CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

onsdag

Tänkbar tentamen i Reglerteknik för F2, ERE091, ~~tisdagen~~ 25 maj 2011.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: V

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultat meddelas senast den 8 juni genom personligt e-mail. Granskning av rättning är möjlig den 9 och den 10 juni, 12.30 -13.00, på plan 3 i E-huset (vid Hörsals- vägen). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Direkta följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är helt orimligt. Notera också att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, ***Reglerteknik-Grundläggande teori***, av Glad och Ljung, utan anteckningar.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer" är tillåtna!

LYCKA TILL!

1. a) Vilka av följande linjära system är minimumfassystem? Motivera kort för var och en!

$$\text{system A: } G(s) = \frac{s-1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

$$\text{system B: } G(s) = 1 - \frac{2}{s+1}$$

$$\text{system C: } G(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$$

3 poäng

b) Upprita Nyquistkurvan för system C ovan, och kommentera stabiliteten utgående från det uppritade Nyquistdiagrammet.

3 poäng

2. Ett instabilt linjärt system har överföringsfunktionen $G(s) = 1/(s-1)$. Systemet skall regleras med regulatorn $F(s) = K_p + K_i/s$, där parametrarna valts till $K_p = 4, K_i = 2$.

a) Vilka poler får det återkopplade systemet med regulatorparametrarna valda enligt ovan?

1 poäng

b) Uppskatta maximala värdet på beloppet av komplementära känslighetsfunktionen $T(j\omega)$ (i enheten dB) i ett Bodediagram.

2 poäng

c) En närmare analys visar att systemet har en liten dödtid, dvs att överföringsfunktionen borde vara $G_0(s) = \exp(-\tau s)/(s-1)$. Ange den relativa osäkerheten $\Delta G(s)$ i en sk *multiplikativ osäkerhetsmodell* $G_0(s) = (1 + \Delta G(s))G(s)$. Ange också maximala värdet på $|\Delta G(j\omega)|$.

2 poäng

d) Man kan inse att om dödtiden ovan är tillräckligt liten borde (samma regulatorparametrar) det återkopplade systemet vara stabilt (vilket kan visas med Nyquistkriteriet). Kan någon slutsats om det återkopplade systemets stabilitet dras utgående från lågförstärkningssatsen?

1 poäng

3. Ett linjärt tidsinvariant system beskrivs på formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

där den "vanliga" tillståndsformen erhålles efter multiplikation från vänster med inversen till diagonalmatrisen. Emellertid är tidskonstanten ε så liten att direkt invertering av denna matris blir numeriskt riskabel.

Låt i stället $\varepsilon \to 0$ direkt (dvs så att en *differentialalgebraisk ekvation* uppstår) och beräkna därefter överföringsfunktionen $G(s)$ från insignal *u* till utsignal *y*.

4 poäng

4. Ett envariabelt system (utan styrterm) beskrivs av följande linjära differentialekvation:

$$\frac{d}{dt}z(t) + 2 \cdot z(t) = 0$$

Ett problem är att vid mätning av z adderas en konstant men okänd offset b till z, dvs att

$$y(t) = z(t) + b$$

Detta problem kan lösas genom att beskriva systemet på tillståndsform där $x_1 = z, x_2 = b$.

a) Formulera en tillståndsmodell för systemet och visa att detta är observerbart.

2 poäng

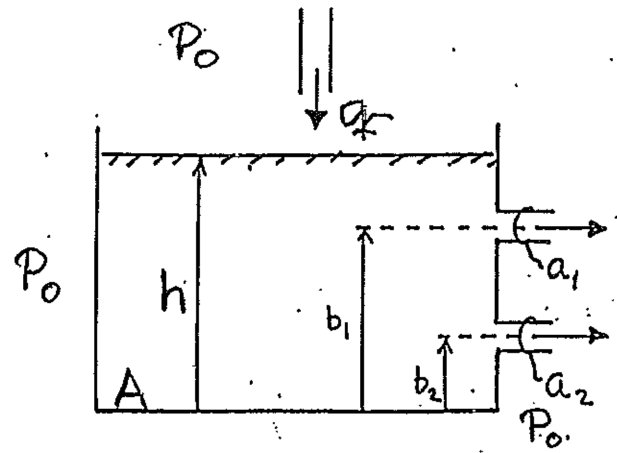
b) Bestäm en observatör sådan att polerna placeras i $s = -1 + j, s = -1 - j$, och ange ett skattningsfilter $F(s)$, sådant att $\hat{Z}(s) = F(s)Y(s)$ där den ursprungliga variabeln z skattas genom att mätsignalen y filtreras.

3 poäng

5. Figuren visar en tank med två avlopp som har tvärsnittsarean A. Avloppen, vars tvärsnittsareor är a_1 respektive a_2, befinner sig på höjderna b_1 respektive b_2 ovanför botten. Tanken är fylld med vätska av densiteten ρ, till höjden $h > b_1 > b_2$. Utströmningshastigheten, w, genom ett avlopp på höjden b ovanför ett referensplan, bestämmas med Bernoullis ekvation:

$$P_0 + \rho g h = P_0 + \rho g b + \frac{\rho w^2}{2}$$

Man kan anta att potentiella energin vid referensplanet är noll, liksom att rörelseenergin vid vätskeytan är noll (vilket framgår av ekvationen). P_0 betecknar det externa atmosfärstrycket, och g är tyngdaccellerationen. Tillflödet i tanken är q, och man har valt tanknivån $h = h_0$.



På grund av variationer $\Delta q(t)$ i tillflödet uppstår variationer $\Delta h(t)$ runt den valda nivån h_0. Bestäm överföringsfunktionen från flödesvariationer Δq till nivåvariationer Δh.

4 poäng

Reglerteknik F2, ERE091, 25/5 - 11 /EB

1.(a) **A** $G(s) = \frac{s-1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \ldots = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)}$

$G(s)$, som är stabilt ($s_1 = -1$, $s_2 = -2$), har komplexa nollställen med negativ realdel, som alltså ligger strikt inne i VHP, varför systemet är ett minimumfassystem.

B $G(s) = 1 - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s+1}$

$G(s)$, är stabilt ($s = -1$), men har ett nollställe för $s = +1 \in HHP$, varför detta system är av typen icke-minimumfas.

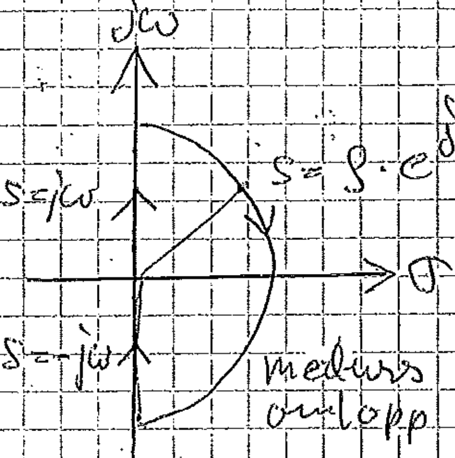
C $G(s) = \frac{s+2}{s^2-1} = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$

$G(s)$, är instabilt pga polen i $s = +1$, varför frekvensfunktionen $G(j\omega)$ inte kan definieras. Begreppen minimum-fas och icke-minimumfas "saknar då innebörd".

$\therefore$ Endast A beskriver ett min.fassystem.

②

1.(b)



Nyquists kontur

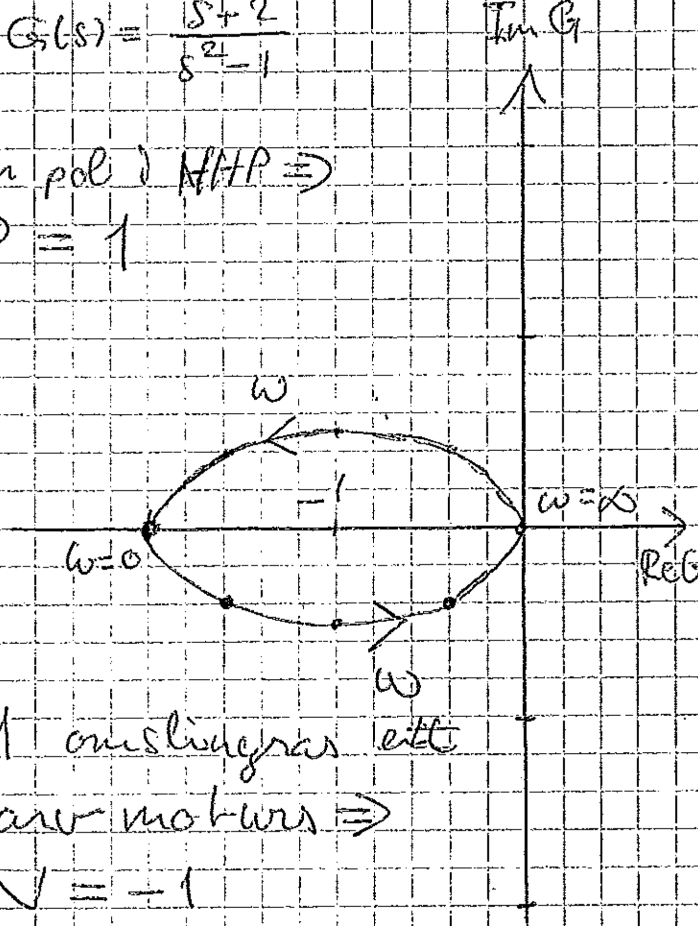
$$s = j\omega \Rightarrow G(s) = G(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{(j\omega + 1)(j\omega - 1)} = \frac{2 + j\omega}{-1 - \omega^2} = -\frac{2}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$$

ω	Re G	Im G
0	-2	0
0.5	-1.6	-0.4
1	-1	-0.5
2	-0.4	-0.4
3	-0.2	-0.3
∞	0	0

En pol i HHP $\Rightarrow$

$P = 1$



$$s = \rho \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{\rho e^{j\varphi} + 2}{\rho^2 e^{j2\varphi} - 1} = \frac{e^{j\varphi} + 2/\rho}{\rho e^{j2\varphi} - 1/\rho} \to \frac{e^{-j\varphi}}{\rho} \to 0 \text{ då } \rho \to \infty$$

-1 omslingras ett varv moturs $\Rightarrow$

$N = -1$

$Z = P + N = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ Stabilt system!

$s = -j\omega \Rightarrow$ "Spegling"

2. (a) $L(s) = \frac{4s+2}{s} \cdot \frac{1}{s-1}$; $L(s)+1 = 0 \Rightarrow$

$$s^2 - s + 4s + 2 = s^2 + 3s + 2 =$$

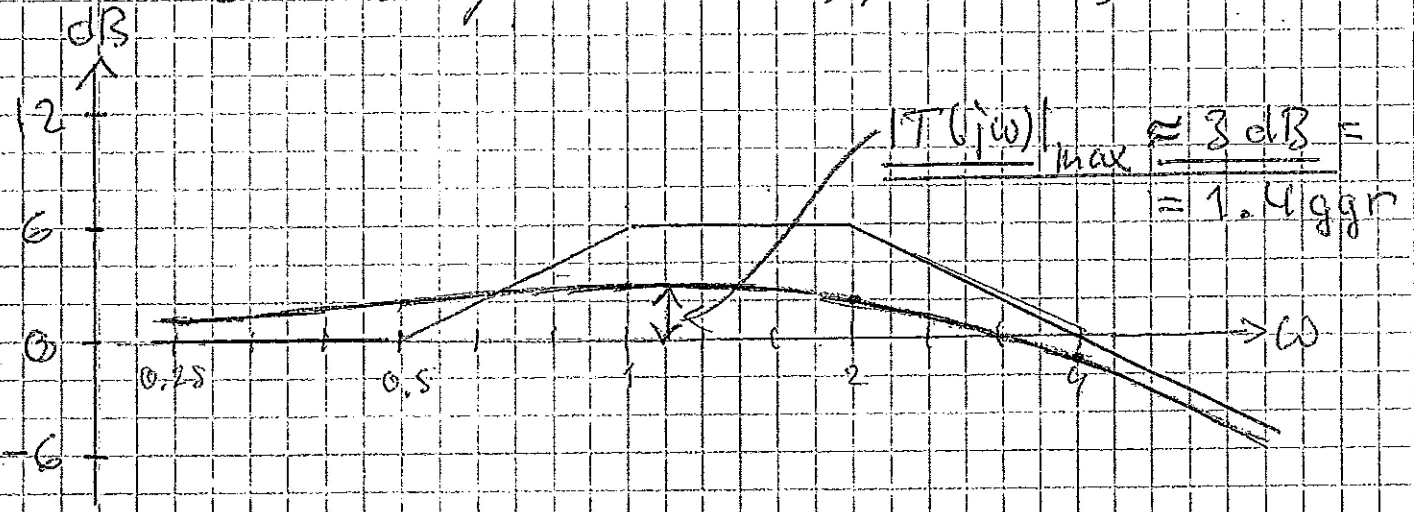
$$= (s+1)(s+2) = 0$$

De sökta polerna är $\underline{\underline{s=-1 \text{ och } s=-2}}$.

(b) $$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{4s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{\cancel{2}(1+2s)}{\cancel{2}(1+s)(1+s/2)}$$

$$T(j\omega) = \frac{1 + j\omega/0.5}{(1+j\omega/1)(1+j\omega/2)}$$

Bode-diagramet (beloppskurvan):



(c) $$G_0(s) = G(s) \cdot e^{-\tau s} = [1 + \Delta G(s)] \cdot G(s)$$

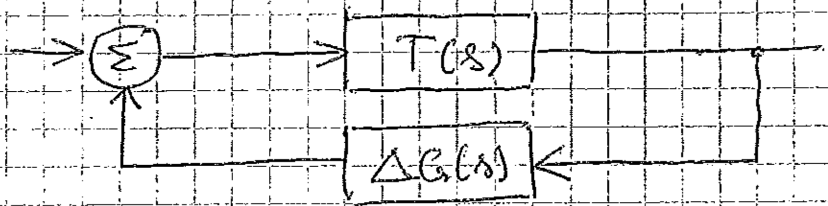
$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta G(s) = e^{-\tau s} - 1}}$$

$$|\Delta G(j\omega)|^2 = |1 - e^{-j\omega\tau}|^2 = |1 - \cos\omega\tau + j\sin\omega\tau|^2$$

$$= (1 - \cos(\omega\tau))^2 + \sin^2\omega\tau = 2 - 2\cos\omega\tau \le 4$$

$\therefore$ $\underline{\underline{|\Delta G(j\omega)| \le 2}}$ (som alltså är maxvärdet)

2 (d) Lågförstärkningssatsen säger, att om $T(s)$ och $\Delta G(s)$ båda är stabila var för sig, gäller att kretsen



är stabil om det gäller att

$$\underbrace{|T(j\omega)|}_{\leq 1.4} * \underbrace{|\Delta G(j\omega)|}_{\leq 2} < 1 \text{ för alla } \omega .$$

≤ 2.8 säger inget!

Oavsett dödtiden τ ger alltså satsen <u>ingen vägledning</u>!

3. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \cdot \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Låt $\varepsilon \to 0$ dvs nedre ekvationen blir

$$0 = x_1 - 2x_2 - u \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}u$$

Övre ekvationen blir

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + 2u =$$

$$= -x_1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}u + 2u =$$

$$= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 - x_2 = x_1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}u$$

$$= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}u$$

Dvs då $\varepsilon \to 0$ fås en ny tillst.modell (av ordning 1):

$$\begin{cases} \dot{x} = -0.5x + 1.5u \Rightarrow A = -0.5,\ B = 1.5 \\ y = 0.5x + 0.5u \Rightarrow C = 0.5,\ D = 0.5 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{G(s)}} = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$= 0.5(s + 0.5)^{-1}1.5 + 0.5 =$$

$$= \frac{0.75}{s + 0.5} + \frac{1}{2} = \frac{1.5 + (s + 0.5)}{2(s + 0.5)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2 + s}{1 + 2s}}}$$

⑥

4. $\dot{Z}(t) = -2 \cdot Z(t)$
$y(t) = Z(t) + b$ } Inför: $X_1 = Z(t)$, $X_2 = b$

(a) $\begin{cases} \dot{X}_1 = -2X_1 \\ \dot{X}_2 = 0 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$y = X_1 + X_2$ $C = [1 \quad 1]$

$$CA = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [-2 \quad 0]$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \det(\mathcal{O}) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Full rang $\Rightarrow$ Observerbart system!

(b) $\frac{d}{dt}\hat{X} = A\hat{X} + K[y - C\hat{X}] = (A - KC)\hat{X} + Ky$

$$A - KC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}(1 \quad 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k_1 - 2 & -k_1 \\ -k_2 & -k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A + KC) = \begin{vmatrix} \lambda + k_1 + 2 & k_1 \\ k_2 & \lambda + k_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (k_1 + k_2 + 2)\lambda + 2k_2 \equiv$$

$$\equiv (\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j) = (\lambda + 1)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\Rightarrow 2k_2 = 2 \Rightarrow k_2 = 1;\ k_1 + 1 + 2 = 2 \Rightarrow k_1 = -1$$

$$\frac{d}{dt}\hat{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\hat{X} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}y;\quad \hat{Z} = (1 \quad 0)\hat{X} \Rightarrow$$

$$F(s) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}\underbrace{(1 \quad 0)\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}}_{= (s+1 \quad 1)}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F(s) = \frac{-s}{s^2 + 2s + 1}}$$

5. Utströmningshastigheten vid avlopp:

$$\cancel{p_0} + \rho g h = \cancel{p_0} + \rho g b + \rho w^2/2$$

$$w^2/2 = gh - gb \Rightarrow w^2 = 2g(h-b)$$

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}(Ah) = -a_1 w_1 - a_2 w_2 + q$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a_1}{A}\sqrt{2g(h-b_1)} - \frac{a_2}{A}\sqrt{2g(h-b_2)} + \frac{q}{A}$$

Arbetspunkt: (h_0, q_0)

$$q_0 = a_1\sqrt{2g(h_0-b_1)} + a_2\sqrt{2g(h_0-b_2)}$$

(efterfrågas inte!)

$$\frac{d}{dt}\Delta h = -\frac{a_1}{A}\frac{2g\,\Delta h}{2\sqrt{2g(h_0-b_1)}} - \frac{a_2}{A}\frac{2g\,\Delta h}{2\sqrt{2g(h_0-b_2)}} + \frac{\Delta q}{A}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta h + \left[\left(\frac{a_1}{A}\right)\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_0-b_1)}} + \left(\frac{a_2}{A}\right)\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_0-b_2)}}\right]\Delta h = \frac{\Delta q}{A}$$

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{As + \frac{a_1\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_0-b_1)}} + \frac{a_2\sqrt{g}}{\sqrt{2(h_0-b_2)}}}$$