CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, torsdagen 17 januari 2013.

Tid: Kl ~~08.30 - 12.30~~ 14.00 – 18.00

Lokal: M

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 5 februari genom personligt e-mail. Granskning av rättningen är möjlig den 6 och 7 februari, 12.15 -13.00, på plan 5 i E-huset (mot Hörsalsvägen), vid rum 5422 (Viktor Larsson). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, ***Reglerteknik**-Grundläggande teori*, av Glad och Ljung, utan anteckningar.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Typgodkänd kalkylator med handhavandeinstruktion.

LYCKA TILL!

1. Ge enbart svaret på följande frågor. Motiveringar eller beräkningar krävs inte på just denna uppgift. Rätt svar ger 0,5 poäng, medan fel svar ger noll poäng.

(a) Bestäm slutvärdet på enhetssteget från ett stabilt system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{2s+1} - \frac{1}{s+2}$$

(b) Ange fasfunktionen $\arg\{G(j\omega)\}$ till systemet $G(s)$ i föregående uppgift.

(c) Ange lutningen i Bodediagrammets beloppsdel (dB/dekad), för mycket låga frekvenser ω för systemet $G(s)$ i föregående uppgift.

(d) Ange lutningen i Bodediagrammets beloppsdel (dB/dekad), för mycket höga frekvenser ω för systemet $G(s)$ i föregående uppgift.

(e) Man vill styra systemet $G(s)$ i föregående uppgift genom proportionell reglering, dvs $F(s) = K_p$. Bestäm det förstärkningsområde som ger ett stabilt återkopplat system.

(f) Systemet $G(s)$ beskrivs av en tillståndsmodell som antages både styrbar och observerbar. Ange antalet egenvärden i A-matrisen.

3 poäng

2. a) Ett ren dödtidsprocess, $\exp(-\tau s)$, diskretiseras så att samplingsintervallet sätts exakt lika med dödtiden. Ange den differensekvation som relaterar utsignalen y till insignalen u. Visa att motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion för systemet är $G(z) = 1/z$, utgående från differensekvationen.

1 poäng

b) Det tidsdiskreta systemet ovan skall styras med den digitala PI-regulatorn med styrlagen

$$u(k) = u(k-1) + K_p e(k) + (K_i - K_p)e(k-1)$$

där e betecknar reglerfelet $e(k) = r(k) - y(k)$. Bestäm överföringsfunktionen $G_c(z)$ för det återkopplade systemet (från referens r till utsignal y) med parametervalet $K_p = 1, K_i = 3/4$. Rita in poler och nollställen till $G_c(z)$ i ett komplext talplan. Är återkopplade systemet stabilt?

4 poäng

3. En process med integration i serie med transporttid har överföringsfunktionen *G*, där

$$G(s) = \frac{\gamma}{s} \cdot e^{-\tau s}, \gamma > 0, \tau > 0$$

a) Bestäm en proportionell regulator sådan att systemets <u>amplitudmarginal</u> blir 2 (gånger).

2 poäng

b) Med design av regulator enligt ovan, vilken <u>fasmarginal</u> får systemet?

2 poäng

4. Feedkoncentrationen till en viss reaktor är $c_{in}(t) = C_0 + \Delta c_{in}(t)$, där C_0 är arbetspunktens feedkoncentration (mol/liter). Reaktorn, som antas mycket väl omrörd, har materialbalansen:

$$V\frac{d}{dt}c(t) = Q[c_{in}(t) - c(t)] - \kappa V c(t)$$

V och Q är den väl omrörda tankreaktorns volym och genomflöde (konstanter), medan κ är en hasighetskonstant för reaktionen $A \rightarrow B$. (Notera att differentialekvationen ovan är linjär!)

a) Beräkna utflödets koncentration, C, i arbetspunkten.

1 poäng

b) Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$, som relaterar variationer i feedkoncentrationen, $\Delta c_{in}(t)$, till motsvarande variationer i utflödet, $\Delta c(t)$.

2 poäng

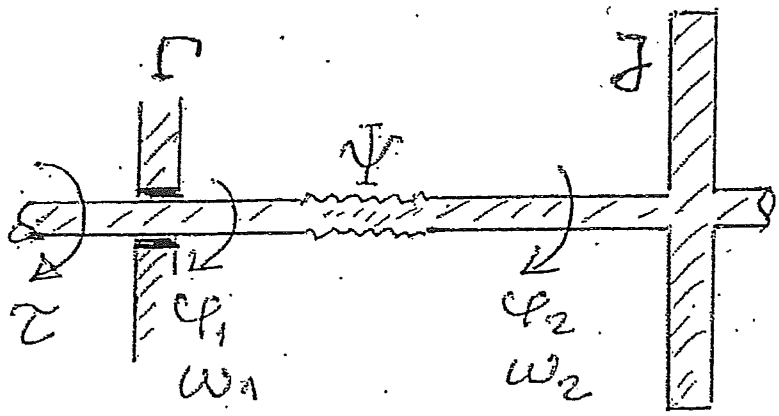
5. Upprita först Nyquistdiagrammet för systemet

$$L(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1-s}{1+s}$$

då regulatorparametern är $K = 1$ och bestäm <u>utgående från Nyquistdiagrammet</u> ett lämpligt K-värde så att amplitudmarginalen blir (cirka) 2,5 gånger.

4 poäng

6. Ett tungt svänghjul skall vinkelpositioneras med hjälp av ett servosystem. Ingående axeln påverkas av ett drivande moment τ, som utgör systemets instorhet, och av dynamisk friktion, som ger ett bromsande moment $\Gamma \cdot \omega_1$, och (via en torosionsfjäder) av den utgående axeln som ger ett bromsande moment $\Psi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$, där Γ och Ψ är givna konstanter. Svänghjulet, som är monterat på utgående axel, har ett känt tröghetsmoment, J. Axlarnas vinkellägen och vinkelhastigheter är φ_1, φ_2, ω_1, ω_2 respektive.



a) Visa att, då tillståndsstorheterna $x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2, x_3 = \omega_2$ väljs, tillståndsekvationen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\psi/\Gamma & \psi/\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \psi/J & -\psi/J & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/\Gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

uppstår. Förklara varför inte vinkelhastigheten ω_1 bör väljas som en fjärde tillståndsstorhet.

3 poäng

b) Tyvärr går inte alla tillståndsstorheter att direkt mäta. Det finns två möjligheter: Den ena är att mäta enbart vinkelhastigheten ω_2, och den andra är att mäta enbart vinkelläget φ_2. Utred om <u>någon</u> av dessa två alternativa mätsignaler kan användas som instorhet till ett Kalmanfilter (eller någon annan typ av observatör), avsedd för rekonstruktion av tillståndsvektorn $x(t)$?

3 poäng

Tentamen i Reglerteknik EREG91 och ESS017, 2013-01-1

LÖSNINGSFÖRSLAG / EB

(1) (a) $\underline{y(\infty)} = \lim_{s \to 0} s\,G(s)\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(Stabilt system!)

(b) $G(s) = \frac{1}{2s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{s+2-(2s+1)}{(2s+1)(s+2)} = \frac{1-s}{(\ldots)(\ldots}$

$\arg\{G(j\omega)\} = \underline{-\operatorname{atan}(\omega) - \operatorname{atan}(2\omega) - \operatorname{atan}(\omega}$

(c) $|G(j\omega)| = \frac{|1-j\omega| * 1/2}{|1+j\omega/0.5|\cdot|1+j\omega/2|} \to \frac{1}{2}$ då $\omega \to$

För LF $|G| = \frac{1}{2} = -6$ dB, dvs lutning 0

(d) $|G| \to 0$ som K/ω (där $K = 1/2$) för HF

dvs lutning -20 dB/dek

(e) KE: $K_p \cdot G(s) + 1 = 0$ eller

$K_p(1-s) + (2s+1)(s+2) =$

$= 2s^2 + (5-K_p)s + 2 + K_p = 0$

$\therefore$ Stabilt system för $-2 < K_p < 5$

(f) $G(s) = \frac{1-s}{(2s+1)(s+2)}$

Man ser att förkortningar mellan täljare och nämnare ej är möjliga $\Rightarrow$ Systemet är av andra ordningen, varför en tillståndsbeskrivning med två tillstånd är både styr- och observerbar, dvs två egenvärden hos

2 (a) $G(s) = e^{-\tau s}$, $h = \tau \Rightarrow y(t) = u(t-\tau)$

eller $y(t) = u(t-h)$, dvs

$$\underline{\underline{y(k) = u(k-1)}}$$

$$\underbrace{\mathcal{Z}\{y(k)\}}_{=Y(z)} = \mathcal{Z}\{u(k-1)\} = z^{-1} \underbrace{\mathcal{Z}\{u(k)\}}_{=U(z)}$$

dvs $G(z) = Y(z)/U(z) = z^{-1}$

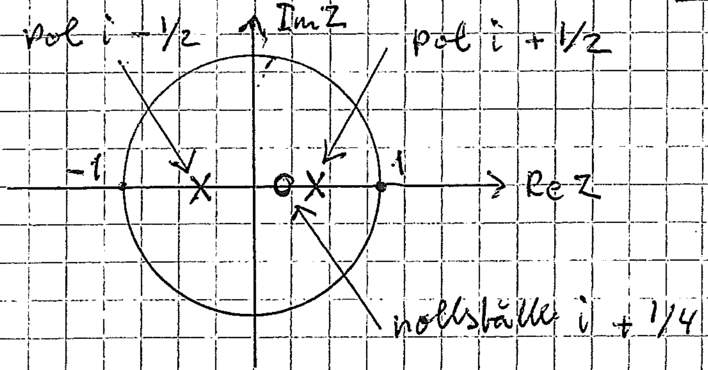
(b) $u(k) = u(k-1) + K_p e(k) + (K_i - K_p) e(k-1)$

$$F(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p + (K_i - K_p) z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$\underline{\underline{L(z)}} = G(z)F(z) = \frac{K_p z + K_i - K_p}{z(z-1)} =$$

$$= \frac{z - 1/4}{z(z-1)} \Rightarrow G_c(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} =$$

$$= \frac{z - 1/4}{z^2 - z + z - 1/4} = \underline{\underline{\frac{z - 1/4}{z^2 - 1/4}}}$$



Samtliga poler inom enhetscirkeln i z-planet $\Rightarrow$ <u>återkopplade systemet är stabilt!</u>

(Även nollstället inom enhetscirkeln, varför systemet även är minimumfas!)

3 (a) Vid $\omega = \omega_\pi$ gäller att $\arg\{L(j\omega_\pi)\} = -\pi$

dvs $-\pi = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega_\pi \Rightarrow \tau\omega_\pi = \pi/2$

$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{\frac{K_p \gamma}{\omega_\pi}} = \frac{\omega_\pi}{K_p \gamma} = 2$$

$$\therefore \underline{\underline{K_p}} = \frac{\omega_\pi}{2\gamma} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4\tau\gamma}}}$$

(b) $\varphi_m = \pi + \angle(j\omega_c) = \pi - \frac{\pi}{2} - \tau\omega_c = \frac{\pi}{2} - \tau\omega_c$

$$|L(j\omega_c)| = \left|K_p \frac{\gamma}{j\omega_c} e^{-j\tau\omega_c}\right| = \frac{K_p\gamma}{\omega_c} = \frac{\pi}{4\tau\omega_c} =$$

$$\Rightarrow \tau\omega_c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_m}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} \ (45°)$$

---

4 (a) $0 = Q[C_0 - C] - \kappa V C$ (statiskt!)

$$C(Q + \kappa V) = Q C_0 \Rightarrow \underline{\underline{C = \frac{C_0}{1 + \kappa V/Q}}}$$

(b) $V \frac{d}{dt}\Delta c(t) = Q(\Delta c_{in}(t) - \Delta c(t)) - \kappa V \Delta c(t)$

$$\frac{V}{Q}\frac{d}{dt}\Delta c(t) = \Delta c_{in}(t) - \left(1 + \kappa\frac{V}{Q}\right)\Delta c(t)$$

Efter Laplacetransformation fås då för den linjära, dynamiska relationen:

$$\left(\frac{V}{Q}s + 1 + \kappa\frac{V}{Q}\right)\Delta C(s) = \Delta C_{in}(s), \text{ dvs}$$

$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{\Delta C(s)}{\Delta C_{in}(s)} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + \kappa(V/Q) + (V/Q)s}}}$$

5

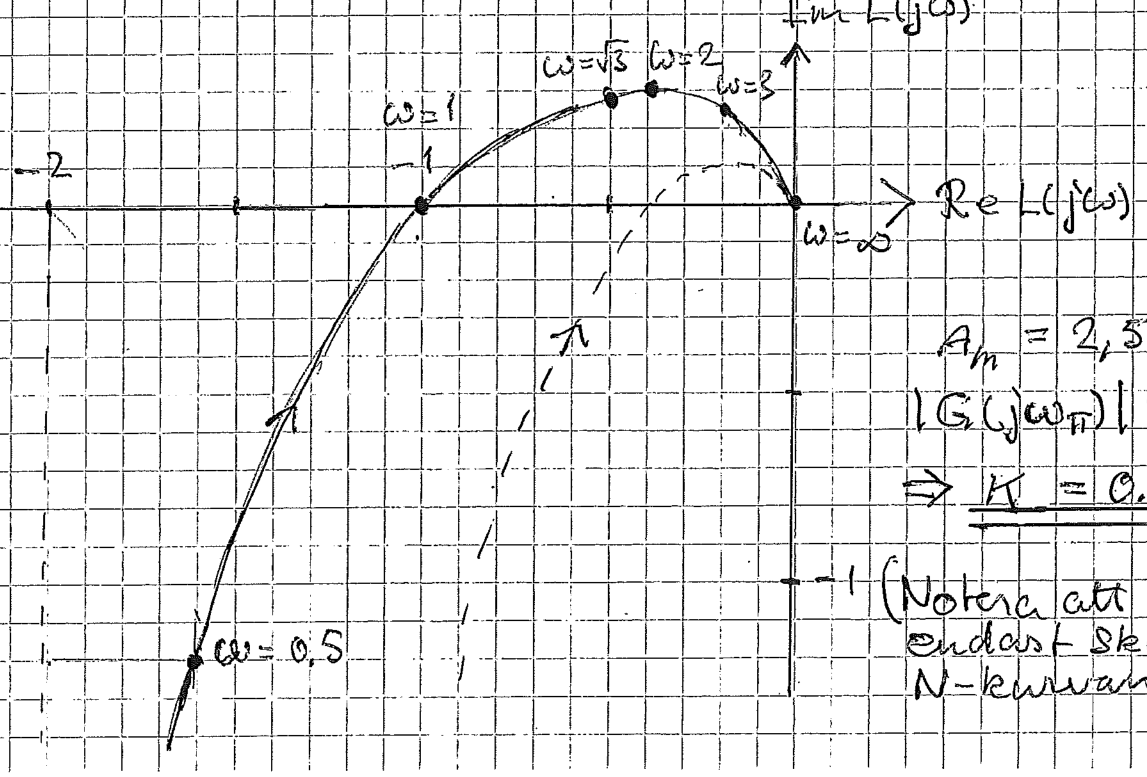
$$L(s) = \frac{K}{s}\cdot\frac{1-s}{1+s} = \frac{1-s}{s(1+s)} \quad \text{för } K = 1$$

Då systemet saknar poler i HHP, kan Nyquists förenklade kriterium användas.

$$L(j\omega) = \frac{1-j\omega}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+\omega^2)} =$$

$$= \frac{1-\omega^2-j2\omega}{j\omega(1+\omega^2)} = \underbrace{-\frac{2}{1+\omega^2}}_{R(\omega)} \underbrace{- j\,\frac{1-\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}}_{+\,j\,I(\omega)}$$

ω	R	I
0	−2	−∞
0.5	−1.6	−1.2
1	−1	0
$\sqrt{3}$	−0.5	0.289
2	−0.4	0.3
3	−0.2	0.267
∞	0	0



$A_m = 2{,}5 \Rightarrow$

$|G(j\omega_\pi)| = 0.4$

$\Rightarrow \underline{K = 0.4}$

(Notera att K endast skalar N-kurvan!)

6 (a) Momentbalans för vänster axel:

$$\tau - \Gamma\omega_1 - \Psi(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \qquad (1)$$

Momentbalans för höger axel:

$$\Psi(\varphi_1 - \varphi_2) - J\dot{\omega}_2 = 0 \qquad (2)$$

Naturliga relationer är

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \text{ och } \dot{\varphi}_2 = \omega_2 \qquad (3)$$

ω_1 är dock <u>ingen nödvändig variabel</u>, då den kan uttryckas (<u>utan</u> diff. ekvation) i andra tillståndsstorheter och insignaler.

från (1): $\omega_1 = \tau/\Gamma - \Psi/\Gamma\,(\varphi_1 - \varphi_2) =$

$$= u/\Gamma - (\Psi/\Gamma)(x_1 - x_2).$$

Tillståndsekvationerna blir med detta val:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1 = \omega_1 = -\frac{\Psi}{\Gamma}x_1 + \frac{\Psi}{\Gamma}x_2 + \frac{1}{\Gamma}u \\ \dot{x}_2 = \dot{\varphi}_2 = \omega_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dot{\omega}_2 = \frac{\Psi}{J}x_1 - \frac{\Psi}{J}x_2 \end{cases}$$

$\blacksquare$

(b) ω_2 mätbar $\Rightarrow C = (0\ 0\ 1)$

φ_2 mätbar $\Rightarrow C\ (0\ 1\ 0)$

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + \underset{\text{(känd)}}{Bu} + K[\underset{\text{(känd)}}{y} - C\hat{x}]$$

Entydig beräkning av observatörsmatrisen K kräver att systemet $\dot{x} = Ax + \ldots$, $y = Cx + \ldots$ är observerbart. Detta kräver att matrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

har full rang.

6 (b) Sätt $\Psi/\Gamma = a$ och $\Psi/J = b$

(fortsättning)

$$C_1 A = \overbrace{(0\ 0\ 1)}^{=C_1}\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -b & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(b\ -b\ 0);$$

$$C_1 A^2 = (-ab\ \ ab\ \ -b);$$

$$\det(\mathcal{O}_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & -b & 0 \\ -ab & ab & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & -b \\ -ab & ab \end{vmatrix} = 0$$

dvs. systemet inte observerbart med C_1, varför utstorheten ω_2 inte räcker för att rekonstruera tillståndsvektorn.

$$C_2 A = \overbrace{(0\ \ 1\ \ 0)}^{=C_2}\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -b & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0\ \ 0\ \ 1);$$

$$C_2 A^2 = (b\ \ -b\ \ 0);$$

$$\det[\mathcal{O}_2] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -b & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = b \neq 0$$

dvs systemet observerbart med C_2, och utstorheten φ_2 räcker för att rekonstruera tillståndsvektorn.