

Reglerteknik

Kurskod: SSY051

Tentamen 2022-10-25

Tid: 14:00-18:00

Lärare: Bengt Lennartson, tel: 0730-794226

Tentamen omfattar 25 poäng, där betyg tre fordrar 10 poäng, betyg fyra 15 poäng och betyg fem 20 poäng.

Granskning av rättning sker den 10 och 11 november kl 12:30-13:00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Bodediagram (ingår längst bak i tentamenstesen).
- Matematiska och fysikaliska tabeller, t ex Beta och Physics handbook.
- Valfri kalkylator med tömt minne.
- De fyra formelblad som ingår i tentamenstesen får också tas med på tentamen och då inkluderande egna handskrivna anteckningar på fram och baksida på de fyra formelbladen, dvs sammanlagt åtta A4-sidor. Datorutskrifter förutom de ingående formlerna och figurerna på de fyra formelbladen är ej tillåtna.

Institutionen för elektroteknik
Avdelningen för system- och reglerteknik
Chalmers tekniska högskola



1

En fjärde ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^4}$$

ska regleras.

a) Dimensionera först en PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s}$$

för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. Välj $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$ där $\angle G(\omega_{G150}) = -150^\circ$. Detta ger en nära nog optimal PI-regulator i meningen att laststörningar kompenseras effektivt samtidigt som rimliga stabilitetsmarginaler upprätthålls.

(2 p)

b) Dimensionera som ett alternativ en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

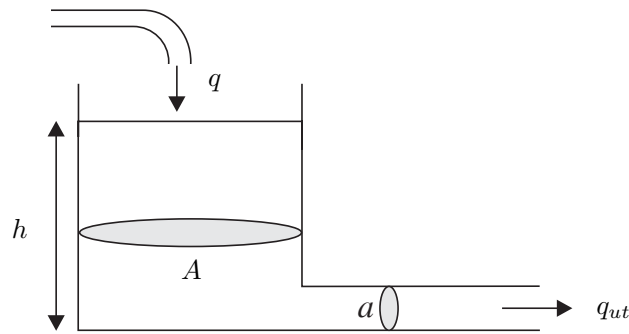
med samma fasmarginal $\varphi_m = 50^\circ$ men 50% högre överkorsningsfrekvens, d.v.s. $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$. Välj $\zeta = 1$ och $\beta = 10$.

(2 p)

c) Kommentera skillnaderna i förmågan att kompensera lågfrekventa laststörningar och känsligheten för högfrekventa mätstörningar i styrsignalen genom att studera kriterierna $J_v = 1/K_i$ och $J_u = F(\infty)$.

(1 p)

Höjden h i en vattentank med fritt utflöde ska regleras då inflödet q varierar. Antag att tankens area $A = 1 \text{ m}^2$, utloppsarean $a = 0.1 \text{ m}^2$, och att gravitationskonstanten g approximeras till 10 m/s^2 . Enligt Bernoullis lag gäller dessutom att utströmningshastigheten $v = \sqrt{2gh}$, vilket ger utflödet $a\sqrt{2gh}$.



- a) Formulera med hjälp av en volymbalans den olinjära tillståndsmodell som bestämmer höjden h i tanken med flödet q som insignal. Visa att den linjäriserade modellen för denna olinjära process med ett inflöde q_0 blir

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{s + 0.1/q_0} \quad (2 \text{ p})$$

- b) Antag att ventilen som styr inflödet till tanken har en överföringsfunktion

$$G_q(s) = \frac{1}{s + 1},$$

och dimensionera med hjälp av Routh-Hurwitz kriterium en I-regulator

$$F(s) = \frac{K_i}{s}$$

så att det återkopplade systemet för flödet $q_0 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ får en amplitudmarginal $A_m = 2$. Notera att kretsöverföringen $L(s) = G(s)G_q(s)F(s)$. (2 p)

- c) Hur mycket kan flödet q_0 öka innan det återkopplade systemet blir instabilt för den i uppgift b) dimensionerade integralförstärkningen K_i ? (1 p)

3

För en process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

ska en P-regulator kompletteras med ett referenssignalfilter som ger snabbare respons vid referenssignaländringar.

- a) Dimensionera en P-regulator så att det återkopplade systemets poler hamnar i $s = -0.5$. Visa att det återkopplade systemets överföringsfunktion $G_{ry}(s)$ från referenssignalen r till utsignalen y utan referenssignalfilter blir

$$G_{ry}(s) = \frac{1}{(1+2s)^2} \quad (2 \text{ p})$$

- b) Välj ett referenssignalfilter $F_r(s)$ så att responsen vid referenssignaländringar snabbas upp med en faktor fyra, genom att exempelvis välja $F_r(s)$ så att

$$G_{ry}(s) = \frac{1}{(1+0.5s)^2} \quad (1 \text{ p})$$

- c) Bestäm styrsignalen $u(0)$ vid stegändringar i referenssignalen med och utan referenssignalfiltret. Hur mycket ökar $u(0)$ i förhållande till den resulterande snabbhetsökningen. (2 p)

4

En döttidsprocess $G(s) = e^{-sT_d}$ ska regleras med en tidsdiskret I-regulator

$$F_d(z) = K_i \frac{z}{z-1}$$

- a) Diskretisera processmodellen med ett samplingsintervall $h = 0.5T_d$, vilket ger en tidsfördröjning på två sampel. (1 p)
- b) Bestäm I-regulatorns förstärkning så att det återkopplade systemets poler hamnar i en dubbelpol i $z = 0.5$. (2 p)
- c) Bestäm utsignalen för det återkopplade systemet $y(kh)$ för $k = 0, 1, 2$, och 3 samt $k = \infty$ då referenssignalen är ett enhetssteg. (2 p)

En regulator för en första ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

ska dimensioneras.

- a) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -L_u x + K_r r$$

så att det återkopplade systemets pol hamnar i $s = -\alpha$. Bestäm kretsöverföringen $L(s)$. (2 p)

- b) Introducera, som ett alternativ, tillståndsåterkoppling från en observatör

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K_y(y - C\hat{x}) - K_y r \\ u &= -L_u \hat{x}\end{aligned}$$

och välj tillståndsåterkopplingen L_u som i uppgift a) samt observatörens pol så att $\det(sI_n - A + K_y C) = s + 2\alpha$. (1 p)

- c) För ovanstående tillståndsåterkoppling från en observatör blir regulatorns överföringsfunktion

$$F(s) = L_u(sI_n - A + BL_u + K_y C)K_y$$

då reglerfelet $e = r - y$ är insignalen till regulatorn. Bestäm $F(s)$ och kretsöverföringen $L(s)$ för ovanstående val av L_u och K_y då $\alpha = 2$. (1 p)

- d) Studera den komplementära känslighetsfunktionen $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ för de båda fallen tillståndsåterkoppling utan och med observatör. Jämför speciellt högfrekvensasymptoterna och ange hur icke-modellerade högfrekventa resonanser påverkar det återkopplade systemets stabilitet. (1 p)

Lösning till tentamen i Regler teknik 221025

1. a)

$$\angle G(j\omega_{G150}) = -4 \arctan \omega_{G150} = -150^\circ$$

$$\Rightarrow \omega_{G150} = \tan 37.5^\circ = 0.767 \text{ rad/s} \quad \omega_c = 0.4 \omega_{G150} = 0.307 \text{ rad/s}$$

$$\angle G(j\omega_c) + \angle F_{PI}(j\omega_c) = -4 \arctan \omega_c - 90^\circ + \arctan \omega_c T_i$$

$$T_i = \frac{1}{\omega_c} \tan(4 \arctan \omega_c - 40^\circ) = 1.751 \quad = -180^\circ + \phi_m = -130^\circ$$

$$|G(j\omega_c)| |F_{PI}(j\omega_c)| = \frac{1}{(1+\omega_c^2)^2} \frac{K_i \sqrt{1+(\omega_c T_i)^2}}{\omega_c} = 1$$

$$K_i = \frac{\omega_c (1+\omega_c^2)^2}{\sqrt{1+(\omega_c T_i)^2}} = 0.324$$

$$\tau_0 = 1/K_i = 3.09$$

$$\tau_u = K_p = K_i T_i = 0.567$$

b) $\omega_c = 0.6 \cdot \omega_{G150} = 0.6 \cdot 0.767 = 0.460 \text{ rad/s}$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{1}{(1+\omega_c^2)^2} = 0.835 \quad \angle G(j\omega_c) = -4 \arctan \omega_c = -98.8^\circ$$

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_c) = -180^\circ + 50^\circ + 98.8^\circ = -31.2^\circ$$

$$FS \Rightarrow \omega_c \tau = 0.61 \Rightarrow \tau = 1.326$$

$$K_\infty |G(j\omega_c)| = 4.45 \Rightarrow K_\infty = K_i \tau \beta = \frac{4.45}{0.835} = 5.33$$

$$K_i = \frac{4.45}{10 \cdot 1.326 \cdot 0.835} = 0.402$$

c) PI: $\tau_0 = 3.09 \quad \tau_u = 0.567$ PID: $\tau_0 = 2.49 \quad \tau_u = 5.33$

$$\frac{\tau_{0PID}}{\tau_{0PI}} = 0.81$$

$$\frac{\tau_{uPID}}{\tau_{uPI}} = 0.41$$

∴ Nästan 20% mindre högre τ_0 ger 10% förbättring av τ_0

2

$$a) \frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt} = q - a\sqrt{2g} V \sqrt{h}$$

Arbetspunkt $q_0 = a\sqrt{2g} V_{h_0} \Rightarrow V_{h_0} = \frac{q_0}{a\sqrt{2g}}$

Linjärisering

$$\Delta \dot{h} = - \frac{a\sqrt{2g}}{A} \frac{1}{2V_{h_0}} \Delta h + \frac{1}{A} \Delta q =$$

$$= - \frac{a^2 2g}{2A q_0} \Delta h + \frac{1}{A} \Delta q = (A=1, a=0.1, g=10)$$

$$= - \frac{0.1}{q_0} \Delta h + \Delta q$$

Laplace $G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{s + \underbrace{(0.1/q_0)}_b} \triangleq \frac{1}{s+b}$

$$b) L(s) = \frac{1}{s+b} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{K_i}{s} = \frac{K_i}{s^3 + (1+b)s^2 + bs}$$

$$KE \quad 1 + A_m L(s) = \frac{s^3 + (1+b)s^2 + bs + A_m K_i}{s^3 + (1+b)s^2 + bs} = 0$$

Routh-Hurwitz kriterium

$$s^3 \quad 1 \quad b \quad \text{stabilitetsgräns!}$$

$$s^2 \quad 1+b \quad A_m K_i \quad b^2 + b - A_m K_i = 0$$

$$s^1 \quad \frac{b+b^2 - A_m K_i}{1+b} \quad 0$$

$$s^0 \quad A_m K_i$$

$$K_i = \frac{b^2 + b}{A_m} = \left(q_0=1, A_m=2 \right)$$

$$b=0.1$$

$$= 0.055$$

c) För vilket $b = 0.1/q_0$ och $K_i = 0.055$ nås stabilitetsgränsen för $A_m = 1$?

$$b^2 + b - 0.055 \Rightarrow b = -0.5 + \sqrt{0.25 + 0.055} = 0.0523$$

$q_0 < 0.1/b = 1.91 \text{ m}^3/\text{s}$ $\therefore$ En ökning med 91% inom systemet blir instabilt.

3.

$$a) G(s) = \frac{1}{s(1+s)} \quad L(s) = \frac{K_p}{s^2 + s}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p}{s^2 + s + K_p} = (K_p = 0.25) = \frac{0.25}{(s+0.5)^2} = \frac{1}{(1+2s)^2}$$

b)

$$G_{ry}(s) = \frac{1}{(1+0.5s)^2} = F_r(s) \frac{1}{(1+2s)^2}$$

$$\Rightarrow F_r(s) = \frac{(1+2s)^2}{(1+0.5s)^2}$$

c)

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad \frac{U(s)}{Y(s)} = G_{ry}(s) \frac{1}{G(s)}$$

$$U(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{G_{ry}(s)}{G(s)} \frac{r_0}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G_{ry}(s)}{G(s)} r_0$$

$$G_{ry}(s) \text{ enligt } a) \Rightarrow U(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 r_0}{4s^2} = 0.25 r_0$$

$$G_{ry}(s) \text{ enligt } b) \Rightarrow U(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 r_0}{0.25s^2} = 4 r_0$$

snabbheten ökar 4 gånger medan

$U(0)$ ökar $\frac{4}{0.25}$ 16 gånger =

(snabbheten)²

$$4. g) G(s) = e^{-sT_d} \quad T_d = 2h \Rightarrow G_d(z) = z^{-2}$$

Notera att $G_d(e^{j\omega h}) = e^{-j\omega 2h} = e^{-j\omega T_d} = G(j\omega)$

$$b) L_d(z) = G_d(z)F_d(z) = z^{-2} \frac{K_i z}{z-1} = \frac{K_i}{z(z-1)} = \frac{K_i}{z^2 - z}$$

$$G_{rgd}(z) = \frac{L_d(z)}{1 + L_d(z)} = \frac{K_i}{z^2 - z + K_i} = \frac{0.25}{(z - 0.5)^2} =$$

$$\text{för } K_i = 0.25 \quad = \frac{0.25 z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.25 z^{-2}}$$

$$g) y(kh) - y(kh-h) + 0.25y(kh-2h) = 0.25r(kh-2h)$$

stegsvaret $r(kh) = 1 \quad k \geq 0 \Rightarrow$

k	$y(kh)$
0	0
1	0
2	0.25
3	$0.25 - 0.25 \cdot 0.25 + 0.25 = 0.4375$
∞	1 eftersom $G_{rgd}(1) = 1$

$$5. \quad G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases}$$

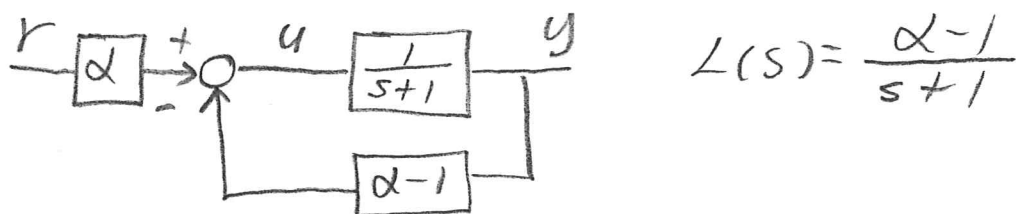
a) Önskad polplacering i $s = -\alpha$

$$u = -L_n x + K_r r$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(1+L_n)x + K_r r \\ y = x \end{cases} \Rightarrow G_{ry}(s) = \frac{K_r}{s + \underbrace{(1+L_n)}_{\alpha}}$$

$$\alpha = 1 + L_n \Rightarrow L_n = \alpha - 1$$

$$G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow \frac{K_r}{\alpha} = 1 \Rightarrow K_r = \alpha$$



b) $s - (-1) + K_y = s + 2\alpha \Rightarrow K_y = 2\alpha - 1$

c)
$$\begin{aligned} s \hat{x}(s) &= -\hat{x}(s) - L_n \hat{x}(s) - K_y \hat{x}(s) - K_y E(s) \\ U(s) &= -L_n \hat{x}(s) \end{aligned}$$

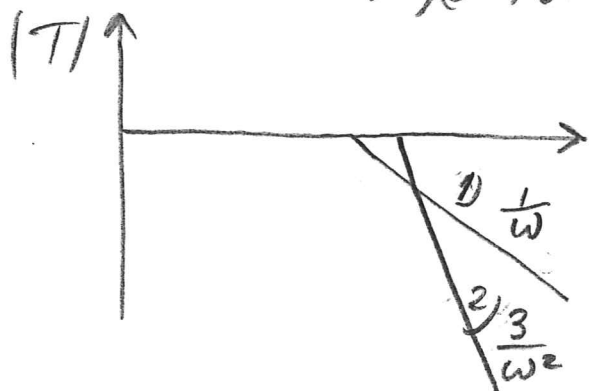
$$\frac{U(s)}{E(s)} = F(s) = -(\alpha-1) \frac{-(2\alpha-1)}{s+1 + (\alpha-1) + (2\alpha-1)} = \frac{3}{s+5}$$

$$L(s) = G(s)F(s) = \frac{3}{(s+1)(s+5)}$$

d) 1. Tillståndslöslös koppling $T(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2} K_d$

2. Tillståndslöslös koppling från observatör

$$T(s) = \frac{3/(s^2+6s+5)}{1+3/(s^2+6s+5)} = \frac{3}{s^2+6s+8} = \frac{3}{(s+2)(s+4)}$$



HF-asymptoter för T

$$1) T_{HF} = \frac{1}{\omega} \quad 2) T_{HF} = \frac{3}{\omega^2}$$

Robust stabilitetskravet

$$|T| < \frac{1}{|A_G|} \Rightarrow 1) \text{ (utan observatör) } \text{ är mer känslig för HF-resonans, eftersom } |T|_2 < |T|_1 \text{ för HF}$$