

Reglerteknik

Kurskod: SSY051

Tentamen 2023-10-24

Tid: 14:00-18:00

Lärare: Bengt Lennartson, tel: 0730-794226

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 10 och 11 november kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- De fyra formelblad som ingår i tentamenstesen får också tas med på tentamen och då inkluderande egna handskrivna anteckningar på fram och baksida på de fyra formelbladen, dvs sammanlagt åtta A4-sidor. Datorutskrifter förutom de ingående formlerna och figurerna på de fyra formelbladen är ej tillåtna.

Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola



1

En integralprocess

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

ska regleras med en P-regulator $F(s) = K_p$ så att det återkopplade systemet får en önskad snabbhet.

Bestäm kretsöverföringen $L(s)$ och det återkopplade systemets överföringsfunktion $G_{ry}(s)$. Snabbheten kan mätas både i tids- och frekvensplanet. Bestäm överkorsningsfrekvensen ω_c , bandbredden för det återkopplade systemet ω_b , det återkopplade systemets tidskonstant T , samt insvängningstiden $t_{5\%}$. Kommentera speciellt relationen mellan det återkopplade systemets snabbhet och frekvenserna ω_c och ω_b . (3 p)

2

En tredje ordningens process ska regleras med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)(1 + s)^2}$$

a) Dimensionera först en PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. Välj $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$ där $\angle G(\omega_{G150}) = -150^\circ$. Detta ger en nära nog optimal PI-regulator i meningen att laststörningar kompenseras effektivt samtidigt som rimliga stabilitetsmarginaller upprätthålls. (2 p)

Förenkling med poängavdrag: Om du inte kan bestämma ω_{G150} , så kan du välja $\omega_c = 0.6 \text{ rad/s}$.

b) Dimensionera som ett alternativ en PID-regulator

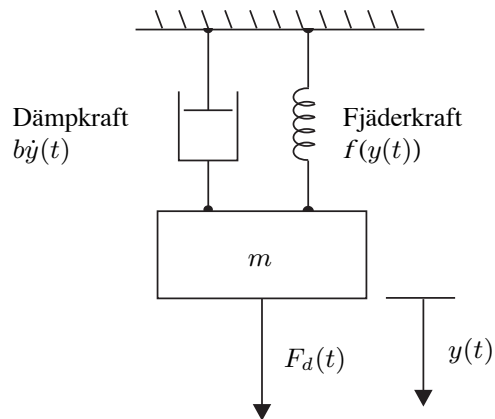
$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

med samma fasmarginal $\varphi_m = 50^\circ$ men 50% högre överkorsningsfrekvens, d.v.s. $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$ (alternativt vid förenkling $\omega_c = 0.9 \text{ rad/s}$). Välj $\zeta = 1$ och $\beta = 10$. (2 p)

c) Kommentera skillnaderna i förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen genom att studera kriterierna $J_v = 1/K_i$ och $J_u = F(\infty)$. (1 p)

2

3



En massa med vikten m och positionen $y(t)$ drivs enligt figuren av en drivande kraft $F_d(t)$. Via fjädern utsätts massan också för dämpkraften $b\dot{y}(t)$ och den olinjära fjäderkraften

$$f(y(t)) = k|y(t)|y(t)$$

Den drivande kraften $F_d(t)$ genereras via en hydraulisk motor med överföringsfunktionen

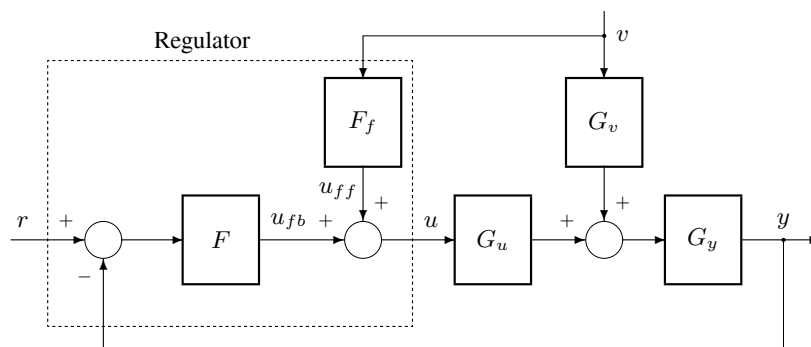
$$F_d(s) = \frac{K_m}{1 + \tau s} U(s)$$

Motorns uppgift är att positionera massan m vid positionen $y = y_0$.

- Formulera en olinjär tillståndsmodell som beskriver fjäder-massasystemets rörelse inklusive den hydrauliska motorn med $u(t)$ som insignal och massans position $y(t)$ som utsignal. (2 p)
- Bestäm en linjär tillståndsmodell som beskriver avvikelser kring den önskade positionen $y = y_0$. (2 p)

4

En process med en osäker förstärkningsparameter K_0 styrs med både fram- och återkoppling enligt följande blockschema



där

$$G_y(s) = \frac{4}{1 + 3s} \quad G_u(s) = \frac{K_0}{1 + 2s} \quad G_v(s) = 1 \quad F(s) = \frac{K_i}{s}$$

Förmågan att dämpa lågfrekventa laststörningar $v(t)$ ska undersökas då framkoppling ingår, jämfört med situationen då enbart återkoppling utnyttjas.

- Bestäm frekvensfunktionens belopp som funktion av K_i , K_0 och ω för det återkopplade systemet från laststörningen v till utsignalen y för låga frekvenser (lågfrekvensasymptoten) då enbart återkoppling ingår, d.v.s. $F_f = 0$. (1 p)
- Bestäm en statisk framkoppling F_f då förstärkningen i G_u antas ha det nominella värdet K , medan det verkliga värdet K_0 är osäkert på grund av variationer i processmodellen. (1 p)
- Bestäm samma lågfrekvensasymptot som i uppgift a) då även framkopplingen F_v från uppgift b) ingår. (1 p)
- Bestäm kvoten mellan de båda lågfrekvensasymptoterna då framkoppling ingår jämfört med fallet utan framkoppling. (1 p)
- För vilka värden på förstärkningen K_0 ger framkopplingen en positiv inverkan på förmågan att dämpa störningar, jämfört med fallet då endast återkoppling ingår. Antag att förstärkningarna K_0 och K är positiva. (1 p)

4

5

En instabil kemisk process som ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K}{s-1}$$

ska stabiliseras med en PI-regulator

$$F(s) = \frac{K_i(1+s)}{s}$$

- a) Bestäm integralförstärkningen K_i så att processens nominella förstärkning $K = 1$ kan variera med en faktor 3 (uppåt och nedåt) innan det återkopplade systemet blir instabilt. (2 p)
- b) Bekräfta med hjälp av Nyquists generella stabilitetskriteriet stabiliteten för det återkopplade systemet för den nominella processförstärkningen $K = 1$ med den valda integralförstärkningen K_i i uppgift a). Om ingen lösning erhålls på uppgift a) kan denna deluppgift lösas för värdet $K_i = 2$. (3 p)

6

En regulator ska dimensioneras för en farthållare, där fordonets överföringsfunktion är

$$\frac{Y(s)}{F_m(s)} = \frac{2}{1+5s}.$$

Kraften från motorn F_m ges av överföringsfunktionen

$$\frac{F_m(s)}{U(s)} = \frac{5}{1+s}.$$

- a) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -L_u x + K_r r$$

då hastigheten y och motorkraften F_m är mätbara signaler som återkopplas i regulatorn. Välj en polplacering så att det återkopplade systemets båda poler hamnar i $s = -\alpha$. (3 p)

- b) Kommentera styrsignalaktivitetens koppling till valet av polplacering. (1 p)

Tentamen Reglerteknik 2023-10-24

$$1 \quad L(s) = K_p/s \quad G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p/s}{1+K_p/s} = \frac{K_p}{s+K_p}$$

$$|L(j\omega_c)| = \frac{K_p}{\omega_c} = 1 \Rightarrow \omega_c = K_p$$

$$|G_{ry}(j\omega_b)| = \frac{K_p}{\sqrt{K_p^2 + \omega_b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2K_p^2 = K_p^2 + \omega_b^2$$

$$\therefore \omega_b = \omega_c = K_p$$

Stegsvar

$$Y(s) = \frac{K_p}{s+K_p} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+K_p} = \frac{As + AK_p + Bs}{s(s+K_p)}$$

$$\Rightarrow A=1, A+B=0 \Rightarrow B=-1$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+K_p}\right\} = (1 - e^{-K_p t}) \mathcal{U}(t)$$

$$y(t_{5\%}) = 1 - e^{-K_p t_{5\%}} = 0.95$$

$$\frac{1}{e^{K_p t_{5\%}}} = 0.05 = \frac{1}{20} \Rightarrow t_{5\%} = \frac{\ln 20}{K_p} =$$

$$G_{ry}(s) = \frac{1}{1+s/K_p} \Rightarrow T = 1/K_p = 3.00/K_p$$

Ökat K_p leder till ökat $\omega_c \hat{=} \omega_b$
men minskat värde på $t_{5\%} \hat{=} T$

För detta specifika exempel gäller

$$t_{5\%} = \frac{3.00}{\omega_c} = \frac{3.00}{\omega_b} \quad T = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{\omega_b}$$

dvs ökad snabbhet (mindre tidspåsam.)

$\Leftrightarrow$ högre frekvensparam. $\omega_c \hat{=} \omega_b$

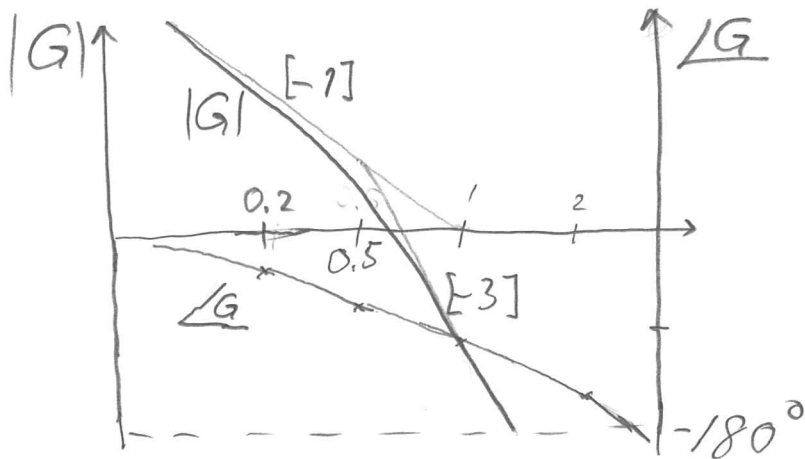
$$2. \quad a) \quad G(j\omega) = \frac{1}{(1+j0.5\omega)(1+j\omega)^2} \quad \left| \quad F_{PI}(j\omega) = \frac{K_i(1+j\omega T_i)}{j\omega} \right.$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+0.25\omega^2} (1+\omega^2)}$$

$$|F_{PI}| = \frac{K_i \sqrt{1+(\omega T_i)^2}}{\omega}$$

$$\angle F_{PI} = -90^\circ + \arctan \omega T_i$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctan(0.5\omega) - 2\arctan \omega$$



ω	$\angle G$
0.2	-28°
0.5	-67°
1	-117°
2	-172°
1.51	-150.0

$\uparrow$
 ω_{G150}

$$PI \quad \omega_c = 0.4 \omega_{G150} = 0.4 \cdot 1.51 = 0.60 \text{ rad/s}$$

$$|G(j\omega_c)| = 0.704 \quad \angle G(j\omega_c) = -78.6^\circ$$

$$\angle F_{PI}(j\omega_c) = -\angle G(j\omega_c) + \phi_m - 180^\circ = -51.4^\circ$$

$$= -90^\circ + \arctan \omega_c T_i \Rightarrow T_i = \frac{1}{\omega_c} \tan 38.6^\circ = 1.33$$

$$|F_{PI}(j\omega_c)| |G(j\omega_c)| = \frac{K_i \sqrt{1+(\omega_c T_i)^2}}{\omega_c} \cdot 0.704 = 1$$

$$\Rightarrow K_i = \frac{0.60}{\sqrt{1+(0.60 \cdot 1.33)^2} \cdot 0.704} = 0.666$$

$$K_{\infty} = K_p = K_i T_i = 0.666 \cdot 1.33 = 0.886$$

PID b) $\omega_c = 1.5 \cdot \omega_{G150} = 0.90 \text{ rad/s}$

$$|G(j\omega_c)| = 0.504 \quad \angle G(j\omega_c) = -108.2^\circ$$

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -\angle G(j\omega_c) + \varphi_m - 180^\circ = -21.8^\circ$$

Enligt figurerna i FS S3 gäller för $\beta=10$

$$\omega_c \tau = 0.73 \Rightarrow \tau = 0.73 / 0.90 = 0.813$$

$$K_{\infty} |G(j\omega_c)| = 4.8 \Rightarrow K_{\infty} = 4.8 / 0.504 = 9.52$$

$$K_i \tau \beta = K_{\infty} \Rightarrow K_i = \frac{K_{\infty}}{\tau \beta} = \frac{9.52}{8.13} = 1.17$$

c) $\gamma_0 = \frac{1}{K_i}$ förbättras med en faktor $\frac{0.666}{1.17} = 0.57$

dvs drygt 40% till priset av

en ökning av $\gamma_u = K_{\infty}$ med en faktor

$$\frac{9.52}{0.886} = 10.7 \text{ dvs drygt 10 gånger}$$

3. a) $\dot{y} = v$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}(F_d - k|y|y - b v)$$

$$(1+s)F_d(s) = K_m U(s) \Rightarrow F_d + \tau \dot{F}_d = K_m U$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{k}{m}|y|y - \frac{b}{m}v + \frac{1}{m}F_d \\ -\frac{1}{\tau}F_d + \frac{1}{\tau}K_m U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(y, v, F_d, u) \\ f_2(y, v, F_d, u) \\ f_3(y, v, F_d, u) \end{bmatrix}$$

b) Arbetspunkt $y = y_0 \Rightarrow v_0 = \dot{y}_0 = 0$

$$K_m u_0 = F_{d0} = k|y_0|y_0 = \begin{cases} k y_0^2 & y_0 \geq 0 \\ -k y_0^2 & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

Linjärisering kring

$$x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ F_{d0} \end{bmatrix} \quad u_0 = \frac{F_{d0}}{K_m}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y}(|y|y) \right|_{y=y_0} = \begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right|_{y=y_0} & y_0 > 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right|_{y=y_0} & y_0 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2y_0 & y_0 > 0 \\ -2y_0 & y_0 < 0 \end{cases} = 2|y_0|$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{v} \\ \Delta \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2k}{m}|y_0| & -\frac{b}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta v \\ \Delta F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m/\tau \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta v \\ \Delta F_d \end{bmatrix}$$

4. a) $G_{uy} = \frac{G_u G_y}{1+L}$, $L = G_y G_u F = \frac{4}{1+3s} \frac{K_o}{1+2s} \frac{K_i}{s}$

För små $s=j\omega$ gäller då att ($G_u=1$)

$$G_{uy} \approx \frac{4}{1+4K_o K_i / s} \approx \frac{4s}{4K_o K_i} = \frac{s}{K_o K_i}$$

$$|G_{uy}(j\omega)| \approx \frac{\omega}{K_o K_i}$$

b) $G_{uy} = \frac{G_y (G_u + G_u F_f)}{1+L} \approx \frac{4(1+K_o F_f)}{1+4K_o K_i / s}$

Med nominell förstärkning K i G_u i stället för K_o erhålls för små s

$$G_{uy} \approx \frac{4(1+K F_f)}{1+4K K_i / s}$$

statistisk framkoppling $\Rightarrow F_f = -\frac{1}{K}$

c) För en godtycklig förstärkning K_o i G_u erhålls då för små s

$$G_{uy} \approx \frac{4(1-K_o/K)}{1+4K_o K_i / s} \approx \frac{s(1-K_o/K)}{K_o K_i}$$

$$|G_{uy}(j\omega)| \approx \frac{\omega(1-K_o/K)}{K_o K_i} = \frac{\omega(K-K_o)}{K K_o K_i}$$

d) $\frac{|G_{uy}|_{FF+FB}}{|G_{uy}|_{FB}} = \frac{\omega(K-K_o)}{K K_o K_i} \cdot \frac{K_o K_i}{\omega} = \frac{K-K_o}{K}$

e) $|K-K_o| < K \Rightarrow$ positivt bidrag då framkoppling utnyttjas $\Leftrightarrow K_o < 2K$

$$5. a) G(s) = \frac{K}{s-1} \quad F(s) = \frac{K_i(1+s)}{s} \quad L(s) = \frac{KK_i(1+s)}{s(s-1)}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{KK_i(1+s)}{s(s-1) + KK_i(1+s)} = \frac{KK_i(1+s)}{s^2 + (KK_i-1)s + KK_i}$$

Routh - Hurwitz

$$s^2 \quad 1 \quad KK_i \quad \text{stabil} \text{ d} \ddot{o} \quad KK_i > 1$$

$$s^1 \quad KK_i - 1 \quad 0$$

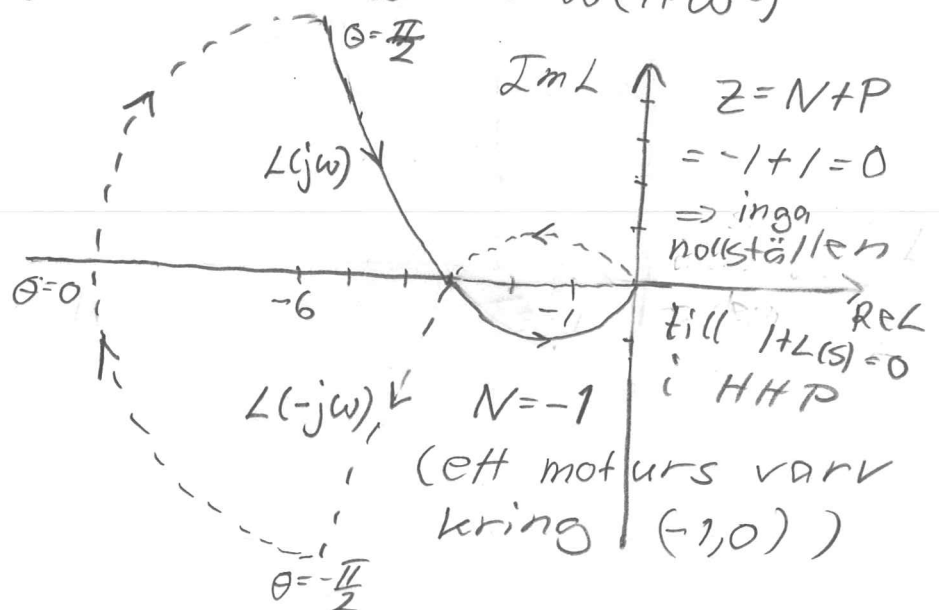
$$s^0 \quad KK_i$$

$K_i = 3 \Rightarrow$ K kan minska
från $K=1$ till $K=1/3$
innan det återkopplade
systemet blir instabilt.

$$b) K=1 \text{ o } K_i=3 \Rightarrow L(s) = \frac{3(1+s)}{s(s-1)}$$

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{3(1+j\omega)(-j\omega-1)}{j\omega(j\omega-1)(-j\omega-1)} = \frac{-3(1+j\omega)^2}{j\omega(1+\omega^2)} = \\ &= \frac{-3(1+2j\omega-\omega^2)}{j\omega(1+\omega^2)} = -\frac{6}{1+\omega^2} + j \frac{3(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)} \end{aligned}$$

ω	$\text{Re}(L)$	$\text{Im}(L)$
0	-6	∞
0.5	-4.8	3.6
1	-3	0
2	-1.2	-0.9
∞	0	0

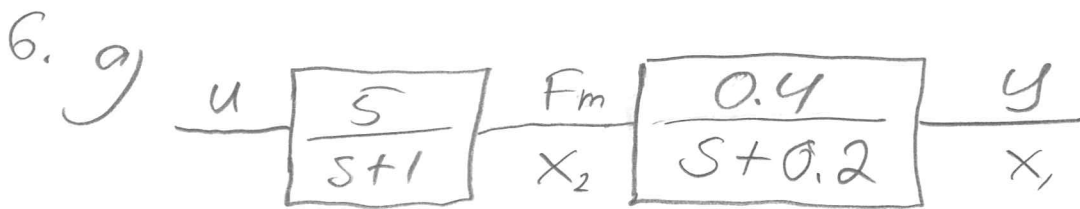


$L(s)$ för små s

$$\approx -3/s$$

$$L(re^{j\theta}) \approx -\frac{3}{re^{j\theta}} = -\frac{3}{r}e^{-j\theta} = \frac{3}{r}e^{j(\pi-\theta)}$$

θ	$\pi - \theta$
$-\pi/2$	$3\pi/2$
0	π
$\pi/2$	$\pi/2$



$$(s+0.2)x_1(s) = 0.4x_2(s)$$

$$(s+1)x_2(s) = 5U(s)$$

Inverstransformering

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.2x_1 + 0.4x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 5u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_B u$$

$$\det(sI_n - A + BL_u) =$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} s+0.2 & -0.4 \\ 5l_1 & s+1+5l_2 \end{bmatrix} =$$

$$u = \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_{L_u} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + k_r r$$

$$= s^2 + (0.2 + 1 + 5l_2)s + 0.2 + l_2 + 2l_1 = (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$$

$$2\alpha = 1.2 + 5l_2 \Rightarrow \underline{l_2} = 0.2(2\alpha - 1.2) = \underline{0.4\alpha - 0.24}$$

$$\alpha^2 = 0.2 + l_2 + 2l_1 \Rightarrow \underline{l_1} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 0.2 - 0.4\alpha + 0.24) =$$

$$G_{ry}(s) = C(sI_n - A + BL_u)^{-1}BK_r = \underline{\underline{0.5\alpha^2 - 0.2\alpha + 0.02}}$$

$$= \frac{[1 \ 0] \begin{bmatrix} s+1+5l_2 & 0.4 \\ -5l_1 & s+0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5K_r \end{bmatrix}}{(s+\alpha)^2} = \frac{2K_r}{(s+\alpha)^2}$$

$$G_{ry}(0) = 2K_r/\alpha^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{K_r = 0.5\alpha^2}}$$

b) $G_{ru}(s) = -L_u(sI_n - A + BL_u)^{-1}BK_r + K_r$ $U(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \overbrace{G_{ru}(s)}^{U(s)} \underbrace{\frac{1}{s}}_{\frac{1}{R(s)}}$

$$= K_r = 0.5\alpha^2, \text{ dvs } K_r \text{ växer kvadratisk med } \alpha. \text{ snabbheten växer linjärt med } \alpha.$$