CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, onsdagen 11 januari 2012.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: M

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 25 januari genom personligt e-mail. Granskning av rättningen är möjlig den 30 och 31 januari, 12.30 -13.00, på plan 3 i E-huset (närmast Hörsalsvägen). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

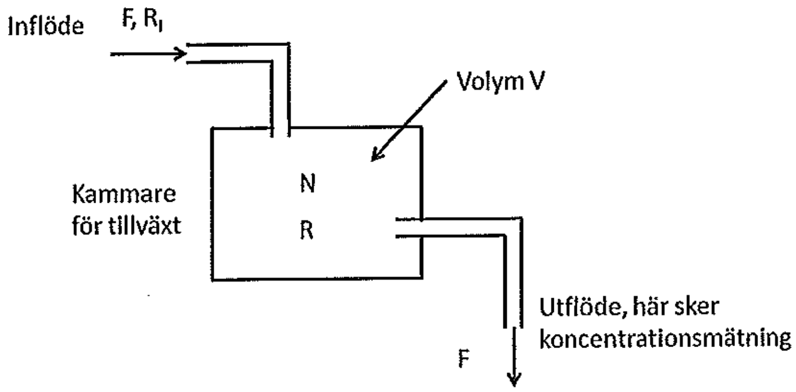
betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

<u>Tillåtna hjälpmedel</u>:

1. Kursboken, ***Reglerteknik-Grundläggande teori***, av Glad och Ljung, <u>utan anteckningar</u>.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. <u>Inga "laptop-datorer"!</u>

LYCKA TILL!

1. Figuren nedan visar en schematisk bild över en så kallad kemostat, ett experimentellt system i vilket kontinuerlig tillväxt av mikroorganismer sker.



där N = koncentration av mikroorganismer [kg/m^3]
R = koncentration av näring för mikroorganismerna [kg/m^3]
R_I = inflödeskoncentration av näring [kg/m^3]
F = flödeshastighet [m^3/s]
V = volym [m^3]

Tillväxtkammaren antas vara idealt omrörd. Det innebär att inga koncentrationsgradienter uppstår i kammaren, samt att utflödeskoncentrationerna är de samma som koncentrationerna inne i själva kammaren. Tillgången på näring är avgörande för tillväxten av mikroorganismerna. Dynamiken i systemet kan beskrivas av följande ekvationssystem där de olika termerna relaterar till inflöde, utflöde, konsumtion och produktion:

$$\frac{dVR}{dt} = FR_I - FR - \kappa RN$$

$$\alpha\frac{dVN}{dt} = \kappa RN - \alpha FN$$

- där κ, med enheten [(m^3)^2/(kg · s)], är en parameter som relaterar till konsumtionen av näring, κ antas här vara konstant
- där α är en dimensionslös konstant som påverkar tillväxthastigheten i processen.

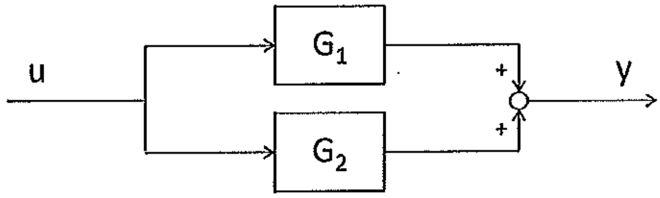
a) Antag att flödeshastigheten F, liksom volymen V, är konstanta. Identifiera den naturliga insignalen samt ett lämpligt antal tillståndsvariabler för systemet. Ange tänkbara utsignaler, samt välj en av dessa. För poäng krävs kort motivering av valen. (1p)

b) Sätt κ = 0.5 (m^3)^2/(kg · s), α = 0.8, F = 0.1 m^3/s och V = 4 m^3. Ta fram en linjäriserad tillståndsmodell för inflödeskoncentrationen R_I = 0.4 kg/m^3. (3p)

c) Bestäm motsvarande överföringsfunktion, $G(s)$, mellan små variationer i insignal respektive utsignal. (2p)

2. Betrakta figuren nedan där $G_1(s)$ och $G_2(s)$ är två delsystem med följande överföringsfunktioner:

$$G_1(s) = \frac{2}{1+s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{1+2s}$$



Utsignalen y återkopplas och jämförs med en referenssignal r. Ta fram en regulator som kan generera styrsignalen u så att följande kriterier är uppfyllda

- Inga kvarstående fel vid stegformade ändringar i referensen
- Kretsöverföringen skall ha en fasmarginal på 60 grader och en överkorsningsfrekvens på 1.0 rad/s

(4p)

3. Ett instabilt system modelleras som

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s-1)^2}$$

Utred om systemet kan styras med en PI-regulator, $F(s) = K\,(1 + 1/s)$, för någon inställning av regulatorparametern K. Analysen skall utföras med hjälp av Nyquistkriteriet. (5p)

4. Betrakta följande tillståndsmodell

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

a) Undersök om modellen utgör en minimal realisation. (2p)

b) Utför design av en observatör som skattar tillstånden. Placera observatörens poler i $s = -2 \pm 3j$. (3p)

5. Ett system som modelleras av en ren integrator, $G(s) = 1/s$, styrs med P-regulatorn $F(s) = k$ där $k > 0$.

a) Bestäm största värdet av komplementära känslighetsfunktionen i detta fall. (1p)

b) I verkligheten är överföringsfunktionen lite mer komplicerad:

$$G_0(s) = G(s)\frac{(1+d)s+1}{(1-d)s+1}$$

där beloppet av osäkerhetsparametern d < 1.

Bestäm största värdet av beloppet av Δ_G i den multiplikativa osäkerhetsmodellen

$$G_0(s) = \left(1 + \Delta_G(s)\right)G(s) \qquad (2p)$$

c) Mellan vilka värden i intervallet {-1, 1} får parametern d variera för att robust stabilitet skall garanteras enligt lågförstärkningssatsen

$$|\Delta_G(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad \forall\, \omega \qquad (2p)$$

ESS017 och ERE091

TENTAMEN I REGLERTEKNIK, 11 jan. 2012

(1) a) Insignal: R_I, inflödeskoncentrationen $\boxed{R_I = u}$

påverkar systemet utifrån, variabel (då ej annat angetts)

Utsignal: N, konc. av mikroorg., $\boxed{N = y}$

eller R, konc. av näring $\boxed{R = y}$ — konc mätning sker vid utflödet.

Tillstånd: R och N, de bägge koncentrationerna varierar i tiden enligt givet ekv. syst.
$\boxed{\begin{matrix} R = x_1 \\ N = x_2 \end{matrix}}$

b) Bestäm arbetspunkten!

$u_0 = R_{I,0} = 0.4 \text{ kg/m}^3$

I arb. pkt. är tidsderivatorna $= 0 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} FR_{I,0} - FR_0 - \kappa R_0 N_0 = 0 & (1) \\ \kappa R_0 N_0 - \alpha F N_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Longrightarrow \frac{1}{2} R_0 N_0 - 0.8 \cdot 0.1 N_0 = 0$$

$$N_0\left(\frac{R_0}{2} - 0.08\right) = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{R_0 = 0.16 \text{ kg/m}^3}}$$

$$(1) \Longrightarrow 0.1 \cdot 0.4 - 0.1 \cdot 0.16 - \frac{1}{2} 0.16 N_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{N_0 = 0.30 \text{ kg/m}^3}}$$

Det olinjära ekv. syst.:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{1}{V}(FR_I - FR - \kappa RN) = f_1(R_I, R, N) = f_1(u, x)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dN}{dt} = \frac{1}{V}\left(\frac{\kappa RN}{\alpha} - FN\right) = f_2(R_I, R, N) = f_2(u, x)$$

Partiella derivator utvärderade i arbetspunkten:

$$f_1: \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_0 = \frac{1}{V}(-F - \kappa N_0) = \frac{1}{4}\left(-0.1 - \frac{1}{2} \cdot 0.3\right) = -\frac{1}{16} = -0.0625$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_0 = \frac{1}{V}(-\kappa R_0) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.16 = \frac{-2}{100} = \frac{-1}{50} = -0.02$$

(b) forts)

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_0 = \frac{F}{V} = \frac{0,1}{4} = \frac{1}{40} = 0.025$$

$$f_2: \quad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_0 = \frac{1}{V}\left(\frac{kN_0}{\alpha}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{8} = \frac{3}{64} = 0.0469$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_0 = \frac{1}{V}\left(\frac{kR_0}{\alpha} - F\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{10}{8} - \frac{1}{10}\right) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_0 = 0$$

Linjäriserad tillståndsmodell:

$$\Delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & -\frac{1}{50} \\ \frac{3}{64} & 0 \end{bmatrix} \Delta x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{40} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x(t)$ om $y = R$

$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x(t)$ om $y = N$

c) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s-a_{11}) - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} s & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C \cdot \frac{1}{s(s-a_{11}) - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} \frac{s}{40} \\ a_{21}\cdot\frac{1}{40} \end{bmatrix} =$$

$$= C \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{s}{16} + \frac{3}{3200}} \begin{bmatrix} \frac{s}{40} \\ \frac{3}{2560} \end{bmatrix}$$

$\Delta y = \Delta R \implies G(s) = \dfrac{s}{40s^2 + 2,5s + 0,0375}$

$\Delta y = \Delta N \longrightarrow G(s) = \dfrac{3}{2560s^2 + 160s + 2,4}$

(2)

$$Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = \underbrace{(G_1 + G_2)}_{=G(s)}U(s)$$

$$G(s) = G_1 + G_2 = \frac{2}{1+s} + \frac{1}{1+2s} = \frac{5s+3}{(1+s)(1+2s)}$$

PI-reg: $F(s) = \frac{K(1+\tau_i s)}{\tau_i s}$ Integrerande verkan krävs för att eliminera konstående fel.

$$\varphi_m = \angle \mathcal{L}(j\omega_c) + 180^\circ$$

$$|\mathcal{L}(j\omega_c)| = 1$$

$$\mathcal{L}(s) = F(s)G(s)$$

Specifikationer:

$\omega_c = 1$ rad/s

$\varphi_m = 45^\circ$

$$\varphi_m = \operatorname{atan} \tau_i \omega_c - 90^\circ + \operatorname{atan} \frac{5\omega_c}{3} - \operatorname{atan} \omega_c$$

$$- \operatorname{atan} 2\omega_c + 180^\circ = 45^\circ \implies \tau_i \approx 0.35$$

$$|\mathcal{L}(j\omega_c)| = \frac{K}{\tau_i \omega_c} \sqrt{1^2 + (\tau_i \omega_c)^2} \cdot \frac{\sqrt{(5\omega_c)^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + \omega_c^2}\sqrt{1^2 + (2\omega_c)^2}} = 1$$

$$\implies K \approx 0.18$$

$$F(s) = \frac{0.18(1 + 0.35s)}{0.35s} = \underline{\underline{\frac{0.51(1+0.35s)}{s}}}$$

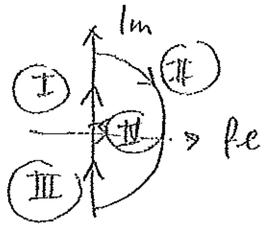
3) $G(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$, $F(s) = K\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \frac{K(1+s)}{s}$

$$L(s) = \frac{K}{s}\frac{(s+1)^2}{(s-1)^2} = \frac{K}{s}\frac{(s^2+2s+1)}{(s^2-2s+1)}$$

Sätt tex. $K=1$ och rita Nyquistkurvan.

Kretsöverföringen $\mathcal{L}(s)$ har en pol i origo, samt två poler i HHP. $\Longrightarrow$ $P=2$ $\Longrightarrow$ Fullständiga Nyquistkurvan!

Nyquist kontur:



I $s = j\omega$ där ω går från 0^+ till $+\infty$

$$\mathcal{L}(j\omega) = \text{Re}(\mathcal{L}(j\omega)) + j\cdot \text{Im}(\mathcal{L}(j\omega)) =$$

$$= \frac{4\omega(1-\omega^2)}{n(\omega)} + j\cdot\frac{(4\omega^2 - (1-\omega^2)^2)}{n(\omega)}$$

där $n(\omega) = \omega\left((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\right)$

Tabell:

ω	Re	Im
0.1	3.9	−9.2
0.2	3.6	−3.5
0.5	1.9	0.56
0.8	0.53	1.1
1.0	0	1.0
1.2	−0.30	0.78

ω	Re	Im
1.5	−0.47	0.47
2.0	−0.48	0.14
4.0	−0.20	−0.14
10	−0.04	−0.09

II $s = Re^{j\varphi}$, $R \longrightarrow \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ till $-\frac{\pi}{2}$

R stort: $\mathcal{L}(Re^{j\varphi}) \longrightarrow \frac{1}{Re^{j\varphi}}$

$R \to \infty$: $\mathcal{L} \longrightarrow 0$ oavsett φ-värde.

Hela II avbildas i origo

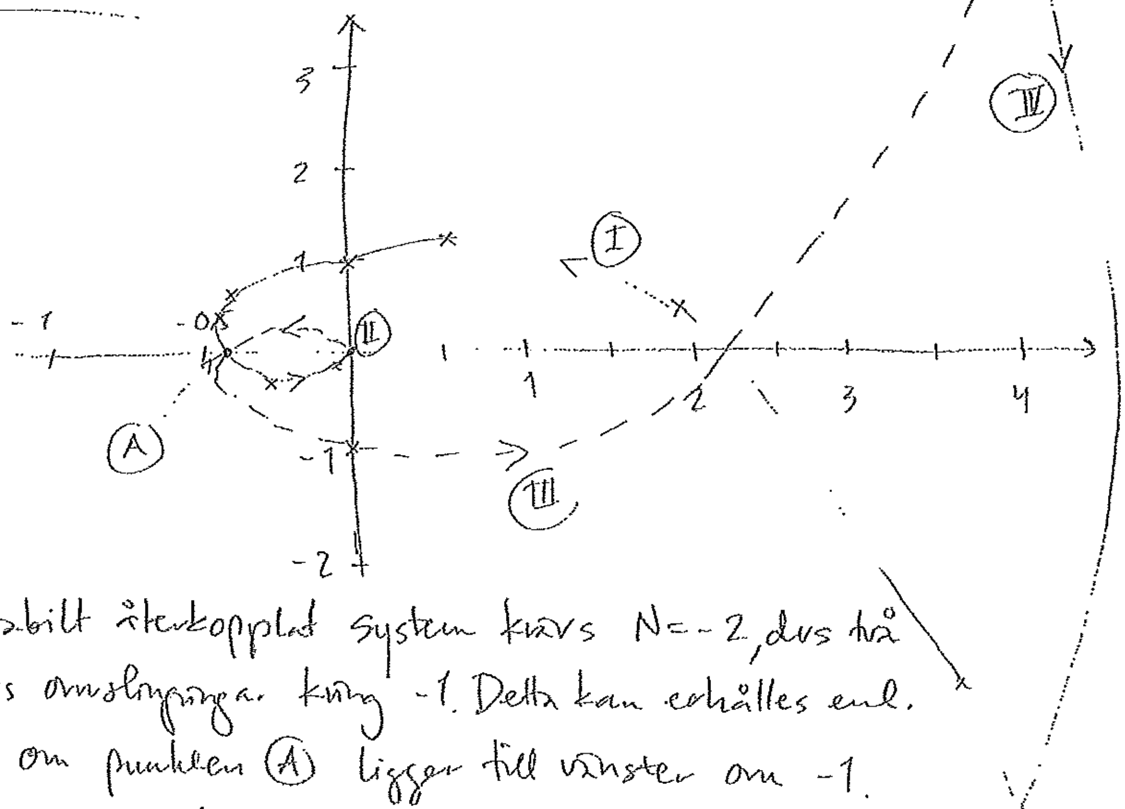
(III) $s = j\omega$ där ω går från $-\infty$ till 0^-. Spegling av (I) i Re-axeln.

(IV) $s = re^{j\theta}$, $r \to 0$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$

Litet r: $\mathcal{L}(re^{j\theta}) \longrightarrow \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta}$

$r \to 0$ ger $\frac{1}{r} \to \infty$; vinkelläge från $+\frac{\pi}{2}$ till $-\frac{\pi}{2}$

Rita kurvan!



För stabilt återkopplat system krävs $N = -2$, dvs två moturs omslutningar kring -1. Detta kan erhålles enl. figur om punkten (A) ligger till vänster om -1.

Enligt tabell ligger, för $K = 1$, (A) mellan frekvenserna $\omega = 2$ och $\omega = 4$ rad/s.

Numerisk iterering eller algebraisk lösning (av $\mathrm{Im}(\mathcal{L}(j\omega)) = 0$) eller avläsning i graf ger att skärningen sker för $\omega \approx 2.4$ rad/s vid $\mathrm{Re}(\mathcal{L}(j \cdot 2.4)) \approx -0.415$.

Skärning i -1 fås då:

$$K \cdot \mathrm{Re}(\mathcal{L}(j \cdot 2.4)) = -1 \implies K = 2.41$$

För $K > 2.4$ erhålls stabilt återkopplat system.

4 a) Styrbarhet: $S(A,B) = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det S = 0$ Ej styrbart!

Observerbarhet: $\mathcal{O}(A,C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det \mathcal{O} = -2$ Observerbart!

b) Observatör: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) =$

$= (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$

där $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

Skattningsfelets dynamik ges av: $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$

$A - KC = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [0 \ 1] = \begin{bmatrix} -2 & -k_1 \\ 2 & -1-k_2 \end{bmatrix}$

Observatörens poler ges av $\det(sI - (A - KC)) = 0$

$\begin{vmatrix} s+2 & k_1 \\ -2 & s+1+k_2 \end{vmatrix} = (s+2)(s+1+k_2) + 2k_1 =$

$= s^2 + s(3+k_2) + 2(1+k_1+k_2) = 0$

Önskad polplacering: $(s - (-2+3j))(s - (-2-3j)) =$

$= s^2 + 4s + 13$

Jämför koefficienter: $3 + k_2 = 4 \implies k_2 = 1$

$2(1 + k_1 + k_2) = 13 \longrightarrow k_1 = 4.5$

Observatören blir:

$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$ med $K = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

(5) a) $T(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$; $L(s) = G(s)F(s) = \dfrac{k}{s}$, $k > 0$

$$T(s) = \frac{k}{s+k} \qquad |T(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}$$

$$|T(j\omega)|_{max} = 1 \quad \text{då} \quad \omega \to 0$$

b) $$(1+\Delta_G(s)) = \frac{(1+d)s+1}{(1-d)s+1}$$

$$\Delta_G = \frac{(1+d)s+1-((1-d)s+1)}{(1-d)s+1} =$$

$$= \frac{s+ds+1-s+ds-1}{(1-d)s+1} = \frac{2ds}{(1-d)s+1}$$

$$|\Delta_G(j\omega)| = \left| \frac{2d\omega}{(1-d)j\omega+1} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{(2d\omega)^2}}{\sqrt{(1-d)^2\omega^2+1^2}}$$

Maxvärde för $|\Delta_G(j\omega)|$ fås då $\omega \to \infty$

$$|\Delta_G(j\omega)|_{max} = \frac{2d}{1-d}$$

c) $|\Delta_G(j\omega)| < \dfrac{1}{|T(j\omega)|}$ $\forall\ \omega$ innebär stabilitet

med $|T(j\omega)|_{max}$ fås lägsta värde för $\dfrac{1}{|T(j\omega)|}$ och med

$|\Delta_G(j\omega)|_{max}$ fås värsta tänkbara fall.

$\to$

(c) forts)

$$|\Delta G(j\omega)|_{max} < \frac{1}{|T(j\omega)|_{max}}$$

Undersök för d i intervallet $\{-1, 1\}$

Betrakta $|d|$ i olikheten ovan:

$$\frac{2|d|}{1-|d|} < 1$$

$$3|d| < 1$$

$$|d| < \frac{1}{3} \implies -\frac{1}{3} < d < \frac{1}{3}$$

ger robust stabilitet