

Reglerteknik

Kurskod: SSY051

Tentamen 2024-11-01

Tid: 08:30-12:30

Lokaler: Johanneberg

Lärare: Bengt Lennartson, epost: bengt.lennartson@chalmers.se, tel: 0730 - 79 42 26

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 19 och 20 november kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- Den formelsamling som ingår i slutet på tentamenstesen får också tas med på tentamen som ett formelblad i A4-format med tryckta (ej förminskade) formler på fram och baksida där även egna handskrivna anteckningar är tillåtna. Datorutskrifter förutom de ingående formelnerna och figurerna på formelbladet är ej tillåtna. Ett blad med enbart egna anteckningar är ej heller tillåtet.

Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola

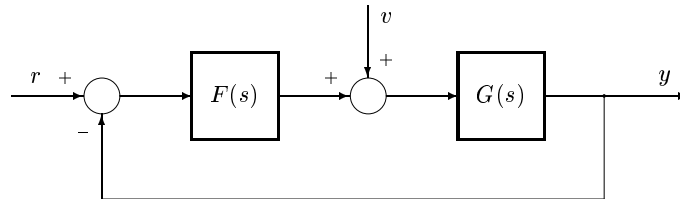


1

En instabil process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

ska regleras med en regulator $F(s)$ enligt följande blockschema för det återkopplade systemet



En student har lärt sig att man kan förkorta bort en pol med motsvarande nollställe och väljer därför regulatorn

$$F(s) = \frac{s-2}{s}$$

- Bestäm överföringsfunktionen $G_{ry}(s) = Y(s)/R(s)$ och skissera stegsvaret. (1 p)
- Bestäm överföringsfunktionen $G_{vy}(s) = Y(s)/V(s)$ och skissera stegsvaret. Kommentera det erhållna resultatet med avseende på stabilitet. (2 p)
- En alternativ och lämpligare reglerstrategi är att välja en styrfunktion $u = -K_p y + K_r r$, där K_p och K_r väljs så att samma överföringsfunktion och därmed stegsvar erhålls från referenssignalen r till utsignalen y som i uppgift a). Bestäm K_p och K_r så att detta resultat erhålls och visa speciellt att kvarstående fel undviks från r till y . (2 p)
- Bestäm motsvarande stegsvar från laststörningen v ($r = 0$) till utsignalen y för styrfunktionen och parametervärdena som bestämdes i uppgift c), och jämför resultatet med uppgift b). (1 p)

2

Ett fordon med en massa m drivs av en motorkraft F_d som också påverkas av ett vindmotstånd som är proportionellt mot kvadraten på fordonets hastighet y med en proportionalitetskonstant b , d.v.s. vindmotståndet är by^2 . Antag dessutom att motorns dynamik från gaspådraget u till drivkraften F_d ges av överföringsfunktionen

$$\frac{F_d(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+Ts}$$

- Formulera en olinjär tillståndsmoell för detta andra ordningens system. (2 p)
- Linjärisera kring en arbetspunkt där hastigheten $y_0 = 30$ m/s. (2 p)

2

3

En dubbelintegralprocess

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

ska regleras så att det återkopplade systemet får en önskad stabilitetsmarginal och snabbhet.

a) Dimensionera en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = \frac{K_i(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

så att fasmarginalen blir 45° och överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 1$ rad/s, vilket med approximationen $\omega_c t_r \approx 1$ innebär att det återkopplade systemets stegsvar från referenssignal till processens utsignal har en stigtid på c:a 1 sekund. Välj $\beta = 15$. (3 p)

b) Denna deluppgift är något krävande, men den som kan robust stabilitet löser uppgiften på 2-3 rader. En PID_f -regulator

$$F_{PID_f}(s) = \frac{K_i(1 + s\tau)^2}{s(1 + 2\zeta_f s\tau/\beta + (s\tau/\beta)^2)}$$

där det första ordningens lågpasfilter i PID-regulatorn har ersatts med ett andra ordningens lågpasfilter i PID_f -regulatorn, får för samma parametrar som i PID-regulatorn och $\zeta_f = 0.5$ approximativt samma fasmarginal och överkorsningsfrekvens. Detta betyder att förmågan att hantera laststörningar ($J_v = 1/K_i$) och stabilitetsmarginalen (fasmarginen φ_m) är likvärdiga, medan högfrekvensegenskaperna skiljer sig åt.

Utvärdera därför en högfrekvent resonant osäkerhet som multipliceras med den nominella modellen $G(s)$ så att det verkliga systemet representeras av överföringsfunktionen $G_0(s) = G(s)G_r(s)$ där

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + 0.02s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

Den multiplikativa osäkerheten $\Delta_G(s) = G_r(s) - 1$ har en resonanstopp $\max_\omega |\Delta_G(j\omega)| = 50$, vilken inträffar vid frekvensen ω_n . Vilken är den minsta resonansfrekvens som tolereras innan det återkopplade systemet blir instabilt för PID respektive PID_f regulatorn, enligt det robusta stabilitetskravet

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|}, \quad \forall \omega$$

där $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ antas kunna approximeras med $L(s)$ vid resonansfrekvensen ω_n , och de båda regulatorerna kan approximeras med respektive regulators högfrekvensasymptot vid ω_n . (2 p).

4

Betrakta överföringsfunktionen

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+2)}U(s)$$

- a) Bilda en tillståndsmodell med utsignalen y och dess derivata $\dot{y}$ som tillståndsvariabler. (1 p)
- b) Bestäm tillståndsåterkopplingsmatrisen L_u och den statiska förstärkningen K_r i styrlagen

$$u = -L_u x + K_r r$$

där r är referenssignalen och x är tillståndsvektorn, så att en önskad polplacering erhålls, representerad av polynomet $(s + \alpha)^2$.

(3 p)

- c) Bestäm styrsignalaktiviteten i form av högfrekvensförstärkningen från referenssignalen till styrsignalen, d.v.s. $K_\infty = G_{ru}(\infty)$. Kommentera nivån på denna förstärkning i förhållande till den önskade polplaceringen. (1 p)

5

En process

$$G(s) = \frac{e^{-sT_d}}{s}$$

ska regleras med en tidsdiskret regulator. Antag att samplingsintervallets längd h är densamma som transportfördröjningen h , d.v.s. $h = T_d$.

- a) Bilda en motsvarande tidsdiskret överföringsfunktion då insignalen antas vara styckvis konstant mellan samplingstidpunkterna. (2 p)
- b) Bestäm förstärkningen K_p för regulatorn

$$F_d(z) = \frac{K_p z}{z + 1}$$

så att det återkopplade systemets båda poler placeras i origo. (2 p)

- c) Bestäm processens utsignal $y(kh)$ då referenssignalen $r(kh)$ är stegformad. Kommentera möjligheten att åstadkomma ett motsvarande stegsvar med en tidskontinuerlig reglerfunktion. (1 p)

Lösning till tentamen i Reglerteknik 241101

1. a) $G(s) = \frac{1}{s-2}$ $L(s) = \frac{1}{s}$ $G_{ry}(s) = \frac{L}{1+L} = \frac{1}{s+1}$

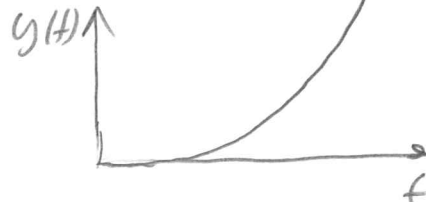
$R(s) = \frac{1}{s}$ $Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$ $y(t) = 1 - e^{-t}$



b) $G_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{1}{(s-2)\left(1+\frac{1}{s-2} \cdot \frac{s-2}{s}\right)} =$
 $= \frac{1}{s-2 + (s-2)/s} = \frac{s}{(s-2)(s+1)}$ $V(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = \frac{s}{(s-2)(s+1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1/3}{s-2} - \frac{1/3}{s+1}$

$y(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$



Instabilt eftersom den instabila polen ej förkortas bort i $G_{ry}(s)$

c) $Y = \frac{1}{s-2}(-K_p Y + K_r R)$ (*) stabilt system eftersom den instabila polen drägs in i VHF

$(s-2+K_p)Y = K_r R \Rightarrow G_{ry}(s) = \frac{K_r}{s-2+K_p}$

$= \frac{1}{s+1} = G_{ry} \text{ i uppg a)} \Rightarrow K_p = 3, K_r = 1$

$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow y(t) \rightarrow 1 \text{ då } r = \mathcal{U}(t)$

d) $Y = \frac{1}{s-2}(-K_p Y + V) \Rightarrow (s-2+K_p)Y = V \Rightarrow Y = \frac{1}{s+1}V$

$V(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \quad y(t) = 1 - e^{-t} \quad (*)$

$$2. \quad \begin{cases} m\dot{y} = F_d - by^2 \\ F_d + T\dot{F}_d = Ku \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m}y^2 + \frac{1}{m}F_d \\ -\frac{1}{T}F_d + \frac{K}{T}u \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y} &= -\frac{2b}{m}y_0 \Delta y + \frac{1}{m} \Delta F_d & \Delta y &= y - y_0 \\ \Delta \dot{F}_d &= -\frac{1}{T} \Delta F_d + \frac{K}{T} \Delta u & \Delta F_d &= F_d - F_{d0} \\ & & \Delta u &= u - u_0 \end{aligned}$$

Arbetspunkt $y_0 = 30 \text{ m/s}$ $\dot{y}_0 = \dot{F}_{d0} = 0$

$$F_{d0} = by_0^2 \quad u_0 = \frac{1}{K} F_{d0} = \frac{by_0^2}{K}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{60b}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta F_d \end{bmatrix}$$

3. g) $G(s) = \frac{1}{s^2}$ $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ $|G(j\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c^2} = 1$
eftersom $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = \angle G(j\omega_c) + \varphi_m - 180^\circ = 180^\circ + 45^\circ - 180^\circ$$

Enligt formelblad kurvskärar PID $= 45^\circ$

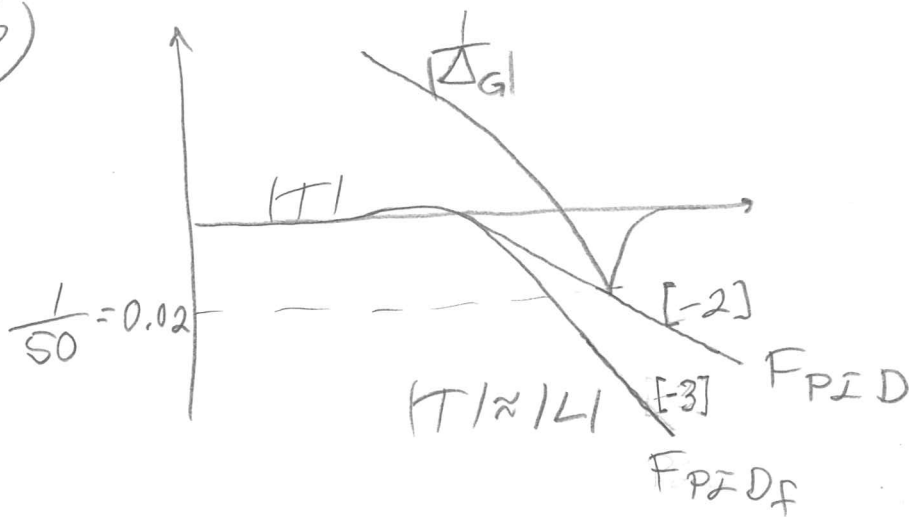
$$\omega_c T = 3.5 \text{ för } \beta = 15 \Rightarrow \angle F_{PID} = 45^\circ \Rightarrow T = 3.5$$

$$K_{\infty} |G(j\omega_c)| = 4.1 \quad \Rightarrow K_{\infty} = 4.1$$

$$K_i = \frac{K_{\infty}}{T\beta} = 0.078$$

$$F_{PID}(s) = \frac{0.078(1+3.5s)^2}{s(1+3.5s/15)}$$

3b)



$$T = \frac{L}{1+L} \approx L$$

för höga
frekvenser

PID

$$|L| = |G| |F_{PID}| = \frac{K_{\infty}}{\omega^2} \quad \text{för stora } \omega$$

Robust stabilitet:

$$|T| \approx |L| < \frac{1}{|\Delta G|} = \frac{1}{50} \quad \text{vid } \omega = \omega_n$$

Krav vid $\omega = \omega_n$ (resonansfrekvensen)

$$|G| |F_{PID}| = \frac{K_{\infty}}{\omega_n^2} < \frac{1}{50} \Rightarrow \omega_n > \sqrt{50 K_{\infty}} = 14.3 \text{ rad/s}$$

PID_f

$$F_{PIDf}(s) = \frac{K_i (sT)^2}{s (sT/\beta)^2} = \frac{K_i \beta^2}{s} \quad \text{för stora } s$$

Robust stabilitet:

$$|T| \approx |L| < \frac{1}{|\Delta G|} = \frac{1}{50} \quad \text{vid } \omega = \omega_n$$

Krav vid $\omega = \omega_n$

$$|G| |F_{PIDf}| = \frac{K_i \beta^2}{\omega_n^2 \omega_n} < \frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow \omega_n > (50 K_i \beta^2)^{1/3} = 9.6 \text{ rad/s}$$

$$4. a) \dot{y} = u \quad \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_B u$$

$$\dot{v} + 2v = 3u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$$

$$b) u = -\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_{L_u} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + K_r r$$

$$\det(sI_n - A + BL_u) = \det\left(\underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}_{sI_n - A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_{L_u}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3l_1 & s+2+3l_2 \end{bmatrix} = s^2 + (2+3l_2)s + 3l_1$$

$$= (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{\alpha^2}{3} \\ l_2 = \frac{2\alpha-2}{3} \end{cases}$$

$$G_{ry}(s) = C(sI_n - A + BL_u)^{-1}BK_r =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2+3l_2 & 1 \\ -3l_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3K_r \end{bmatrix}}{s^2 + (2+3l_2)s + 3l_1} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3K_r \\ 3K_r s \end{bmatrix}}{\dots} = \frac{3K_r}{s^2 + (2+3l_2)s + 3l_1}$$

$$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow 3K_r = 3l_1 \Rightarrow K_r = l_1 = \frac{\alpha^2}{3}$$

$$g) G_{ru}(s) = -L_u(sI_n - A + BL_u)^{-1}BK_r + K_r$$

$$u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G_{ru}(s) \left(\frac{1}{s}\right)^{\checkmark R(s)} = G_{ru}(\infty) = K_r = \frac{\alpha^2}{3}$$

$\therefore u(0)$ växer kvadriskt med α , dvs dubbel-polens avstånd från origo.

$$5. a) G(s) = \frac{e^{-sh}}{s}$$

$$G_d(z) = \frac{h z^{-1}}{z-1} = \frac{h}{z(z-1)}$$

$$b) L_d(z) = G_d(z) F_d(z) = \frac{h K_p z}{z(z-1)(z+1)} = \frac{h K_p}{\underbrace{(z-1)(z+1)}_{z^2-1}}$$

$$G_{ryd}(z) = \frac{L_d(z)}{1 + L_d(z)} = \frac{h K_p}{z^2 - 1 + h K_p} = \frac{1}{z^2}$$

$$\text{d} \ddot{a} \quad K_p = \frac{1}{h}$$

$$c) Y(z) = G_{ryd}(z) R(z)$$

$$z^2 Y(z) = R(z)$$

$$y(kh+2h) = r(kh) \quad r(kh) = r_0 \quad k \geq 0$$

$$y(0) = y(h) = 0 \quad y(kh) = r_0 \quad k \geq 2$$



Perfekt reglering
efter två samplings-
intervall.

Ett sådant stegsvar går ej
att åstadkomma mha ett kontinuerligt
reglersystem, men uppenbarligen
mha en tidsdiskret reglerfunktion.