)\Delta\Omega(s) = \frac{K_T}{RJ}\Delta U(s)$$

$$\underline{\underline{G(s) = \frac{K_T}{RJs + 2\omega_0 K_G R + K_E K_T}}}$$

$$G(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1} \quad \text{där } \tau = \underline{\underline{\frac{RJ}{2\omega_0 K_G R + K_E K_T}}}$$

Man ser att för varvtal "nära noll" är

$\tau = \dfrac{RJ}{K_E K_T}$ för högre ω_0 minskar τ monotont mot noll.

(d) $K_T; K_G; K_E, R; \omega_0 = 1$ SI-enhet vardera $\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{1}{s+3}, \quad F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \Rightarrow$$

$$L(s) = \frac{K_p s + K_i}{s(s+3)} \qquad \text{Välj } K_p = \alpha \text{ och } K_i = 3\alpha$$

$$L(s) = \frac{\alpha(s+3)}{s(s+3)} = \frac{\alpha}{s} \Rightarrow T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\alpha}{s+\alpha}$$

$$\alpha = 5 \Rightarrow \omega_B = 5 \text{ rad/s} \Rightarrow \underline{\underline{F(s) = 5 + \frac{15}{s}}}$$

6. $G(s) = \dfrac{\mu}{s-\nu}$, $\mu > 0$ och $\nu > 0$

$$F(s) \equiv \kappa \Rightarrow L(s) = \frac{\kappa\mu}{s-\nu}$$

$$KE: \quad L(s)+1 = \frac{\kappa\mu}{s-\nu} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$s - \nu + \kappa\mu = 0 \Rightarrow s = \nu - \mu\cdot\kappa < 0$$

för stabilitet krävs då $\underline{\kappa > \nu/\mu}$.

$$S(s) = \frac{1}{L(s)+1} = \frac{1}{\frac{\kappa\mu}{s-\nu}+1} = \frac{s-\nu}{s+\mu\kappa-\nu}$$

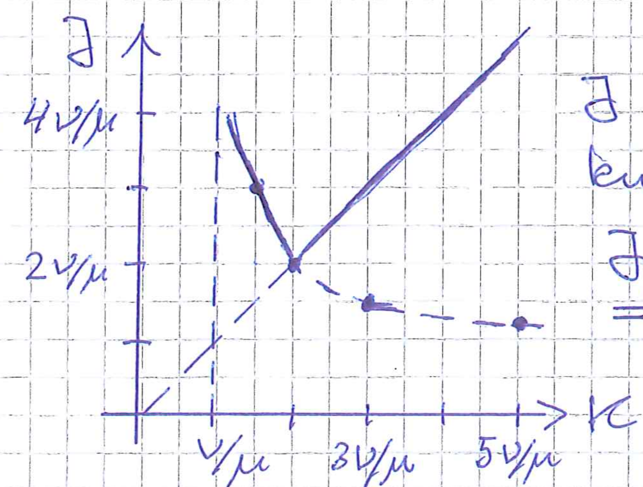
För $\kappa > \nu/\mu$ fås:

$$S(i\omega)F(i\omega) = \frac{\kappa(i\omega-\nu)}{i\omega+\mu\kappa-\nu} \quad \text{och}$$

$$|F(i\omega)S(i\omega)| = \frac{\kappa\sqrt{\omega^2+\nu^2}}{\sqrt{\omega^2+(\mu\kappa-\nu)^2}}$$

$|FS|$ är en monoton funktion, med extremvärden för $\omega^2 = 0$ och $\omega^2 = \infty$, som är $\dfrac{\kappa\nu}{\mu\kappa-\nu}$ och κ, respektive. Dvs J är då

$$J = \max\left\{\frac{\kappa\nu}{\mu\kappa-\nu}, \kappa\right\}, \text{ där } \mu\kappa-\nu > 0$$



J är alltså heldragen kurva med minimipunkt $\underline{\underline{J_{min} = \dfrac{2\nu}{\mu} \text{ för } \kappa^* = \dfrac{2\nu}{\mu}}}$