

Reglerteknik

Kurskod: SSY051 / SSY052

Tentamen 2025-01-09

Tid: 14:00-18:00

Lokaler: Johanneberg

Lärare: Bengt Lennartson, epost: bengt.lennartson@chalmers.se, tel: 0730 - 79 42 26

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 28 och 29 januari kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- Den formelsamling som ingår i slutet på tentamenstesen får också tas med på tentamen som ett formelblad i A4-format med tryckta (ej förminskade) formler på fram och baksida där även egna handskrivna anteckningar är tillåtna. Datorutskrifter förutom de ingående formelnerna och figurerna på formelbladet är ej tillåtna. Ett blad med enbart egna anteckningar är ej heller tillåtet.

Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola

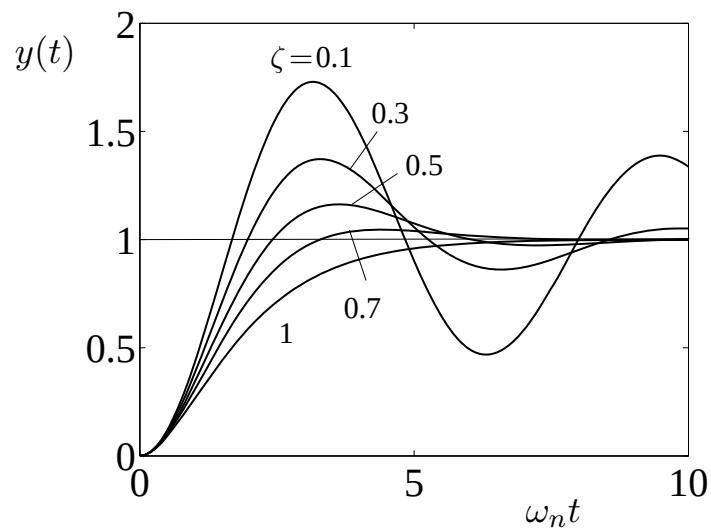


1

Relationen mellan insignalen och utsignalen för en process anges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

- a) Dimensionera två alternativa P-regulatorer för detta system så att det återkopplade systemet får en dämpning $\zeta = 0.5$ och 0.7 , samt uppskatta stigtiden t_r för det återkopplade systemet för de två fallen med hjälp av följande referensstegsvar. (2 p)



- b) Bestäm överkorsningsfrekvensen ω_c och fasmarginalen φ_m för kretsöverföringen $L(s)$ för de båda regulatorerna. (2 p)
- c) Baserat på ovanstående resultat, ange i en enkel mening samt ett enkelt matematiskt uttryck vilket approximativt samband som råder mellan
- stigtiden t_r och överkorsningsfrekvensen ω_c .
 - dämpningen ζ och fasmarginalen φ_m .
- (2 p)

2

2

En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

ska regleras med en PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

- a) Dimensionera PI-regulatorn för en godtycklig överkorsningsfrekvens ω_c så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. (3 p)
- b) Välj ω_c så att lågfrekventa laststörningar kompenseras så effektivt som möjligt. Optimum ligger i intervallet $1.2 < \omega_c < 1.6$. För full poäng krävs att föreslaget ω_c är mindre än 10% från optimalt värde. (2 p)

3

En process som ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K(s+1)^2}{s^3},$$

där parametern K antas vara positiv, ska regleras med en P-regulator $F(s) = K_p$.

- a) För vilka värden på förstärkningen K_p (som funktion av K) är det återkopplade systemet stabilt. (2 p)
- b) Välj specifikt K_p så att processförstärkningen K tillåts minska och öka med en faktor 2 innan det återkopplade systemet blir instabilt. (1 p)
- c) Bekräfta stabiliteten för det återkopplade systemet med hjälp av Nyquists generella stabilitetskriteriet för fallet $K = 1$ och den valda P-regulatorn i uppgift b). (2 p)

4

Betrakta den olinjära tillståndsmodellen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sqrt{x_1(t)} + x_2(t) \\ x_1(t)u(t) - 2x_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= [x_1^2(t) + u(t)x_2(t)] \end{aligned}$$

- a) Linjärisera denna tillståndsmodell vid en godtycklig arbetspunkt (jämviktspunkt) (x_{10}, x_{20}, u_0) . (2 p)
- b) Bestäm arbetspunkten som funktion av insignalens nivå u_0 . (1 p)
- c) För vilka värden på insignalen u_0 är den linjäriserade modellen stabil? (2 p)

5

En första ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

ska regleras med en tidsdiskret I-regulator som ges av överföringsfunktionen

$$F_d(z) = \frac{K_i h}{z-1}$$

För att åstadkomma detta diskretiseras processmodellen med samplingsintervallet $h = 0.1$ med antagandet att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal.

- a) Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion $G_d(z)$. (1 p)
- b) Bestäm integralförstärkningen K_i så att de båda polerna för det tidsdiskreta återkopplade systemet placeras som en dubbelpol. (3 p)

Lösning till tentamen i Reglerteknik

2025-01-09

BL

1. a) $L(s) = \frac{K_p}{s(s+1)}$ $G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} =$

$$= \frac{K_p}{s^2 + s + K_p} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = K_p, 2\zeta\omega_n = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{4\zeta^2} = \begin{cases} 1 & \zeta = 0.5 \\ 0.51 & \zeta = 0.7 \end{cases}$$

$$t_r = t_{y=0.9} - t_{y=0.1} = \begin{cases} 1.6 & \zeta = 0.5 \\ 3.0 & \zeta = 0.7 \end{cases}$$

b) $|L(j\omega_c)| = \frac{K_p}{\omega_c \sqrt{1+\omega_c^2}} = 1$ $\omega_c^2 + \omega_c^4 = K_p^2 = \frac{1}{16\zeta^4}$

$$\omega_c^4 + \omega_c^2 - \frac{1}{16\zeta^4} = 0 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16\zeta^4}}}$$

$$\angle L(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan \omega_c = -180^\circ + \phi_m$$

$$\phi_m = 90^\circ - \arctan \omega_c$$

ζ	K_p	ω_n	t_r	ω_c	ϕ_m	$\omega_c t_r$	$\frac{\phi_m}{\zeta}$
0.5	1	1	1.6	0.79	52°	1.26	104
0.7	0.51	0.71	3.0	0.46	65°	1.38	93

c) Minskad stigtid t_r ger

ökat ω_c , där $t_r \omega_c \approx 1.3$

Minskad dämpning ζ ger

lägre fasmargin ϕ_m ,

där $\phi_m \approx 100^\circ$

2.

$$a) G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2} \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{1+\omega^2} \quad \angle G(j\omega) = -2\arctan \omega$$

$$F_{PI}(j\omega) = K_i \frac{1+T_i j\omega}{j\omega} \quad |F_{PI}(j\omega)| = K_i \frac{\sqrt{1+(T_i \omega)^2}}{\omega}$$

$$\angle F_{PI}(j\omega) = -90^\circ + \arctan \omega T_i$$

$$\angle L(j\omega_c) = \angle G(j\omega_c) + \angle F_{PI}(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m \quad \varphi_m = 50^\circ$$

$$-2\arctan \omega_c - 90^\circ + \arctan \omega_c T_i = -180^\circ + 50^\circ = -130^\circ$$

$$\omega_c T_i = \tan(2\arctan \omega_c - 40^\circ)$$

$$|L(j\omega_c)| = |G(j\omega_c)| |F_{PI}(j\omega_c)| = \frac{K_i \sqrt{1+(\omega_c T_i)^2}}{\omega_c (1+\omega_c^2)} = 1$$

$$K_i = \frac{\omega_c (1+\omega_c^2)}{\sqrt{1+\tan^2(2\arctan \omega_c - 40^\circ)}}$$

b) Minimal $J_0 = \frac{1}{K_i} \Rightarrow$ maximal K_i

ω_c	1.3	1.36	1.4	1.5
K_i	1.486	1.493	1.490	1.456

Optimal $\omega_c = 1.36$

$$\Rightarrow K_i = 1.493$$

$$T_i = 1.762$$

$$3. a) L(s) = K_p G(s) = \frac{K_p K (s+1)^2}{s^3} = \frac{\bar{K} s^2 + 2\bar{K}s + \bar{K}}{s^3} \quad \bar{K} = K_p K$$

$$KE \quad s^3 + \bar{K}s^2 + 2\bar{K}s + \bar{K}$$

Routh-Hurwitz tabell

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2\bar{K} \\ s^2 & \bar{K} & \bar{K} \\ s^1 & 2\bar{K}^2 - \bar{K} & 0 \\ s^0 & \bar{K} & \end{array} \quad \text{stabilitetskrav}$$

$$\bar{K} > 0 \quad 2\bar{K} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \bar{K} > 0.5 \quad \therefore K_p > \frac{0.5}{K}$$

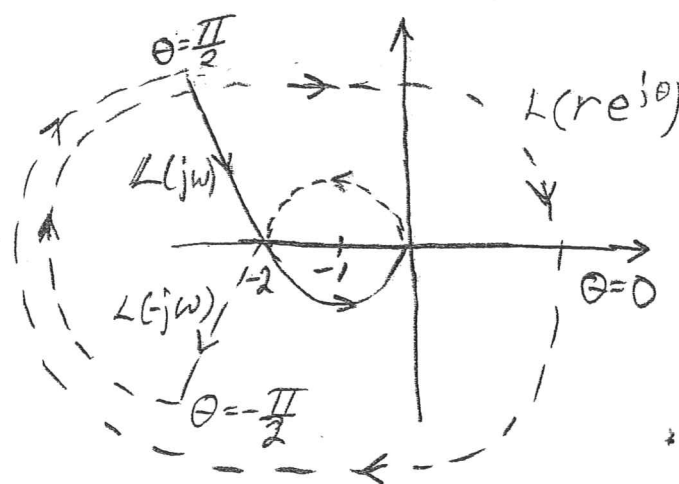
$$b) A_m K_p = \frac{0.5}{K} \Rightarrow K_p = \frac{0.5}{A_m K}$$

Kritiskt då förstärkningen K minskar med en faktor 2 $\Rightarrow A_m = 0.5$ och $K_p = 1/K$

$$c) K=1 \Rightarrow K_p=1 \quad L(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$$

$$L(j\omega) = \frac{(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3} = - \frac{1-\omega^2+2j\omega}{j\omega^3} = - \frac{2}{\omega^2} + j \frac{1-\omega^2}{\omega^3} = -2 \quad \omega=1$$

$$L(re^{j\theta}) \approx \frac{1}{(re^{j\theta})^3} = \frac{1}{r^3} e^{-j3\theta} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



$$= \begin{cases} \frac{1}{r^3} e^{j\frac{3}{2}\pi} & \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{r^3} & \theta = 0 \\ \frac{1}{r^3} e^{-j\frac{3}{2}\pi} & \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$N =$ en moturs +
en medurs omslingring
 $= 0$

$Z =$ antalet nollställen till KE i HHP =
 $= P + N = 0 + 0 = 0 \quad \therefore$ stabil

$$4. a) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) = -\sqrt{x_1} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) = x_1 u + 2x_2 \\ y &= g(x_1, x_2, u) = x_1^2 + u x_2 \end{aligned}$$

Linjärisering kring arbetspunkten
 (x_{10}, x_{20}, u_0)

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta x_2 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta u \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x_{10}}} \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{aligned}$$

$$\Delta x_2 = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta x_2 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta u = -u_0 \Delta x_1 - 2 \Delta x_2 + x_{10} \Delta u$$

$$\Delta y = \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta x_2 + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x_{10}, x_{20}, u_0)} \Delta u = 2x_{10} \Delta x_1 + u_0 \Delta x_2 + x_{20} \Delta u$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{x_{10}}} & 1 \\ -u_0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{10} \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = [2x_{10} \quad u_0] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + x_{20} \Delta u$$

b) Arbetspunkten

$$\begin{bmatrix} f_1(x_{10}, x_{20}, u_0) \\ f_2(x_{10}, x_{20}, u_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{x_{10}} + x_{20} \\ x_{10} u_0 - 2x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{10} = x_{20}^2 \quad 2x_{20} = x_{10} u_0 = x_{20}^2 u_0 \quad x_{20} = \frac{2}{u_0} \quad x_{10} = \frac{4}{u_0^2}$$

$$c) \quad A = \begin{bmatrix} -u_0/4 & 1 \\ -u_0 & -2 \end{bmatrix} \quad \det(sI_n - A) = \det \begin{bmatrix} s + u_0/4 & -1 \\ -u_0 & s + 2 \end{bmatrix}$$

$$= (s + u_0/4)(s + 2) - u_0 = s^2 + (2 + u_0/4)s - u_0/2$$

Stabilität då $2 + u_0/4 > 0$ och $-u_0/2 > 0 \quad \underline{\underline{-8 < u_0 < 0}}$

$$5. \quad a) \quad G_d(z) = \frac{1 - e^{-h}}{z - e^{-h}} \quad (h = 0.1) =$$

$$= \frac{10.0952}{z - 0.9048}$$

$$b) \quad L_d(z) = G_d(z) F_d(z) = \frac{\overbrace{0.0952K_i; 0.1}^{B_d(z)}}{\underbrace{(z - 0.9048)(z - 1)}_{A_d(z) = z^2 - 1.9048z + 0.9048}}$$

$$G_{ry}(z) = \frac{L_d(z)}{1 + L_d(z)} =$$

$$= \frac{B_d(z)}{A_d(z) + B_d(z)} = \frac{0.00952K_i}{z^2 - 1.9048z + 0.9048 + 0.00952K_i}$$

$$= \frac{B_d(z)}{(z - \alpha)^2} = \frac{B_d(z)}{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = 1.9048 & \alpha = 0.9524 \\ \alpha^2 = 0.9048 + 0.00952K_i \end{cases}$$

$$K_i = \frac{0.9524^2 - 0.9048}{0.00952} = 0.238$$