CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, onsdagen 23 maj 2012.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: M

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 5 juni genom personligt e-mail. Granskning av rättningen är möjlig den 7 och 8 juni, 12.30 -13.00, på plan 3 i E-huset (närmast Hörsalsvägen). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

<u>Tillåtna hjälpmedel</u>:

1. Kursboken, ***Reglerteknik**-Grundläggande teori*, av Glad och Ljung, <u>utan anteckningar</u>.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Typgodkänd kalkylator med handhavandeinstruktion.

LYCKA TILL!

1. En bil med totala massan M påverkas framför allt av två krafter $u(t)$ som är drivkraften från motorn, och $w(t)$ som är en bromsande kraft (t ex dynamisk friktion och luftmotstånd).

a) Ange överföringsfunktionen från drivkraften u till bilens hastighet v, då $w = 0$.

1 poäng

b) Ange överföringsfunktionen från drivkraften u till bilens acceleration a, då bromskraften w antas proportionell mot hastigheten v med proportionalitetskonstanten K.

2 poäng

c) Bromskraften w antas proportionell mot kvadraten på hastigheten v med proportionalitetskonstanten C. Betrakta små hastighetsavvikelser från det konstanta värdet v_0. Ange en överföringsfunktion från små variationer i drivkraften, Δu, till motsvarande hastighetsvariationer, Δv, nära v_0.

2 poäng

2. a) Ett återkopplat system har kretsöverföringen $L(j\omega) = 10/j\omega$. Ange (dvs om möjligt) systemets amplitudmarginal och fasmarginal.

1 poäng

b) ***Med hur många dB*** kommer ***en systemstörning*** med frekvensen 0.2 rad/sek ***att dämpas***?

1 poäng

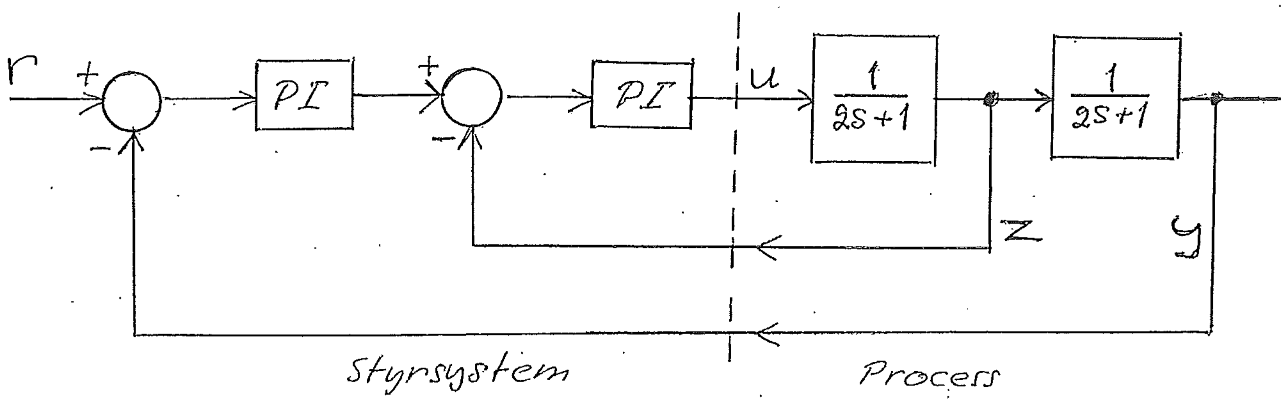
c) ***Med hur många dB*** kommer ***en mätstörning*** med frekvensen 20 rad/sek ***att dämpas***?

1 poäng

d) Det är välkänt att $S(j\omega) + T(j\omega) \equiv 1$. Motsvarande relation gäller (så klart) inte beloppens summa. I själva verket kan $V = |S(j\omega)| + |T(j\omega)|$ användas för att bedöma en reglerdesign, där maximala värdet av V (som fkn av frekvensen) då bör vara litet (exempelvis $V_{max} \leq 2$). Om alltså $L(j\omega) = 10/j\omega$, bestäm då V_{max}.

2 poäng

3.



En process kan betraktas som två seriekopplade 1:a ordningens system, där såväl utsignalen y liksom en mellanliggande variabel z är tillgängliga för mätning. Figur ovan indikerar att reglersystemet är av kaskadtyp, och utrustat med två PI-regulatorer. Det återkopplade systemet skall ha följande egenskaper:

1. Systemets (dvs det totala systemets) fasmarginal skall vara 45 grader.

2. Om referensen r ändras stegvis skall utsignalen y ha svängt in (till 5%) på 5 sekunder.

Bestäm parametrarna hos de två PI-regulatorerna så att kraven uppfylls.

5 poäng

Ledning *Genom "smarta" val av integrationstider blir det resulterande återkopplade systemet av andra ordningen, som kan skrivas på formen* $K/(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$. *Insvängnings-tiden (till 5%) kan då uppskattas med formeln* $T_s \approx 3/(\zeta\omega_0)$.

4. Ett återkopplat system har följande kretsöverföring:

$$L(s) = \kappa \cdot \frac{(s+1)^2}{(s-1)^3}$$

Skissera Nyquist-diagrammet för fallet $\kappa = 1$ och beskriv utgående från det uppritade diagrammet hur förstärkningen κ skall väljas så att återkopplade systemets poler ligger i vänstra halvplanet. (Notera att då $L(s)$ saknar poler i $s = 0$, Nyquists kontur tillåts passera origo.)

5 poäng

5. Ett dynamiskt system beskrivs av modellen $\dot{y}(t) = -y(t) + u(t)$. Systemet skall styras med tillståndsåterkoppling med integrerande verkan.

a) Som tillstånd införes $x_1 = y$ och $x_2 = \int(r-y)dt$ (där r betecknar referensen). Visa att den resulterande tillståndsmodellen (dvs för processen kompletterad med integralverkan) då blir

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) = Ax(t) + Bu(t) + Nr(t)$$

samt att detta resulterande system är fullständigt styrbart.

1 poäng

Följande uppgift kan lösas utan att först ha löst uppgift a!

b) Efter implementering av styrlagen $u = -Lx$, kan syntes av reglersystemet göras genom polplacering, utgående från ett visst önskat resulterande polpolynom $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$.

Bestäm i stället återkopplingsmatrisen L genom linjär-kvadratisk optimering! Detta innebär att kriteriet J skall minimeras med avseende på systemekvationen enligt uppgift a.

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^2(t)]dt$$

Återkopplingsmatrisen L fås då som $L = B^T P$, där P är den symmetriska och positivt definita lösningen till Riccatiekvationen

$$Q + A^T P + PA = PBB^T P$$

Välj (för enkelhets skull) Q som enhetsmatrisen, och ansätt P som en symmetrisk matris med positiva diagonalelement. Bestäm matrisen L! (Riccatiekvationen ger tre kopplade andragradsekvationer, varav en blir mycket enkel att lösa.)

4 poäng

Reglerteknik F, ERE091, 23 maj 2012 / EB

1. $m\dot{v} = u - w$

(a) $w = 0 \Rightarrow m\dot{v} = u \Rightarrow msV(s) = U(s) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{V(s)}{U(s)} = \underline{\underline{\frac{1}{ms}}}$$

(b) $w = K \cdot v \Rightarrow m\dot{v} = ma = u - Kv =$

$$= u - K\int_{t_0}^{t} a\,dt \Rightarrow m\dot{a} = \dot{u} - Ka \Rightarrow$$

$$msA(s) = sU(s) - KA(s) \Rightarrow \underline{\underline{G(s)}} = \frac{A(s)}{U(s)} = \underline{\underline{\frac{s}{ms+K}}}$$

(c) $w = Cv^2 \Rightarrow m\dot{v} = u - Cv^2$

$$v = v_0 \Rightarrow 0 = u_0 - Cv_0^2 \Rightarrow u_0 = Cv_0^2$$

$$m\frac{d}{dt}(v_0 + \Delta v) = u_0 + \Delta u - C(v_0 + \Delta v)^2$$

Förenkling ger:

$$m\frac{d}{dt}\Delta v = \Delta u - 2Cv_0\Delta v - C(\Delta v)^2$$

Om Δv är liten fås $m\frac{d}{dt}\Delta v \approx \Delta u - 2Cv_0\Delta v$

$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{\Delta V(s)}{\Delta U(s)} = \underline{\underline{\frac{1}{ms + 2Cv_0}}}$$

2. a) $L(j\omega) = 10/j\omega = (10/\omega)e^{-j90^\circ}$

Då $\arg\{L(j\omega)\}$ aldrig skär -180°, kan ω_p och därmed inte heller A_m definieras.

$|L(j\omega_c)| = 10/\omega_c = 1 \Rightarrow \omega_c = 10$, och då fasfunktionen är konstant (-90°) kommer då

$\varphi_m = 180^\circ + \arg\{L(j\omega_c)\} = 90^\circ$.

b) $\underbrace{E(j\omega)}_{\text{Felsignal}} = S(j\omega)\underbrace{W(j\omega)}_{\text{systemstörning}} + T(j\omega)\cdot\underbrace{N(j\omega)}_{\text{mätstörning}}$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} = \frac{1}{|1+10/j\omega|} \quad \omega = 0.2 \Rightarrow$$

$|S(j0.2)| = 1/|1 + j50| \approx 1/50 \Rightarrow 50$ ggr dämpning

$$20\log 50 = 20(\underbrace{\log 5}_{\approx 0.7} + \underbrace{\log 10}_{=1}) = \underline{\underline{34\ dB}}$$

c) $$|T(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} = \frac{10/\omega}{|1+10/j\omega|} \quad \omega = 20 \Rightarrow$$

$$|T(j20)| = \frac{0.5}{|1-j0.5|} = \frac{1}{|2-j|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5}\text{ ggr dämpning}$$

$$20\log\sqrt{5} = 10\log 5 \approx \underline{\underline{7\ dB}}$$

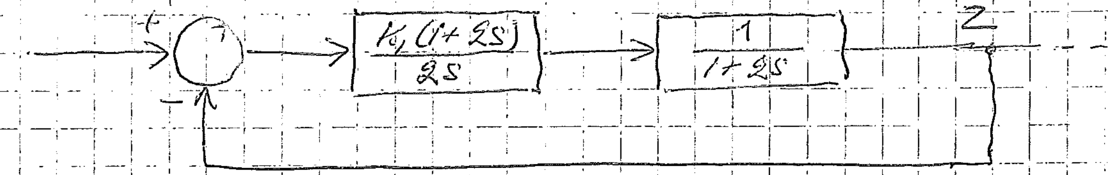
d) $$V = |S| + |T| = \frac{1+10/\omega}{|1+10/j\omega|} = \frac{\omega+10}{|\omega - j10|}$$

$$V^2 = \frac{(\omega+10)^2}{\omega^2+100} = 1 + \frac{20\omega}{\omega^2+100} = 1 + \sigma$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{(\omega^2+100)\cdot 20 - 2\omega\cdot 20\omega}{(\omega^2+100)^2} = 0 \Rightarrow \omega^* = 10 \text{ (max.}$$

$$\sigma(10) = \frac{200}{100+100} = 1 \Rightarrow V_{max}^2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{V_{max} = \sqrt{2}}}$$

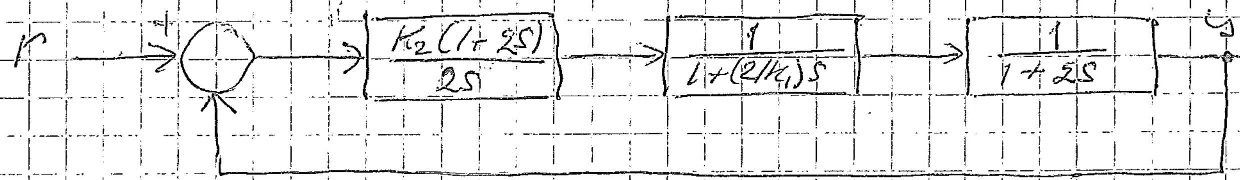
3. Inre loopen, där $\underline{\underline{T_i \text{ väljes som } 2}}$, blir



$L_1(s)$ fås (efter förkortning) som $K_1/(2s)$

$$T_1(s) = \frac{K_1}{2s+K_1} = \frac{1}{1+(2/K_1)s}$$

Yttre loopen, där $\underline{\underline{T_{i2} \text{ väljes som } 2}}$, blir



$L_2(s)$ fås (efter förkortning) som $\dfrac{K_2/2}{s(1+(2/K_1)s)}$

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg\{L_2(j\omega_c)\} = 180^\circ - 90^\circ - \arctan\left(\frac{2}{K_1}\omega_c\right) = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{2}{K_1}\omega_c = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \underline{\omega_c = K_1/2}$$

$$|L_2(j\omega_c)| = \frac{K_2/2}{(K_1/2)\cdot\left|1+j\frac{2}{K_1}\cdot\frac{K_1}{2}\right|} = \frac{K_2}{\sqrt{2}\cdot K_1} = 1 \Rightarrow \underline{K_2 = \sqrt{2}K_1}$$

$$T_2(s) = \frac{L_2(s)}{1+L_2(s)} = \frac{K_2/2}{s\left(1+\frac{2}{K_1}s\right)+K_2/2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}K_1^2}{s^2+\frac{K_1}{2}s+\frac{\sqrt{2}}{4}K_1^2}$$

$$= \frac{''}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\cdot K_1$$

$$2\zeta\omega_0 = 2\zeta\frac{\sqrt[4]{2}}{\cancel{2}}\cdot K_1 = \frac{K_1}{\cancel{2}} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \approx 0.42$$

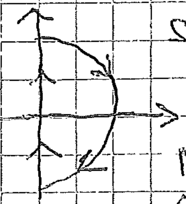
$$T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{3}{T_s\cdot\zeta} = \frac{3}{5*0.42} \approx 1.43$$

$$\underline{\underline{K_1}} = \frac{2\omega_0}{\sqrt[4]{2}} = \frac{4\omega_0}{2\sqrt[4]{2}} \approx 4*0.42*1.43 \approx \underline{\underline{2.40}}$$

$$\underline{\underline{K_2 \approx 3.40}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PI1 \approx 2.4\,(1+1/2s) \\ PI2 \approx 3.4\,(1+1/2s) \end{cases}$$

4. $L(s) = K\frac{(s+1)^2}{(s-1)^3}$



① På yttre halvcirkeln gäller att $s = Re^{i\varphi} \Rightarrow$

$$L(s) = K\frac{(Re^{i\varphi}+1)^2}{(Re^{i\varphi}-1)^3} = \frac{KR^2}{R^3}\cdot\frac{(e^{i\varphi}+1/R)^2}{(e^{i\varphi}-1/R)^3}$$

$$\lim_{R\to\infty} L(s) = \lim_{R\to\infty} \frac{K}{R}\,\frac{(e^{i\varphi}+1/R)^2}{(e^{i\varphi}-1/R)^3} = 0$$

Dvs yttre halvcirkeln i s-planet avbildas på origo i $L(s)$-planet.

② $s = +j\omega \Rightarrow L(s) = K\frac{(j\omega+1)^2}{(j\omega-1)^3} = L(j\omega)$

$$|L(j\omega)| = K\frac{(\omega^2+1)}{(\omega^2+(-1)^2)^{3/2}} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+1}} \quad \forall\omega\geq 0$$

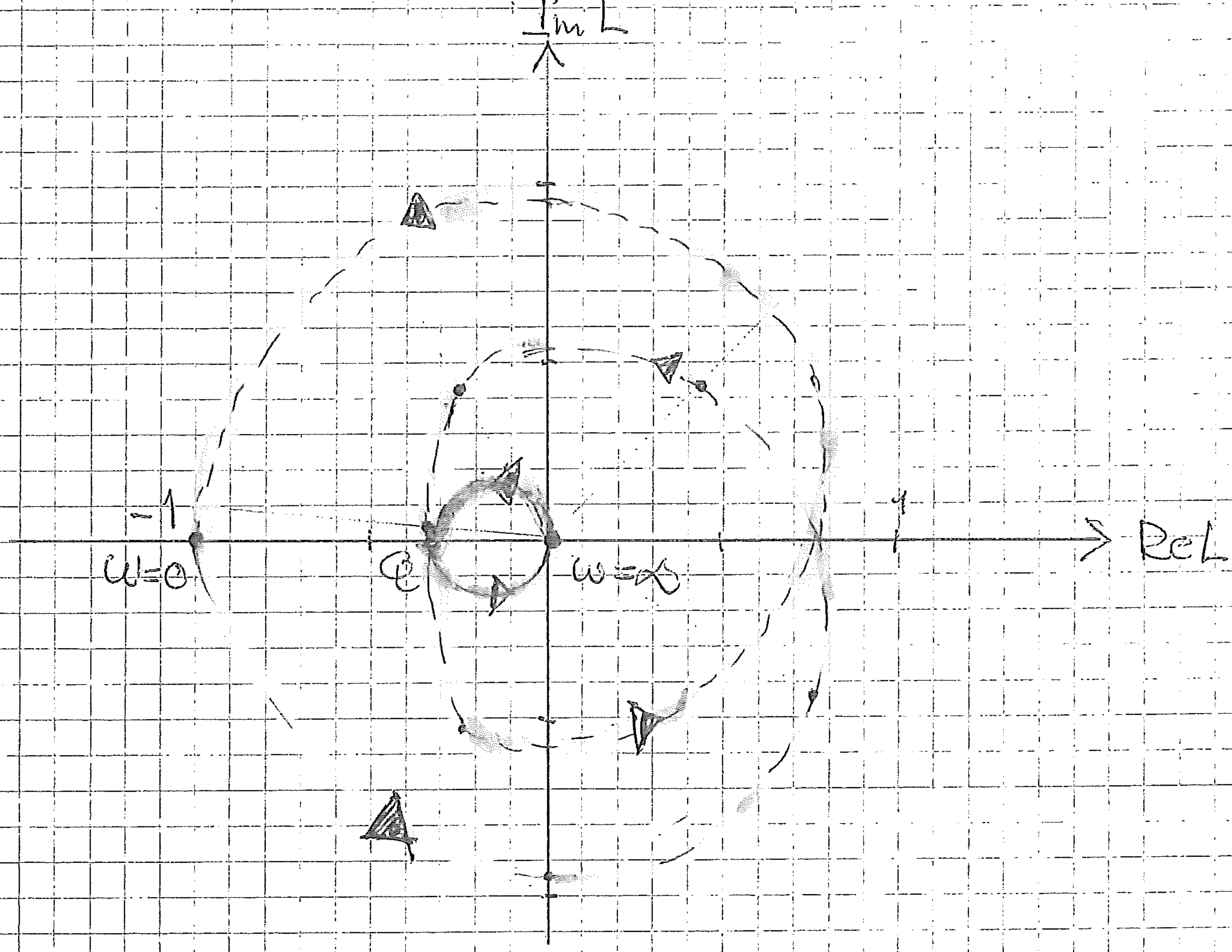
$$\angle L(j\omega) = 2\angle 1+j\omega - 3\angle -1+j\omega =$$
$$= 2\,\text{atan}\,\omega - 3(180^\circ - \text{atan}\,\omega) =$$
$$= -540^\circ + 5\,\text{atan}\,\omega \; (= -180^\circ + 5\,\text{atan}\,\omega)$$

$K = 1 \Rightarrow$

ω	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	∞
$\lvert L\rvert$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	$1/3$	0
$\angle L$	-180°	-30°	45°	120°	173°	270°

ω	0.325
$\lvert L\rvert$	0.951
$\angle L$	-90°

③ $s = -j\omega$ Ger precis samma kurva, men speglad i reella axeln!



Nyquist: $Z = P + N$ där $P = 3$

(trippelpol i HHP)

För att $Z = 0$, måste alltså $N = -3$.

$N = -3 \Rightarrow$ 3 varv runt -1 i bildplanet

För $K = 1$ fås skärning i pkten Q för $\omega = \tan\left(\frac{360°}{5}\right) =$

$= \tan(72°) \Rightarrow |L| = 1 / \sqrt{1 + \tan^2 72°} = \cos 72°$

För att punkten Q skall hamna till vänster om -1 krävs alltså $K > 1/\cos 72°$

<u>Välj</u> <u>$K > 3.236$</u> (I praktiken $K \geq 4$)

5. (a) $x_1 = y$ och $x_2 = \int (r - y) \Rightarrow$

$\dot{x}_1 = -x_1 + u$ och $\dot{x}_2 = r - y = r - x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$S = [B \ AB \ A^2B \ldots A^{n-1}B]$ $n = 2 \Rightarrow S = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

S har alltså full rang, varför systemet är styrbar

(b) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ symmetrisk pos.def.

$a > 0$, $c > 0$

$(PA)^T = A^T P^T = A^T P$

$$PA = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & 0 \\ -b-c & 0 \end{pmatrix}$$

$(PB)^T = B^T P^T = B^T P$; $PB = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -(a+b) & 0 \\ -(b+c) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a+b) & -(b+c) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (a \ b)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2(a+b) & -(b+c) \\ -(b+c) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$a^2 = 1 - 2(a+b)$, $ab = -(b+c)$, $b^2 = 1$

$\Rightarrow b = \pm 1$, $b = 1 \Rightarrow a \cdot 1 = -1 - c < 0$ ty $c > 0$

$\Rightarrow$ negativt a ! $\Rightarrow b = -1$.

$a^2 = 1 - 2a - 2b = 3 - 2a \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0$

$a = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3} = -1 \pm 2 = +1$ (OK)

$ab + b = -1 - 1 = -c \Rightarrow c = 2 > 0$ (OK)

$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L = B^T P = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{L = (1 \ -1)}}$$