

Reglerteknik Z/Kf/F

Kurskod: SSY 051, ERE 091

Tentamen 2008-06-02

Tid: 8:30-12:30,

Lokal: V-huset

Lärare: Bengt Lennartson tel 3722

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Tentamensresultat anslås senast den 16 juni på avdelningens anslagstavla i ED-huset våning 5. *Granskning* av rättning sker den 16 och 17 juni kl 12:30-13:00 på avdelningen.

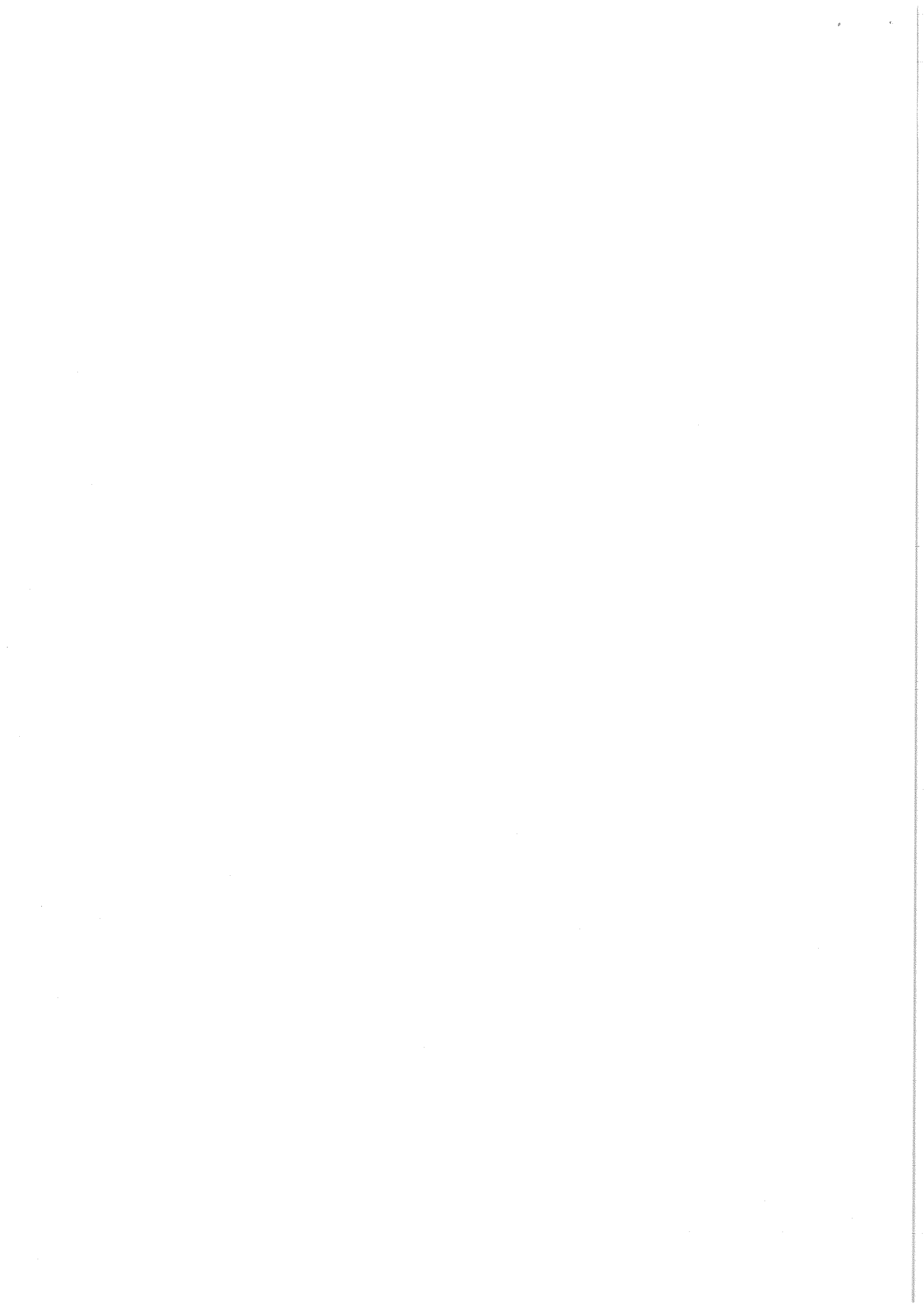
Tillåtna hjälpmedel:

- Formelsamling i reglerteknik (gammal och ny). Anteckningar är tillåtna i formelsamlingen.
- Bodediagram (finns längst bak i tentatesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator.

Lycka till!

Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik, automation och mekatronik
Chalmers tekniska högskola





1

I ett enhetsåterkopplat reglersystem, där insignalen till regulatorm är reglerfelet $e = r - y$, ingår följande block

$$\begin{aligned} \text{Regulator:} & \quad F(s) = K_p \\ \text{Styrdon :} & \quad G_u(s) = K_u, \text{ där } K_u = 0.5 \\ \text{Process :} & \quad G_y(s) = \frac{2}{s(s+2)} \end{aligned}$$

- a) Dimensionera P-regulatorn så att det återkopplade systemet får en dubbelpol och ange dess placering. (1 p)
- b) Beräkna det återkopplade systemets stegsvar från referenssignalen r till processens utsignal y samt motsvarande stigtid t_r . (2 p)
- c) Bestäm den komplementära känslighetsfunktionens bandbredd ω_b samt ange produkten $\omega_b t_r$. (1 p)
- d) Bestäm känslighetsfunktionen och beräkna det kvarstående felet vid stegsvar från referenssignalen r till utsignalen y . (1 p)

2

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)(1 + 2\zeta_p s/\omega_n + (s/\omega_n)^2)}$$

där $K = 1$, $T = 0.5$, $\zeta_p = 1$ och $\omega_n = 1$ ska regleras med en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

Välj fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$, $\zeta = 1$ (dubbelnollställe) samt $\beta = 6$.

- a) Valet av överkorsningsfrekvens ω_c är inte självklart. Dimensionera därför två PID-regulatorer. Välj dels $\omega_c = 1.3$ rad/sek, vilket ger den största integralförstärkningen K_i , och jämför med $\omega_c = 1.6$ rad/sek. Det senare valet motsvarar en vanlig tumregel som säger att $\omega_c = \sqrt{\beta}/\tau$, som är mittfrekvensen för PD-delen $(1 + s\tau)/(1 + s\tau/\beta)$ då $\zeta = 1$. (4 p)
- b) Kommentera skillnaderna i förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen genom att studera och jämföra kriterierna $J_v = 1/K_i$ och $J_u = F(\infty)$ för de båda regulatorerna. (1 p)

2

3

Vid dimensionering av regulatorer på tillståndsform utnyttjas ofta möjligheten att inkludera en PID-regulator med dubbelnollställe

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

i serie med processens överföringsfunktion $G(s)$. För den utökade filtrerade modellen $G(s)F_{PID}(s)$ dimensioneras sedan en tillståndsåterkopplingsregulator inklusive observatör. Polplaceringen väljs då genom att optimera linjärvadratiska kriterier. Denna procedur innebär att komplicerade processer $G(s)$ med exempelvis resonanser och instabila poler kan dimensioneras på ett enkelt sätt. För att genomföra denna procedur krävs att den filtrerade modellen $G(s)F_{PID}(s)$ ges på tillståndsform.

a) Ange först processmodellen

$$G(s) = \frac{2(1 - s)}{(1 + s)(1 + 0.5s)}$$

på tillståndsform

(1 p)

b) Ange PID-regulatorn $F_{PID}(s)$ på tillståndsform

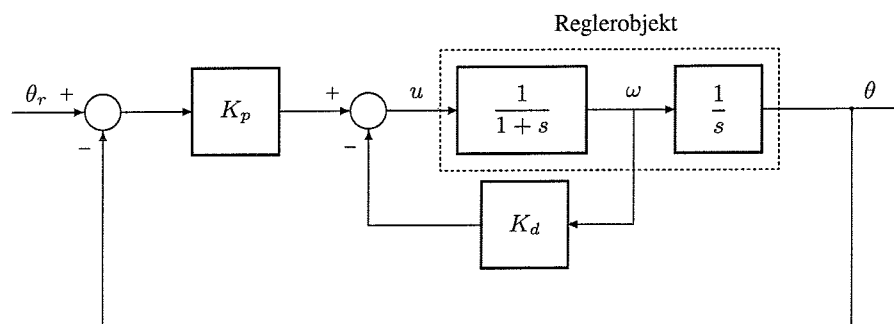
(2 p)

c) Ange den filtrerade modellen $G(s)F_{PID}(s)$ på tillståndsform genom att utnyttja de redan erhållna tillståndsmodellerna i uppgift a) och b).

(2 p)

4

Figuren nedan beskriver ett servosystem för positionering av en last. I systemet används reglering med *inre återföring*, dvs förutom reglerobjektets utsignal (vinkeln θ) återkopplas ytterligare en variabel (vinkelhastigheten ω). Denna princip används ofta för att erhålla snabbare och noggrannare reglering.



a) Välj K_d och K_p så att polerna för det återkopplade systemet hamnar i $s = -1 \pm j$.
(2 p)

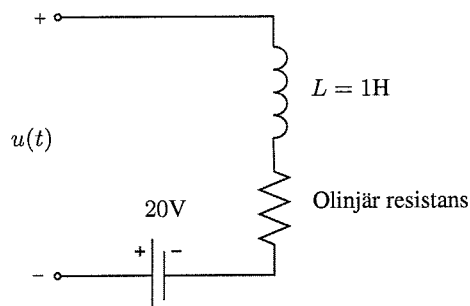
- b) Antag att en icke-modellerad resonans uppträder vid stysignalens excitation av reglerobjektet. Bestäm därför kretsöverföringen $L(s)$ då loopen bryts upp vid styrsignalen u samt motsvarande komplementära känslighetsfunktion $T(s)$. (2 p)
- c) Studera högfrekvensasymptoten för $T(s)$ då derivataförstärkningen K_d kompletteras med ett lågpasfilter, d.v.s. K_d ersätts med

$$\frac{K_d}{1 + 0.1s}$$

och jämför med motsvarande resultat utan filter. Kommentera robustheten med avseende på den icke-modellerade resonansen för lösningen med och utan detta lågpasfilter.

(2 p)

5



Figuren visar en elektrisk krets med en olinjär resistans, en induktans, en konstant spänningskälla, samt en tidsvariabel insignalsspänning $u(t)$.

- a) Formulera en olinjär dynamisk modell med strömmen i kretsen $i(t)$ som tillståndsvariabel då strömmen genom resistansen

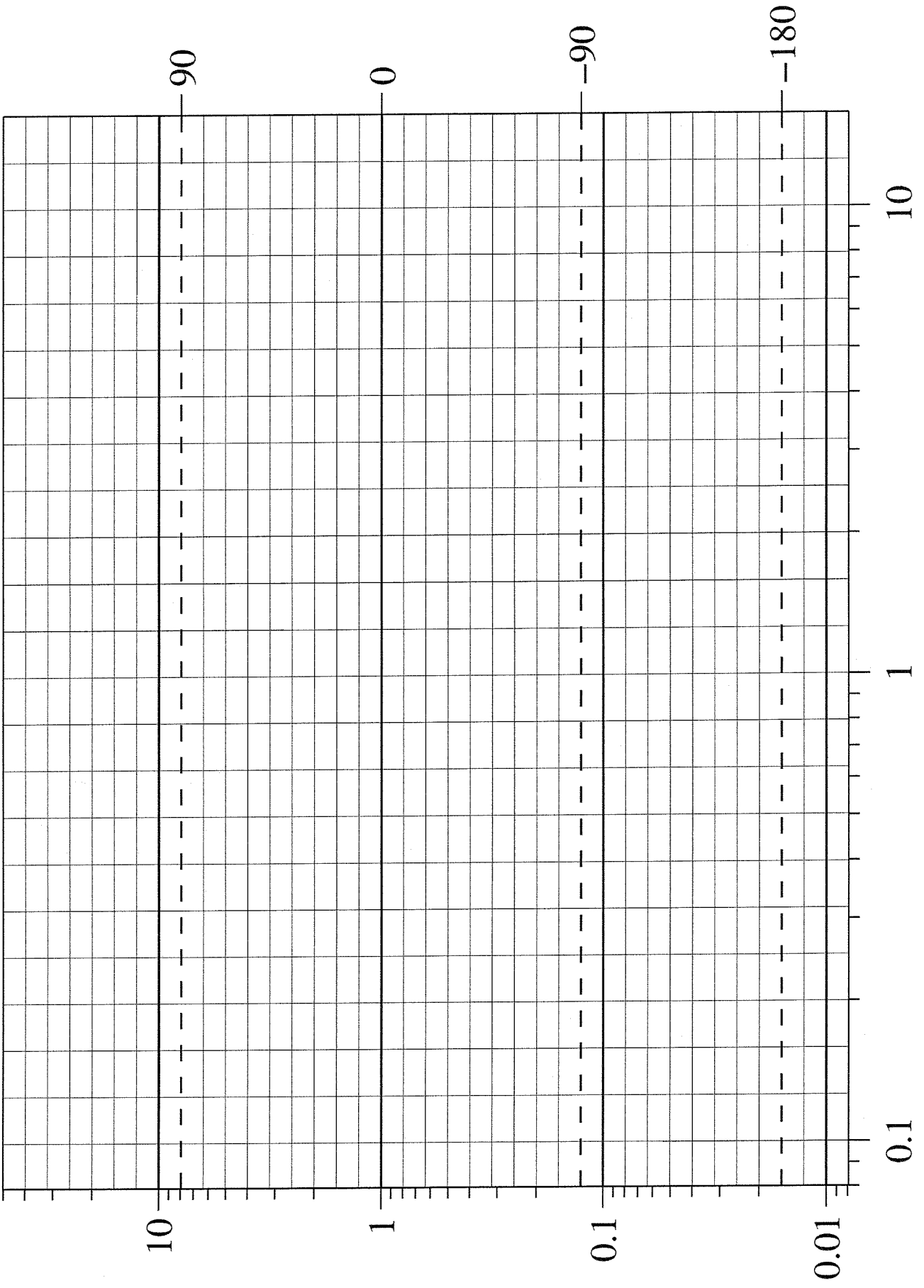
$$i_r = 2e^{0.1v_r}$$

där v_r är spänningen över resistansen.

(2 p)

- b) Formulera en linjär modell kring arbetspunkten $u(t) = 0$ och bestäm överföringsfunktionen från u till spänningen över induktansen u_L , d.v.s. $G(s) = U_L(s)/U(s)$.

(2 p)



Lösning till Reglerteknik Z2/F2 080602

1. a) $L(s) = \frac{K_p}{s^2 + 2s}$ $G_{reg}(s) = \frac{K_p}{s^2 + 2s + K_p} = \frac{K_p}{(s+1)^2}$
för $K_p = 1$. Dubbelpol i $s = -1$.

b) $Y(s) = G_{reg}(s) R(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s}$

$$y(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$$

$$y(0.532) = 0.1 \quad y(3.89) = 0.9 \quad t_r = 3.89 - 0.532 = \underline{\underline{3.36}}$$

c) $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = G_{reg}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

$$|T(j\omega_b)| = \frac{1}{1+\omega_b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \omega_b = \sqrt{\sqrt{2}-1} = \underline{\underline{0.644}}$$

$$\omega_b t_r = 2.16 \quad \text{FS sid 23 anger}$$

$$\text{tumregel} \quad \omega_b t_r = 2.$$

d) $E(s) = R(s) - Y(s) = (1 - T(s)) R(s) = s(s) R(s)$

$$s(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s(s+2)}{(s+1)^2}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s s(s) R(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+2)}{(s+1)^2} \frac{1}{s} = \underline{\underline{0}}$$

$$2. a) G(s) = \frac{1}{(1+0.5s)(1+2s+s^2)} = \frac{1}{(1+0.5s)(1+s)^2}$$

$$F_{PID}(s) = \frac{K_i(1+2s\tau + (\tau)^2)}{s(1+s\tau/\beta)}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \tau = 1 \\ \beta = 6 \end{matrix}}$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+0.25\omega_c^2} (1+\omega_c^2)} = \begin{cases} 0.3117 & \omega_c = 1.3 \\ 0.2194 & \omega_c = 1.6 \end{cases}$$

$$\angle G(j\omega_c) = -\arctan 0.5\omega_c - 2\arctan \omega_c = \begin{cases} -137.9^\circ & \omega_c = 1.3 \\ -154.7^\circ & \omega_c = 1.6 \end{cases}$$

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = \phi_n - 180^\circ - \angle G(j\omega_c) = \begin{cases} -130^\circ + 137.9^\circ = 7.9^\circ & \omega_c = 1.3 \\ -130^\circ + 154.7^\circ = 24.7^\circ & \omega_c = 1.6 \end{cases}$$

Enligt FS s 30

$$\omega_c \tau = \begin{cases} 1.5 & \angle F_{PID} = 7.9^\circ \\ 2.6 & \angle F_{PID} = 24.7^\circ \end{cases} \Rightarrow \tau = \begin{cases} 1.15 & \omega_c = 1.3 \\ 1.63 & \omega_c = 1.6 \end{cases}$$

$$K_{\infty} |G(j\omega_c)| = \begin{cases} 2.9 & \angle F_{PID} = 7.9^\circ \\ 2.2 & \angle F_{PID} = 24.7^\circ \end{cases} \Rightarrow K_{\infty} = \begin{cases} 9.30 & \omega_c = 1.3 \\ 10.03 & \omega_c = 1.6 \end{cases}$$

$$\boxed{K_i = \frac{K_{\infty}}{\tau \beta} = \begin{cases} 1.35 & \omega_c = 1.3 \\ 1.03 & \omega_c = 1.6 \end{cases}}$$

$$b) z_0 = \frac{1}{K_i} = \begin{cases} 0.741 & \omega_c = 1.3 \\ 0.971 & \omega_c = 1.6 \end{cases} \quad \frac{0.741}{0.971} = 0.76$$

∴ 24% lägre z_0 vid $\omega_c = 1.3$

$$z_n = K_{\infty} = \begin{cases} 9.3 & \omega_c = 1.3 \\ 10.03 & \omega_c = 1.6 \end{cases} \quad \frac{9.3}{10.03} \approx 0.93$$

∴ 7% lägre z_n vid $\omega_c = 1.3$

Slutsats: $\omega_c = 1.3$ ger framförallt bättre kompensering av laststörningar och

$$3. a) G(s) = \frac{-2s+2}{0.5s^2+1.5s+1} = \frac{-4s+4}{s^2+3s+2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{G1} \\ \dot{x}_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{G1} \\ x_{G2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_G$$

$$y = [-4 \quad 4] \begin{bmatrix} x_{G1} \\ x_{G2} \end{bmatrix}$$

$$b) F_{PID}(s) = K_i \frac{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1}{s^2 \tau / \beta + s} =$$

$$= \frac{K_i \tau \beta s^2 + 2K_i \beta s + K_i \beta / \tau}{s^2 + \beta s / \tau} =$$

$$= K_i \tau \beta + \frac{As + B}{s^2 + \beta s / \tau} = \frac{K_i \tau \beta s^2 + (K_i \beta^2 + A)s + B}{s^2 + \beta s / \tau}$$

$$\therefore B = K_i \beta / \tau \quad A = 2K_i \beta - K_i \beta^2 = K_i \beta (2 - \beta)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{F1} \\ \dot{x}_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta / \tau & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_F = [K_i \beta (2 - \beta) \quad K_i \beta / \tau] \begin{bmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \end{bmatrix} + K_i \tau \beta u$$

$$c) \text{ Löt } u_G = y_F$$

$$u_G = K_i \beta (2 - \beta) x_{F1} + K_i \beta / \tau x_{F2} + K_i \tau \beta u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{G1} \\ \dot{x}_{G2} \\ \dot{x}_{F1} \\ \dot{x}_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & K_i \beta (2 - \beta) & K_i \beta / \tau \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta / \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{G1} \\ x_{G2} \\ x_{F1} \\ x_{F2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_i \tau \beta \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-4 \quad 4 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{G1} \\ x_{G2} \\ x_{F1} \\ x_{F2} \end{bmatrix}$$

$$4. \quad a) \quad U(s) = K_p \Theta_r(s) - (K_p + sK_d) \Theta(s)$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 + s} U(s)$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 + s} (K_p \Theta_r(s) - (K_p + sK_d) \Theta(s))$$

$$(s^2 + (1 + K_d)s + K_p) \Theta(s) = K_p \Theta_r(s)$$

$$G_{\Theta_r \Theta}(s) = \frac{K_p}{s^2 + (1 + K_d)s + K_p} = \frac{K_p}{(s + 1 + j)(s + 1 - j)} =$$

$$= \frac{K_p}{s^2 + 2s + 1 + 1} = \frac{K_p}{s^2 + 2s + 2} \Rightarrow \begin{matrix} K_p = 2 \\ K_d = 1 \end{matrix}$$

b) $\circ \frac{u'}{u} \frac{u}{\boxed{\frac{1}{1+s}}}$ bortse från Θ_r

$$U'(s) = - \underbrace{(K_p + sK_d) \frac{1}{s^2 + s}}_{-L(s)} U(s)$$

$$L(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$c) \quad L(s) = \left(2 + \frac{s}{1+0,15s} \right) \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1,2s+2}{(1+0,15s)s(s+1)}$$

$$= \frac{1,2s+2}{s^2 + s + 0,15s^3 + 0,15s^2} = \frac{12s+20}{s^3 + 11s^2 + 10s}$$

$$T(s) = \frac{12s+20}{s^3 + 11s^2 + 22s + 20}$$

$$|T(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{\omega} \quad \omega \gg 1 \quad \text{utan LP-filtter}$$

$$\rightarrow \frac{12}{\omega^2} \quad \omega \gg 1 \quad \text{med LP-filtter}$$

LP-filtret medför att $|T|$ minskar snabbare för högre frekvenser (lutning $[-2]$). Därmed ökar robustheten för den icke-modellerade HF-resonansen.

$$5. a) u + 20 = \frac{di}{dt} + U_r$$

$$\ln 0.5 i = 0.1 U_r$$

$$\frac{di}{dt} = -10 \ln 0.5 i + 20 + u = f(i, u)$$

b) Linjär modell för $u=0$

$$-10 \ln 0.5 i_0 + 20 = 0$$

$$\ln 0.5 i_0 = 2 \Leftrightarrow i_0 = 2e^2 = 14.78$$

$$i = i_0 + \Delta i \quad u = \Delta u$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{i=i_0} \Delta i + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u =$$

$$= -10 \cdot 0.5 \frac{1}{0.5 i_0} \Delta i + u =$$

$$= -0.6766 \Delta i + u$$

$$\text{Laplace} \Rightarrow s \Delta I(s) + 0.6766 \Delta I(s) \quad (= U(s))$$

$$\Delta I(s) = \frac{1}{s + 0.6766} U(s)$$

$$u_L = \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} (i_0 + \Delta i) = \frac{d\Delta i}{dt}$$

$$U_L(s) = s \Delta I(s) \quad \therefore G(s) = \frac{U_L(s)}{U(s)} = \frac{s}{s + 0.6766}$$