CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
INSTITUTIONEN FÖR SIGNALER OCH SYSTEM
Avd för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för F 2

(Kurs nr ERE 091)

Lördagen den 10 april 1999.

Tid: Kl 08.45 - 12.45 **Lokal:** mn

Lärare: Claës Lindeborg, tel Chalmers 3719.

Poängberäkning: Tentamen består av 9 uppgifter om totalt 30 poäng. För betygen tre, fyra och fem krävs 12, 18 respektive 24 poäng.

Lösningar anslås den 12 april på institutionens anslagstavla.

Tentamensresultaten anslås senast den **27 april** på institutionens anslagstavla.

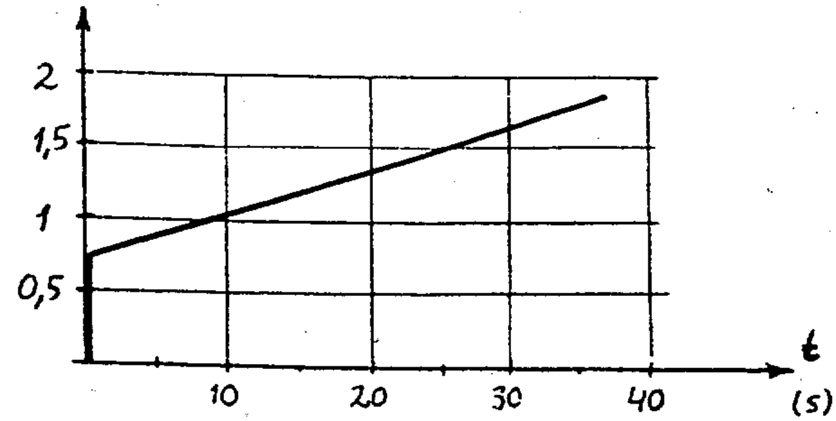
Granskning av rättning sker den **27 och 28 april** kl 12.30 - 13.15 på institutionen.

Tillåtna hjälpmedel:
Valfri kalkylator, dock ej portföljdator
Standardtabeller typ TEFYMA och Beta
Formelsamling i reglerteknik
Bodediagram

OBS!
Iakttag granskningstiderna! Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste inlämnas **senast två veckor** efter granskningsdagarna.

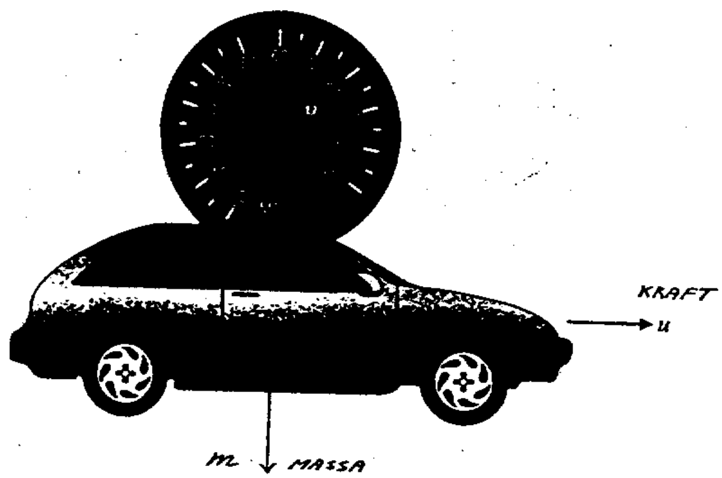
LYCKA TILL!

1. Figuren nedan visar stegsvaret för en PI-regulator. Bestäm integrationstiden T_I och förstärkningen K .

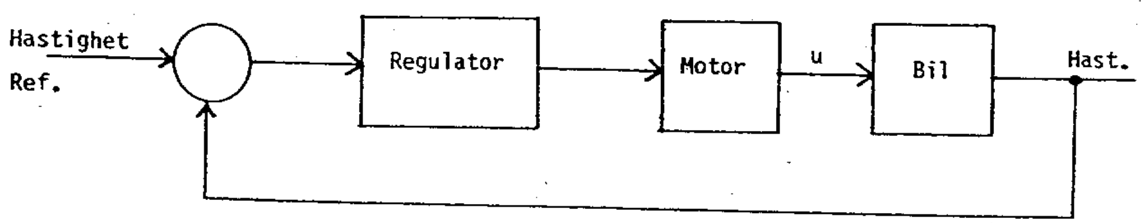


PI-regulatorns överföringsfunktion antas vara $G = K(1 + \frac{1}{T_I s})$. (2 p)

2. Cruise-control model



Det förutsättes att den totala friktionskraften är proportionell mot bilens hastighet (konst. b). Blockschemat visar en krets för hastighetsreglering.



Uppgift: Teckna Bil-blockets överföringsfunktion $\frac{Hast(s)}{U(s)}$.

(2 p)

3.

Saxat ur en lärobok:

5.2 Butterworthfiltrets överföringsfunktion

Vi inleder med en sats som även skulle kunna fungera som definition på ett Butterworthfilter:

Sats 5.1 *Ett Butterworthfilter är ett allpolfilter (dvs inga ändliga nollställen existerar) där överföringsfunktionens poler är jämnt fördelade på en cirkel i s-planet.*

Om filtret är av udda ordning ligger en pol på negativa σ-axeln. Vinkeln mellan polerna är π/n, där n är filterordningen och första polen bildar vinkeln $\pi/2n$ med $j\omega$-axeln. Figur 5.1a och 5.1b visar polernas positioner för ett andra respektive tredje ordningens Butterworthfilter.

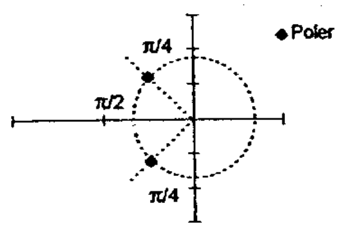


Fig 5.1a Andra ordningens Butterworth

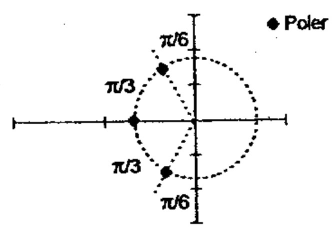
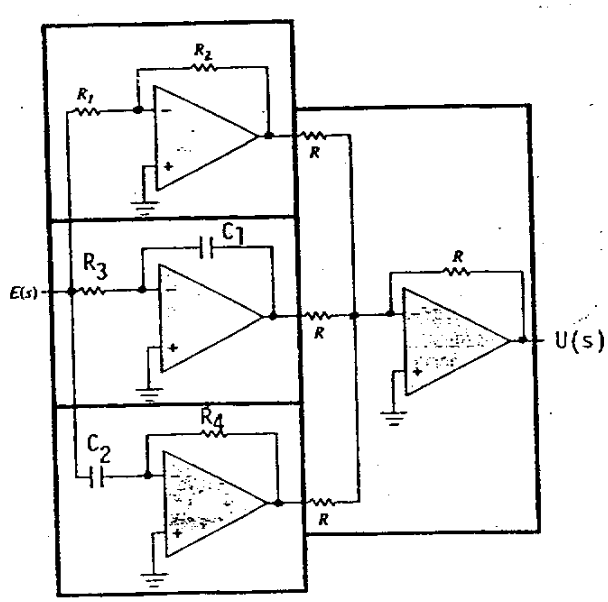


Fig 5.1b Tredje ordningens Butterworth

Uppgift:
Härled överföringsfunktionen $G(s)$ för ett andra ordningens Butterworthfilter. Antag cirkelns radie är ω_R samt att filtrets lågfrekvensförstärkning är G_0. (3 p)

4.



En PID-regulator har överföringsfunktionen

$$G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$$

som implementeras med operationsförstärkare.

Uppgift: Uttryck konstanterna K_P, K_I och K_D som funktioner av schemats komponenter.

(3 p)

5.

Figure shows the diagram of a magnetic-ball-suspension system. The objective of the system is to control the position of the steel ball by adjusting the current in the electromagnet through the input voltage $e(t)$. The differential equations of the system are

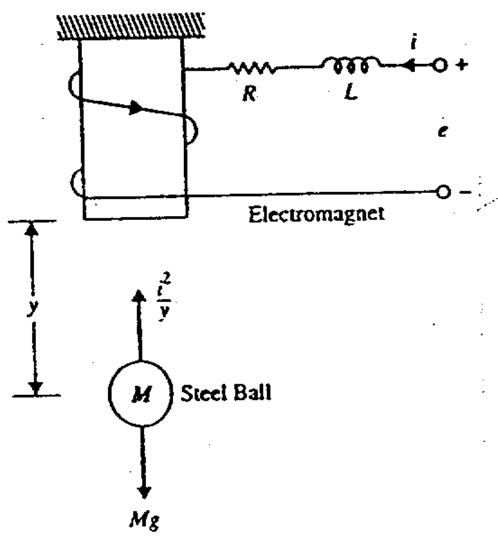
$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = Mg - \frac{i^2(t)}{y(t)}$$

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

where

- $e(t)$ = input voltage
- $i(t)$ = winding current
- L = winding inductance
- g = gravitational acceleration
- $y(t)$ = ball position
- R = winding resistance
- M = mass of ball

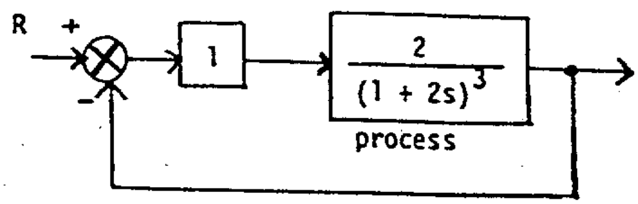
Let us define the state variables as $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = dy(t)/dt$, and $x_3(t) = i(t)$.



Uppgift: Beskriv systemet med linjära tillståndsekvationer. Linjärisera kring en viss arbetspunkt y_0 .

(5 p)

6. a) Rita ett exakt Bode-diagram för processen $G(s)$. (Enbart asymptoter räcker ej). Bestäm med hjälp av Bode-diagrammet om systemet vid enhetsåterkoppling enligt nedanstående figur är stabilt eller inte. Ange också den aktuella fasmarginalen och amplitudmarginalen.



(2 poäng)

b) Bestäm med Ziegler/Nichols tumregler en lämplig inställning för en PID-regulator som skall användas i ovanstående system.

(1 poäng)

c) Antag att processen ovan inte regleras med en PID-regulator, utan med ett lagfilter som har överföringsfunktionen

$$G(s) = 3 \cdot \frac{1 + 5s}{1 + 15s}$$

Hur stort blir då det kvarstående felet vid stegformade börvärdesändringar räknat i procent?

(1 poäng)

7.

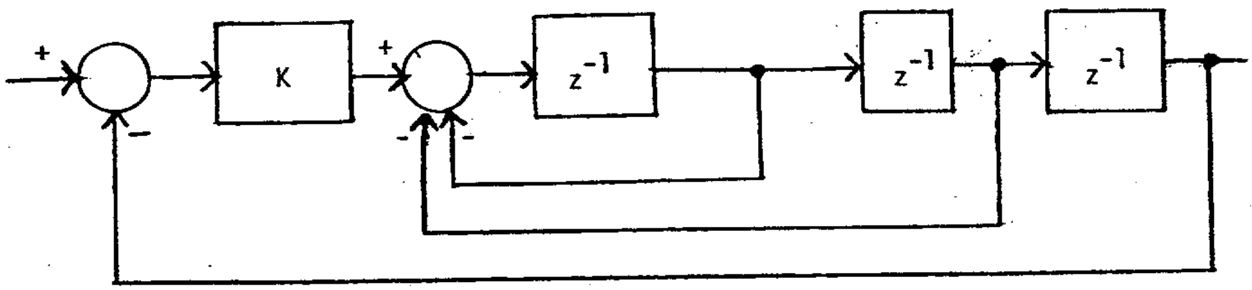
En process $G_p(s) = \frac{K_p}{1 + sT}$ skall regleras med en regulator $G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sTi}\right)$.

Reglersystemets poler kan karaktäriseras av relativa dämpningen ζ och egenfrekvensen ω_n.

Uppgift: Härled uttryck för regulatorparametrarna K och T_i så att specificerade ζ och ω_n erhålles (eller med andra ord: önskade poler anges med parametrarna ζ och ω_n. Bestäm K och T_i).

(4 p)

8.



Uppgift: Utred för vilka K systemet är stabilt.

(4 p)

9.

Den tidskontinuerliga processen

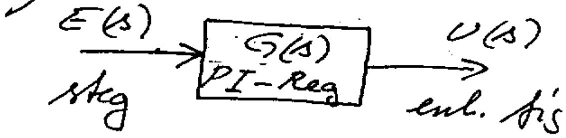
$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

regleras med en styckvis konstant styrsignal. Samplingsintervallets längd är 0.5 s. Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion!

(3 p)

Lösning till tentamen för F2 Reglerteknik. 10/4-99

1)



$$U(s) = E(s)\cdot G(s) =$$

$$= \frac{1}{s}\cdot K\left[1+\frac{1}{T_I s}\right] = \underbrace{\frac{K}{s}}_{\text{steg}} + \underbrace{\frac{K}{T_I\cdot s^2}}_{\text{ramp}}$$

utstegshöjd $= 0{,}75 \Rightarrow K = 0{,}75$

ramphast. $\frac{2{,}0-0{,}75}{40} = \frac{K}{T_I} \quad \Rightarrow T_I = \frac{0{,}75\cdot 40}{1{,}25} = 24$

<u>Svar:</u> $K = 0{,}75$ och $T_I = 24$

---

2) Ant. x är lägeskoordinaten i framriktningen

$m\cdot\ddot{x} = u - b\cdot\dot{x}$ eller med $\dot{x} = $ hast.

$m\cdot \dot{\text{hast}} = u - b\cdot \text{hast} \Rightarrow$

$$m\cdot s\cdot \text{Hast}(s) = U(s) - b\cdot \text{Hast}(s) \Rightarrow \frac{\text{Hast}(s)}{U(s)} = \frac{1}{b+ms}$$

---

3) Andra ordningens filter innebär 2 poler p_1 och p_2 där

$$p_{1,2} = -\omega_R\cos\frac{\pi}{4} \pm j\omega_R\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\omega_R}{\sqrt{2}} \pm j\frac{\omega_R}{\sqrt{2}}$$

Inga nollställen $\Rightarrow$ konstant i täljaren, sätt $= K$

$$\therefore G(s) = \frac{K}{\left(s+\frac{\omega_R}{\sqrt{2}} - j\frac{\omega_R}{\sqrt{2}}\right)\left(s+\frac{\omega_R}{\sqrt{2}} + j\frac{\omega_R}{\sqrt{2}}\right)} =$$

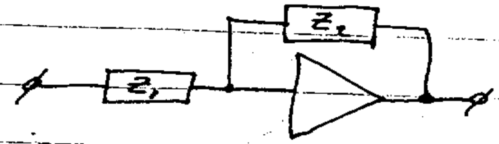
$$= \frac{K}{s^2 + \frac{s\omega_R}{\sqrt{2}} + \cancel{j\frac{s\omega_R}{\sqrt{2}}} + s\frac{\omega_R}{\sqrt{2}} + \frac{\omega_R^2}{2} + \cancel{j\frac{\omega_R^2}{2}} - \cancel{j\frac{s\omega_R}{\sqrt{2}}} - \cancel{j\frac{\omega_R^2}{2}} + \frac{\omega_R^2}{2}}$$

$$= \frac{K}{s^2 + 2s\frac{\omega_R}{\sqrt{2}} + 2\frac{\omega_R^2}{2}}$$; Lågfrekv. ampl.först. (låt $s \to 0$): $\frac{K}{\omega_R^2} = G_0$

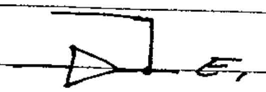
<u>Svar:</u> $$G(s) = \frac{G_0\cdot\omega_R^2}{s^2 + s\sqrt{2}\,\omega_R + \omega_R^2}$$

4/ För en ideal op-ampkrets med impedanser Z_1 och Z_2 gäller:

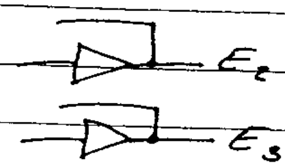
$$G = -\frac{Z_2}{Z_1}$$



Jfr. kursboken ekv. (4.15).



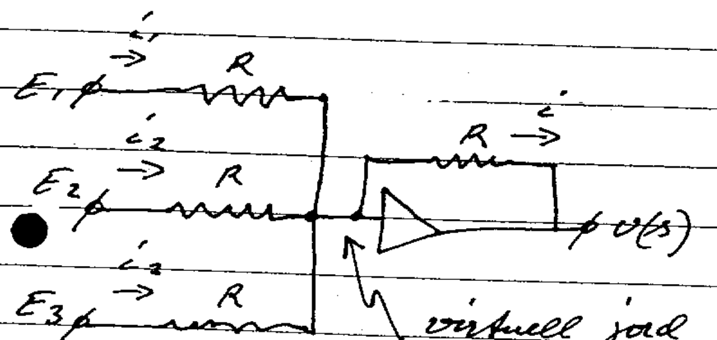
$$\frac{E_1(s)}{E(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \quad \text{(prop.)}$$



$$\frac{E_2(s)}{E(s)} = -\frac{\frac{1}{sC_1}}{R_3} = -\frac{1}{sR_3C_1} \quad \text{(integrerande)}$$

$$\frac{E_3(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{\frac{1}{sC_2}} = -R_4C_2 s \quad \text{(deriverande)}$$

Sista delen är en summationskrets (med teckenändring)



$$\left.\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= i \\ U(s) &= -i \cdot R \\ i_1 &= E_1/R \\ i_2 &= E_2/R \\ i_3 &= E_3/R \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$U(s) = -\frac{R}{R}\left(E_1 + E_2 + E_3\right)$$

$$\therefore\; G_{PID}(s) = \underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{K_P} + \frac{1}{s\underbrace{R_3C_1}_{K_I}} + s\underbrace{(R_4C_2)}_{K_D}$$

Svar: $K_P = \frac{R_2}{R_1}$; $K_I = \frac{1}{R_3C_1}$ samt $K_D = R_4C_2$

5) $\begin{cases} M\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = Mg - \dfrac{i^2(t)}{y(t)} \\ e(t) = R\,i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} X_1 = y(t) \\ X_2 = \dot{y}(t) \\ X_3 = i(t) \end{cases}$

$\begin{cases} M\cdot\dot{X}_2 = Mg - \dfrac{\dot{X}_3}{X_1} \\ e(t) = R\cdot X_3 + L\cdot\dot{X}_3 \end{cases}$ eller $\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = g - \dfrac{1}{M}\cdot\dfrac{X_3^2}{X_1} \\ \dot{X}_3 = -\dfrac{R}{L}X_3 + \dfrac{1}{L}\,e(t) \end{cases}$

Olinjära tillståndsekv.

stegsignal

Ant. en arbetspunkt $y_0 = X_{01} =$ konstant.

Bestäm arbetspunkt för X_2 och X_3 !

1:a ekv. $\Rightarrow 0 = X_{02}$

2:a ekv. $\Rightarrow 0 = g - \dfrac{1}{M}\cdot\dfrac{X_{03}^2}{X_{01}} \Rightarrow X_{03} = i_0 = \sqrt{MgX_{01}}$

Formelsaml. sid 28: Bilda part.der., sätt in arbetspunkten

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial X_1} = 0; & \dfrac{\partial f_1}{\partial X_2} = 1; & \dfrac{\partial f_1}{\partial X_3} = 0; \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial X_1} = +\dfrac{X_{03}^2}{M}\cdot\dfrac{1}{X_{01}^2} = \dfrac{MgX_{01}}{M}\cdot\dfrac{1}{X_{01}^2} = \dfrac{g}{X_{01}}; & \dfrac{\partial f_2}{\partial X_2} = 0; & \dfrac{\partial f_2}{\partial X_3} = -\dfrac{1}{M}\cdot\dfrac{2X_{03}}{X_{01}} = -2\left(\dfrac{g}{MX_{01}}\right)^{\frac{1}{2}}; \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial X_1} = 0; & \dfrac{\partial f_3}{\partial X_2} = 0; & \dfrac{\partial f_3}{\partial X_3} = -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} = \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Svar: Linjära tillståndsekv.

$$\Delta\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{g}{X_{01}} & 0 & -2\left(\dfrac{g}{MX_{01}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\Delta X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}\Delta e$$

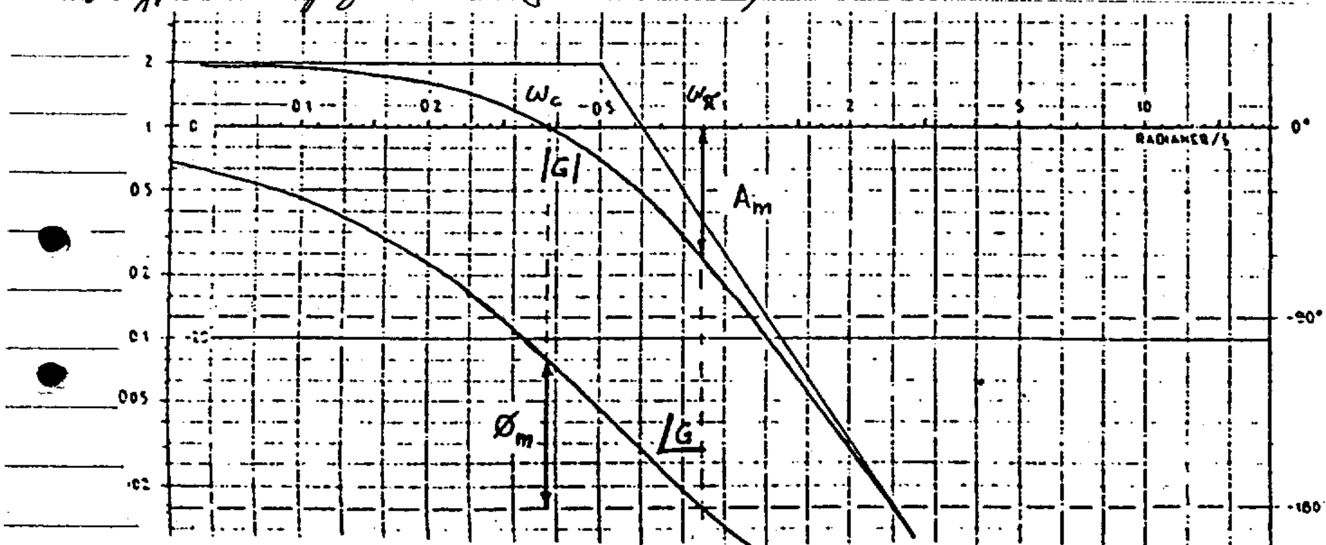
6) $G(s) = \frac{2}{(1+2s)^3} \Rightarrow \begin{cases} |G(\omega)| = \frac{2}{(1+4\omega^2)^{3/2}} \\ \angle G(\omega) = -3\arctan(2\omega) \end{cases}$

eller inse att:

$G_{LågF} = 2$

Brytpunkter $\omega = \frac{1}{2}$ (3 st)

Högfrekv. asympt. lutning: 3×6 dB/oktav



Positiva marginaler, dvs. ett stabilt system $\begin{cases} A_m = 12\text{dB} \approx 4 \text{ ggr} \\ \phi_m = 70° \end{cases}$

SVAR:

b) Ziegler Nichols metod: Höj förstärkningen så att självsvängning inträffar. Sker vid $\omega_\pi = 0{,}9$ rad/sek

(Se formelsaml. sid.20) $\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{0{,}9} = 6{,}98$ sek

$K_0 = A_m = 4$ ggr

PID-reg: $K = 0{,}6 \cdot K_0 = 2.4$; $T_i = T_0/2 = 3.49$

$T_d = T_0/8 = 0{,}8725$

$G_{PID}(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + \frac{sT_d}{1+sT_f}\right)$ SVAR

T.EX. $T_f = \frac{1}{10} \cdot T_d$

c) Kvarstående fel $= \lim_{s \to 0} s \cdot \underbrace{R(s)}_{\substack{\text{steg} \\ 1/s}} \cdot \frac{1}{1+GH} = \frac{1}{1+3\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}} = 0{,}143$

(om det existerar)

typ 0-system och steg se kursboken sid 192

Svar: 14,3 %

7/ Den slutna kretsens överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{\frac{K_p}{1+sT}\cdot K\cdot\left(1+\frac{1}{sT_i}\right)}{1+\frac{K_p}{1+sT}\cdot K\cdot\left(1+\frac{1}{sT_i}\right)}$$

Kar. ekv. $(1+sT)(sT_i) + K_p\cdot K\cdot(sT_i+1) = 0$

$sT_i + s^2TT_i + K_p\cdot K\cdot T_i\cdot s + K_p\cdot K = 0$ eller

$$s^2 + \underbrace{\frac{\cancel{T_i} + K_p\cdot K\cdot \cancel{T_i}}{T\cdot \cancel{T_i}}}_{2\zeta\omega_n} s + \underbrace{\frac{K_p\cdot K}{T\cdot T_i}}_{\omega_n^2} = 0 .$$

$\frac{1+K_p\cdot K}{T} = 2\zeta\omega_n \Rightarrow K = \frac{1}{K_p}\left(2\zeta\omega_n\cdot T - 1\right)$; SVAR

vidare: $T_i = \frac{K_p\cdot K}{T\cdot\omega_n^2} \Rightarrow T_i = \frac{2\zeta\omega_n T - 1}{\omega_n^2\cdot T}$; SVAR

9/

$H(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]_{t=kh}\right\}$ för styckvis konstanta insignaler

$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(1+s)} - \frac{1}{1+s}$; $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{1}{1}(1-e^{-t}) - e^{-t} = 1-2e^{-t}$

Med $t = kh = 0{,}5k$: $1-2e^{-0{,}5k} \Rightarrow H(z) = (1-z^{-1})\left(\frac{z}{z-1} - \frac{2\cdot z}{z-e^{-\frac{1}{2}}}\right)$

$= (1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2z}{z-0{,}61}\right) = (1-z^{-1})\cdot\frac{z-0{,}61-2z+2}{(1-z^{-1})(z-0{,}61)} = \frac{1{,}39-z}{z-0{,}61}$

SVAR